

FARE MATEMATICA CON I DOCUMENTI STORICI

Una raccolta per la scuola secondaria
di primo e secondo grado

a cura di Adriano Demattè
presentazione di Fulvia Furinghetti

VOLUME PER L'ALUNNO

FARE MATEMATICA CON I DOCUMENTI STORICI

Una raccolta per la scuola secondaria
di primo e secondo grado

a cura di Adriano Demattè
presentazione di Fulvia Furinghetti

VOLUME PER L'ALUNNO

IPRASE

**Istituto provinciale per la ricerca
e la sperimentazione educativa**

via Tartarotti 15 – 38068 Rovereto (TN) - C.F. 96023310228

tel. 0461 494500 – fax 0461 499266

iprase@iprase.tn.it - iprase@pec.provincia.tn.it - www.iprase.tn.it

Comitato tecnico-scientifico

Angelo Paletta (Presidente)

Gabriella Agrusti

Matteo Lancini

Roberto Ricci

Alessandro Rosina

Francesca Mussino

Giuseppe Rizza

Direttore

Luciano Covi

© Editore Provincia autonoma di Trento – IPRASE

Tutti i diritti riservati

Prima pubblicazione: giugno 2006

Seconda pubblicazione riveduta e integrata: Ottobre 2025

Stampa: Centro Duplicazioni della Provincia Autonoma di Trento

ISBN 978-88-7702-554-8

Il volume è disponibile all'indirizzo www.iprase.tn.it
alla voce risorse> pubblicazioni> volumi scientifici

Hanno contribuito alla realizzazione del volume:

Daniela Bresciani, Maria Vittoria Cicinelli, Adriano Demattè,

Paola Depedri, Luca Giovannini

Si ringrazia Mirko Maracci per i suggerimenti e le osservazioni

In copertina: personaggio che conta sull'abaco,
particolare da un bassorilievo romano del primo secolo d.C.
(Roma, Musei Capitolini)

IPRASE per l'ambiente



Questo prodotto è composto da materiale che proviene da foreste ben gestite certificate FSC®, da materiali riciclati e da altre fonti controllate.

INDICE

Presentazione	7
<i>Fulvia Furinghetti</i>	
Ritorno alle radici	7
Introduzione per l'alunno	9
Un'antologia di matematica...?! Perché?	9
CAPITOLO 1 - DALL'ARITMETICA ALL'ALGEBRA	
Sistemi di numerazione	13
Egizi	13
Babilonesi	14
Greci	15
Romani	15
Maya	16
Finalmente gli Indiani!	18
Chi ha inventato il sistema binario?	19
Operazioni con i numeri naturali	20
Fra Medioevo e Rinascimento	20
Non solo numeri naturali	24
Frazioni in Egitto: l'occhio del dio Horus	24
Come indicavano le frazioni in Egitto	25
I numeri decimali e gli Arabi	25
I numeri decimali in Europa	27
Il triangolo aritmetico	29
Cinesi, arabi, europei...	29
Problemi curiosi	31
Risolviamo assieme	31
Altri problemi: il testo	35
Altri problemi: le soluzioni	36
Numeri "falsi"	39
Nell'Italia del 500	39
Una donna alle prese con la matematica	40
Dalle parole ai simboli	42
Un grande matematico arabo	42

Diofanto, uno che ha lasciato il segno	45
Tutte equazioni	46
Una “ricetta” per risolvere un’equazione	46
La scienza del calcolo letterale	47
Filosofo, fisico e... matematico	48
Problemi ed equazioni	51
Problemi di primo e secondo grado	51
Bombelli e il numero i	59
Sarà un numero?	59
Logaritmi	63
Un’idea antica	63
Una risposta autorevole!	67
E inoltre... evoluzione dei simboli (per l’aritmetica e l’algebra)	69

CAPITOLO 2 - I VOLTI DELLA GEOMETRIA

Aritmo-geometria: i numeri figurati	75
Numeri poligonal	75
Terne pitagoriche	80
Modi ingegnosi per ricavare terne pitagoriche	80
Teorema di Pitagora	83
A spasso per la storia: i lati e i quadrati...	83
... un problema nel Rinascimento...	84
... problemi ed equazioni	84
Punti lontani	87
Di torri ed altri edifici	87
Come scavare un tunnel e non sbucare nel punto sbagliato	89
$\sqrt{2}$	92
Come avranno fatto?	92
π	94
Quale sarà il valore vero?	94
Archimede	96
Una raffica di proposizioni	96
L’area del cerchio e il metodo di <i>esaustione</i>	98
Coordinate... cartesiane?	100
Nel 1300	100
Uno dei padri	101
La geometria, di Euclide e non	103
Un’introduzione, autorevole ma...	103
Gli <i>Elementi</i> : quasi una Bibbia	104
Due millenni dopo	107

Trigonometria	109
Da un manuale del 500	109
Cos'è la topologia?	112
Una nuova geometria	112
Il problema dei ponti di Königsberg	113
Il ragionamento di Eulero	113
In più... numeri solidi	116

CAPITOLO 3 - TEMI DI MATEMATICA MODERNA

La logica: scienza antica ma attuale	121
Cosa sono i connettivi logici	121
L'arte di... ragionare	123
La matematica si impadronisce della logica	124
La logica per costruire i numeri	129
Gottlob Frege e Bertrand Russell	129
Misuriamo la casualità	133
Galileo e un problema sul lancio di tre dadi	133
Scambi epistolari	136
La concezione classica della probabilità	137
Altre concezioni di probabilità	140
Infinito	143
Corridori, frecce, lepri, tartarughe, ...	143
Quando il tutto non è maggiore della parte	144
L'infinito, fonte di altri paradossi	145
Sistemiamo le conoscenze	147
Il paradiso di Cantor	150
I numeri reali sono di più dei naturali	150
Cantor, secondo Hilbert	152
Infinitesimi: radici antiche	154
Il cerchio	154
Il toro	155
Gli indivisibili	156
Limiti, derivate, integrali	160
Linee e integrali	160
Leibniz: "differentiae" o incrementi infinitesimi	161
Newton: grandezze e moti continui	163
Un limite notevole	169
Non ci fermiamo qui... e la storia continua...	170

Presentazione

Fulvia Furinghetti, Università di Genova

RITORNO ALLE RADICI

Perché la storia della matematica? Molte volte mi è stato chiesto di rispondere a questa domanda. Mi fa piacere pensare che, in qualche caso almeno, la mia risposta sia stata convincente. È la prima volta, però, che rispondo avendo in mano la prova concreta che davvero la mia fiducia nella storia come strumento per insegnare e imparare la matematica può essere condivisa dagli insegnanti. La prova concreta di cui parlo sono le pagine del libro che sto presentando. Si tratta di un'antologia di brani di storia della matematica di diverse epoche (dai Babilonesi in avanti) completata da attività per l'alunno e da spiegazioni.

Questo libro nasce dal lavoro appassionato degli insegnanti di matematica Daniela Bresciani, Maria Vittoria Cicinelli, Paola Depedri, Luca Giovannini, coordinati da Adriano Demattè.

Già alla fine del 1800, si pensava che l'educazione matematica dei ragazzi potesse trarre vantaggio da un confronto con lo sviluppo del pensiero matematico nei secoli e che questo confronto potesse essere fonte di ispirazione per gli insegnanti.

La storia della matematica, come viene usata in questo libro, è anche una porta (forse solo uno spiraglio) per entrare nelle civiltà del passato e vederne alcuni aspetti: la lingua, gli interessi culturali, i fatti della vita di tutti i giorni. Di conseguenza, nel libro ci sono idee perché gli insegnanti delle diverse materie possano lavorare insieme in classe.

Chi ha realizzato questo libro ha dato per scontato che la storia della matematica richieda l'uso delle fonti originali, cioè dei testi così come sono stati scritti secoli fa e trascritti con il minor numero di cambiamenti possibili.

Ognuno dei documenti presentati nella nostra antologia contiene le radici di un concetto (di sistemi di numerazione, di operazione, di equazione, di algoritmo, di derivata,...): con la storia si impara a fare meglio la matematica!

Introduzione per l'alunno

UN'ANTOLOGIA DI MATEMATICA...?! PERCHÉ?

Questa è una piccola antologia di documenti matematici: brani storici scritti proprio da matematici. Niente paura: non è una materia nuova da studiare ma un modo nuovo di fare matematica!

Un documento matematico può essere un brano in cui prevalgono le parole o, al contrario, prevalgono i simboli; può essere uno schema, un diagramma, un disegno: i modi per comunicare in matematica sono tanti!

Se vuoi immaginare di essere uno scriba al tempo dell'Antico Egitto, o uno studente babilonese alle prese con i numeri cuneiformi, o un matematico maya; se vuoi scoprire chi ha inventato i simboli dei numeri che utilizziamo, o perché studiamo la "regola dei segni" per i numeri relativi o chi ha introdotto il "calcolo letterale"... , questo è il libro che stavi cercando!

Se ti piace la matematica ma non sai bene perché la studi, se, al contrario la matematica non ti piace e credi di non capirla..., è arrivato il momento di lasciarsi incuriosire (il che non significa non fare un po' di fatica e non metterci impegno...).

Quest'antologia può essere usata con la guida dell'insegnante, ma anche per conto proprio, magari facendo indagini personali per quei concetti che dovessero risultare troppo difficili.

Il primo capitolo dell'antologia propone un percorso attraverso l'**aritmetica** e l'**algebra**.

Il secondo capitolo affronta il tema della **geometria**, nei suoi vari aspetti.

Il terzo capitolo riguarda i temi principali della matematica moderna: **logica**, **analisi**, **probabilità**...

Ogni capitolo è formato da **alcune parti**, ognuna delle quali contiene **documenti** riguardanti lo stesso argomento.

Una breve introduzione inquadra storicamente il tema affrontato, mentre ogni documento è preceduto da alcune notizie sull'autore o sull'origine o su certe particolarità dei documenti stessi.

Dopo la lettura, troverai attività "Per interpretare il documento". Saranno quesiti ai quali potrai dare una risposta rivedendo il testo e ti aiuteranno a rintracciare i concetti più importanti. Esse comprendono anche attività che ti aiutano ad approfondire: potrai scoprire aspetti nuovi di concetti che già conosci o finalmente capirli sul serio!

Qualche volta, in “Fai le tue ipotesi”, sarai invitato a formulare le tue idee, a fare congetture, come direbbe un matematico.

Si discute molto in matematica, non si fanno soltanto calcoli!



Immagine tratta da *Margarita Philosophica*, G. Reisch, 1503.

Capitolo 1

Dall'aritmetica all'algebra

Sistemi di numerazione

Il nostro sistema di numerazione ha avuto una lunga storia.

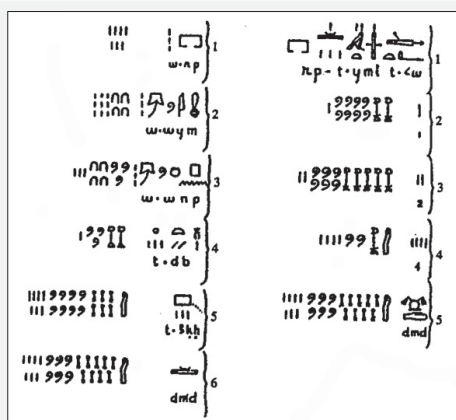
Noi usiamo con grande facilità lo zero, la scrittura dei numeri con a destra le unità e poi le decine, le decine di decine (centinaia), le decine di decine di decine (migliaia)... Immaginiamo per un attimo che non ci sia più un modo per scrivere lo zero, che non ci sia un posto per le unità, uno per le decine, uno per le centinaia ecc.: come si potrebbe fare a scrivere un numero? A questa domanda hanno risposto in modo diverso vari popoli, finché qualcuno ha pensato che...

EGIZI

La civiltà egizia si è sviluppata oltre 5 000 anni fa. Per quanto riguarda la matematica, il documento più famoso è forse il Papiro Rhind (che ha preso il nome dallo studioso tedesco che lo acquistò non molti decenni fa, mentre il suo autore è lo scriba Ahmes). Esso risale al 1650 a.C. circa ma si ritiene sia la trascrizione di documenti ancora più antichi. Contiene una raccolta di problemi molto interessanti, alcuni non proprio facilissimi.

Ci sono 7 case e ogni casa ha 7 gatti; ogni gatto mangia 7 topi e ogni topo avrebbe mangiato 7 spighe di grano; ogni spiga avrebbe prodotto 7 hekat¹ di grano. Si chiede quale numero si ottiene aggiungendo case, gatti, topi, spighe e hekat.

Problema 79, Papyrus Rhind²



¹ L'hekat è un'antica unità di misura.

² Il documento è scritto in *geroglifico* ma il documento originale era scritto in *ieratico* (il *geroglifico* è un tipo di scrittura egiziana più antica dello *ieratico*): autore della trascrizione è A. Chace (1927).

Per interpretare il documento

1. Calcola:
 - a. il numero dei gatti;
 - b. il numero dei topi;
 - c. il numero di spighe;
 - d. il numero di hekat;
 - e. il numero richiesto dal problema.
2. Cerca all'interno del documento in geroglifico i numeri che hai utilizzato nel calcolo; ti dico che uno dei numeri è scritto in modo errato: scopri qual è. Confronta le tue scoperte con quelle dei tuoi compagni.
3. Un'asta verticale, un manico di cestino, una corda arrotolata, un fiore di loto che sta sbocciando sul suo stelo, un dito teso con l'ultima falange ripiegata: ridisegna questi simboli, con i quali gli egizi indicavano i numeri 1; 10; 100; 1 000; 10 000.
4. Scrivi in geroglifico il numero 12 345 e altri numeri naturali scelti da te.

BABILONESI

Quasi contemporaneamente alla civiltà egizia, si sviluppò quella “fra i due fiumi”, la babilonese. L'argilla era la “carta” dei Babilonesi: sulle tavolette d'argilla che si sono conservate fino al giorno d'oggi, troviamo anche molta matematica. Noi, a distanza di qualche millennio, utilizziamo ancora il loro modo di scrivere i numeri: quando misuriamo il tempo in ore, minuti, secondi ragioniamo “in base 60”, infatti 60 secondi danno un minuto e 60 minuti un'ora.

Per interpretare il documento

1. Scrivi i numeri naturali da 1 a 14 e poi, accanto, ridisegnali come nella prima colonna della tavoletta babilonese.
2. Scrivi i primi sei numeri della “tabellina del 9”. Cercali nella seconda colonna della tavoletta.
3. Il modo babilonese di scrivere 63 va interpretato così: “63” è “60+3” cioè “una ‘sessantina’ e tre unità”. Rivedi nella seconda colonna gli altri numeri della “tabellina del 9”.
4. Riassumendo: i Babilonesi come indicavano l'unità? e il 10? e i numeri maggiori di 60?
5. Scrivi alla maniera babilonese alcuni numeri scelti da te.



Tavoletta babilonese della moltiplicazione per 9 (fronte).

GRECI

La numerazione greca era alfabetica, come quella ebraica. Invece di usare dei simboli speciali per indicare i numeri, come gli Egizi o come noi oggi, verso il IV secolo a.C. i Greci pensarono di servirsi delle lettere del loro alfabeto. Osserva che anche nel documento che segue non compaiono ancora simboli di operazione.

Per interpretare il documento

1. Fra le lettere dell'alfabeto greco, B (beta) indica 2; Γ (gamma) indica... Cercale nel documento.
2. Cerca nel documento altre lettere dell'alfabeto greco, vale a dire α, Δ, ε, ζ, Z, H, Θ, I, K, Λ: qual è il loro valore? Spiega come hai fatto a rispondere, facendo riferimento alle moltiplicazioni $2 \cdot 1$, $2 \cdot 2$, $2 \cdot 3, \dots 3 \cdot 1$, $3 \cdot 2, \dots$

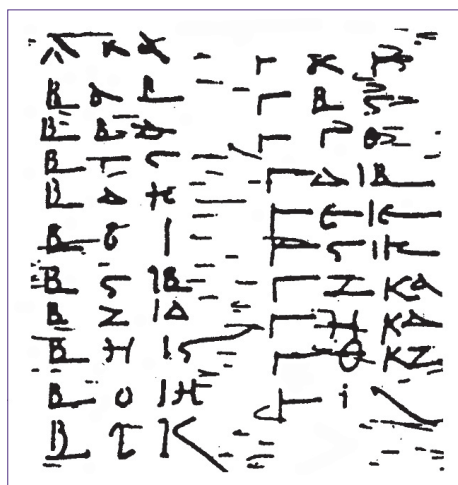
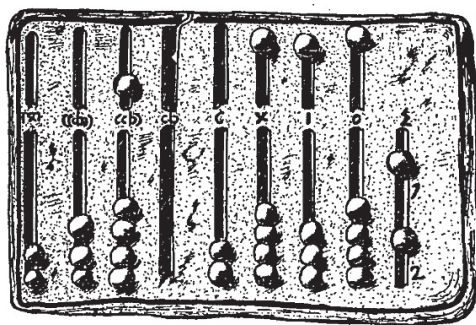


Tavola greca con la moltiplicazione per 2 (a sinistra) e per 3 (a destra).

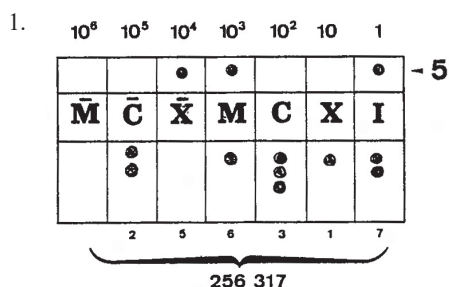
ROMANI

C'è chi dice che i Romani non fossero dei bravi matematici, ma le costruzioni che ci hanno lasciato (strade, ponti, acquedotti, edifici, ...) non poterono essere realizzate senza calcoli! Il loro sistema di numerazione non facilitava però le operazioni scritte. Con l'abaco, invece, riuscivano a 'fare miracoli'. Utilizzavano gettoni o sassolini (in latino *calculi*, da cui il nostro *calcoli*, parola che si usa in matematica, ma anche in medicina quando si parla, ad esempio, di calcoli renali...).

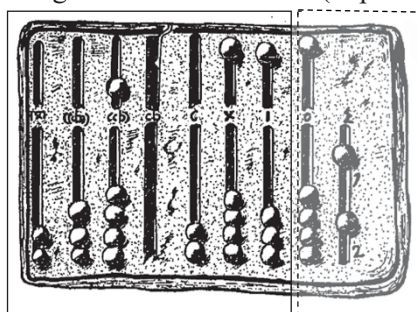


Abaco romano "tascabile".

Per interpretare il documento



Sopra, lo schema illustra un esempio di come veniva utilizzato l'abaco romano: è rappresentato il numero 256 317. Esso riguarda la parte dell'abaco romano "tasca-
bile", riprodotta qui a fianco, racchiusa nel rettangolo a bordo continuo (la parte
nel rettangolo a bordo tratteggiato riguarda le frazioni dell'unità). Stabilisci
quale numero è rappresentato nella parte di abaco "tasca-
bile" racchiusa nel rettan-
golo a bordo continuo (considera che cia-
scuno dei *calcoli* nelle scanalature brevi, in
alto, valga 5 unità oppure 5 decine ecc.).



2. Nello schema che segue, disegna i *calcoli* per rappresentare il numero 2005.

$\bar{M}$	$\bar{C}$	$\bar{X}$	M	C	X	I

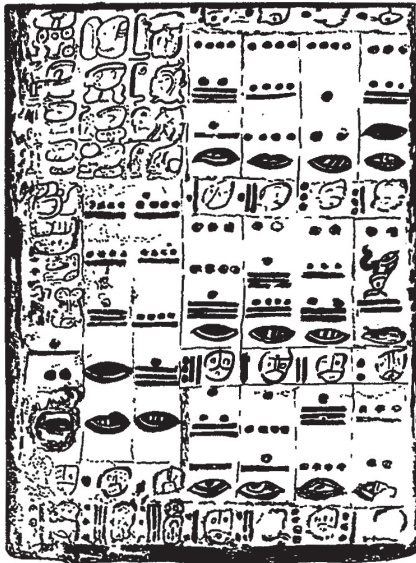
3. Ripeti l'esercizio precedente con altri numeri scelti da te.

MAYA

La civiltà dei Maya fiorì nell'attuale Messico a partire dal III secolo d.C. Furono dei grandi astronomi. Il loro sistema di numerazione era molto utile per registrare i dati ricavati dall'osservazione del cielo. Usarono lo zero che mancava presso Egizi, Babilonesi, Greci e Romani. Esso era disegnato in tanti modi diversi: in alcuni casi ricordava un occhio semiaperto e in altri delle conchiglie (vedi il documento che segue).

I Maya scrivevano i numeri verticalmente. Iniziando dal fondo:

- le unità,
- poi le “ventine” (e non le decine come nel nostro sistema di numerazione),
- poi le “trecentosessantine” (la durata dell’anno era stimata in 360 giorni),
- poi le “settemiladuecentine” ($7\,200 = 360 \cdot 20$).



Codice di Dresda.

.... 4 17 6 0	 4 9 4 0	 4 1 2 0	... 3 13 0 0
... 5 4 16 0	.. 2 16 14 0	.. 2 8 12 0	.. 2 0 10 0
• 1 12 8 (*) 0	• 1 4 6 0	16 4 0	8 2 0
			14 600
			2 920

Per interpretare il documento

1. Cerca all’interno del documento precedente i numeri maya che sono riscritti nei diversi riquadri della tabella a destra.
2. Qual è il valore del pallino (•) e della barretta orizzontale (—) nella numerazione maya?
3. Rileggi l’introduzione a questa parte sui Maya e scrivi nella tabella quali numeri sono rappresentati in ciascun riquadro B, C, D, F, G, H, I, J, K, L (osserva il riquadro A, dove $2\,920 = 8 \cdot 360 + 2 \cdot 20 + 0$, e l’esempio E dove $14\,600 = 2 \cdot 7\,200 + 0 \cdot 360 + 10 \cdot 20 + 0$; in D un asterisco segnala che nell’originale il numero 8 non era scritto completo)³.
4. Calcola le differenze fra i valori che hai trovato ai punti B e A, C e B, D e C, ..., L e K; ottieni sempre lo stesso numero: quale?
5. Scrivi i numeri maya da 0 a 19.
6. Scegli altri numeri e scrivilli nella numerazione maya.

³ Osserviamo che:

$$A = 2\,920 = 1 \cdot 2\,920 = 5 \cdot 584 \quad B = 5\,840 = 2 \cdot 2\,920 = 10 \cdot 584 \quad C = 8\,760 = 3 \cdot 2\,920 = 15 \cdot 584$$

Il periodo di rivoluzione di Venere era stimato in 584 giorni.

FINALMENTE GLI INDIANI!

Lo ricorda anche Leonardo Pisano detto Fibonacci (c.a. 1170-1230) nel suo *Liber abbaci*: il merito della numerazione moderna va agli abitanti dell'India. Si racconta che nel 773 d.C. giunse a Baghdad un ambasciatore indiano che portava con sé un documento in cui erano illustrati il sistema di numerazione con dieci cifre e le tecniche di calcolo. A noi, successivamente, sono arrivati proprio tramite gli Arabi, che nel Medioevo erano giunti in Europa (Spagna, Sicilia,...) e con i quali i mercanti europei avevano frequenti scambi. Il padre di Fibonacci era al servizio della repubblica marinara di Pisa e si trasferì per lavoro in Algeria dove il giovane Leonardo imparò la nuova numerazione.

१ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ ०

Dalla numerazione dei versi di uno scritto
indiano che risale all'anno 875 d.C.

Per interpretare il documento

1. Osserva le cifre che rappresentano 2 e 3 e quanto sono simili alle nostre... Scrivi accanto a ciascuno dei numeri del documento la loro trascrizione moderna.
2. Nell'originale, la successione prosegue: scrivi con i simboli degli Indiani i numeri naturali fino a 21 ricordando che la nostra numerazione ce l'hanno insegnata proprio loro.
3. Fai un confronto fra i diversi modi di scrivere i numeri naturali, dagli Egizi in poi. Soffermati in particolare sul ruolo dello zero (nei casi in cui esso veniva usato) e sul fatto che qualche numerazione era *posizionale*, cioè nella scrittura del numero i simboli (le cifre) avevano un valore diverso a seconda della posizione che occupavano (nel nostro sistema di numerazione, c'è il posto delle unità, delle decine, delle centinaia,...).
4. Inventi ed esegui qualche addizione usando di volta in volta numeri scritti in uno dei diversi modi illustrati sopra (egizio, babilonese, greco, romano, maya, indiano).
5. Rifletti sulle operazioni che hai fatto al precedente punto 4: secondo te, quali modi sono più comodi?
6. Descrivi i vantaggi dei diversi sistemi di numerazione; evidenzia anche le difficoltà che si possono incontrare.

Fai le tue ipotesi

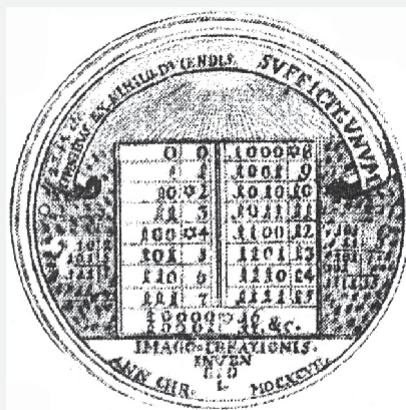
1. Secondo te, le diversità fra i vari tipi di numerazione che hai visto sopra da cosa sono dipese? Saranno state determinate dagli scopi per i quali le diverse civiltà utilizzavano i numeri?

CHI HA INVENTATO IL SISTEMA BINARIO?

A Leibniz, grande matematico e filosofo vissuto a cavallo tra il 1600 e il 1700, viene riconosciuto il merito di aver introdotto il *sistema di numerazione binario* (che usasolo le cifre 0 e 1). Il vescovo e matematico spagnolo Juan Caramuel y Lobkowitz (1606-1682), nella sua opera *Mathesis Biceps*, aveva anticipato Leibniz di qualche anno. È straordinario notare che oggi ‘1’ si può interpretare come ‘passa corrente’ o ‘acceso’, mentre ‘0’ con ‘non passa corrente’ o ‘spento’: le applicazioni alla scienza dei computer diventano in questo modo un fatto naturale.

Invece della progressione di dieci in dieci, impiego da molti anni la progressione più semplice di tutte, che va di due in due, ritenendo che sia perfettamente adeguata alla scienza dei numeri. Utilizzo solo due caratteri, “0” e “1”, e poi, quando sono arrivato a due, ricomincio. Quindi “due” si scrive “1 0”; “due volte due”, ovvero “quattro”, si scrive “1 0 0”, e “due volte quattro”, ovvero “otto”, si scrive “1 0 0 0”, e così via.

Leibniz, da uno scritto del 1703.



Progetto di medaglia rappresentante il sistema binario, disegnato da Leibniz nel 1697.

Per interpretare il documento

1. Vista la qualità della figura, a tratti poco chiara, ti proponiamo una versione schematica della medaglia con trascritti i numeri.
- 2, 4, 8, 16 sono contrassegnati da Leibniz con un simbolo simile a $\otimes$: cos’hanno in comune i quattro numeri? (Sono potenze di...).
2. Scrivi altri numeri in binario.
3. Qual è, dopo il 16, il prossimo numero che Leibniz avrebbe contrassegnato con $\otimes$?

0	0	1000	$\otimes 8$
1	1	1001	9
10	$\otimes 2$	1010	10
11	3	1011	11
100	$\otimes 4$	1100	12
101	5	1101	13
110	6	1110	14
111	7	1111	15
10000		$\otimes 16$	
10001		17 &C.	

Operazioni con i numeri naturali

Con il sistema di numerazione romano, per fare i calcoli era praticamente necessario usare l'abaco. Il nostro sistema di numerazione indo-arabico, invece, consente di fare calcoli scritti. Noi che li facciamo da sempre così non ci rendiamo conto della comodità che abbiamo a disposizione, ma pensa ad un ragazzo romano che abbia dovuto, per esempio, moltiplicare 35 e 25...

Nel Medioevo non sono mancate le dispute feroci fra abacisti e algoritmisti: sostenitori dell'uso dell'abaco i primi, degli algoritmi (cioè delle tecniche di calcolo scritte) i secondi.

Qui vediamo come diversi autori spiegano il modo di eseguire addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione fra numeri naturali.

FRA MEDIOEVO E RINASCIMENTO

Leonardo Pisano detto Fibonacci (ca. 1170-1230) è autore del *Liber abbaci* grazie al quale giunse in Europa il nostro attuale modo di scrivere i numeri, che proveniva dagli Arabi e, prima ancora, dagli Indiani.

Il secondo documento è di autore ignoto ma sappiamo che il libro da cui è tratto risale al 1478 ed è il volume di matematica a stampa (quindi non manoscritto) più antico, in Italia e nel mondo.

Francesco Feliciano (XVI sec.), nato a Lazise (Verona), sul Lago di Garda, è autore di un libro di aritmetica, geometria e algebra.

Dionigi Gori (XVI sec.), nato a Siena, fu maestro d'abaco e autore di due importanti volumi.

1	9	2	1
5	4	3	
1	2	3	2
1	4	6	

Quando poi alcuno vorrà addizionare quanti vuole numeri, li collochi in una tabella [...], cioè il primo grado di tutti i numeri che vorrà addizionare sotto il primo dello stesso che è posto precedentemente nella somma, ed il secondo sotto il secondo e lo stesso per quelli che seguono. E poi si comincia a raccogliere alle mani⁴ i numeri delle figure che sono nei primi gradi di tutti i numeri che furono posti nell'addizione, risalendo dal numero inferiore al superiore⁵, poi si scrivono le unità sopra il primo grado dei



⁴ Fare i calcoli sulle dita delle mani veniva spontaneo anche a Fibonacci!

⁵ Fibonacci suggerisce quindi di partire da 6 e addizionare 2 e poi 3.

numeri e le decine si tengono alle mani⁶, poi si addizionano i numeri che stanno al secondo grado e di nuovo le decine si serberanno, e si aggiungeranno alla somma del terzo grado dei numeri che si addizionano, e così scrivendo le unità e serbando le decine, di grado in grado addizionando i numeri, si può avere la somma di tutti i numeri fino all'infinito.

Leonardo Fibonacci, *Liber abbaci*, cap. III.

Per interpretare il documento

1. Nell'addizione di Fibonacci indica il risultato.
2. "Il primo grado... sotto il primo": pensa a come tu normalmente esegui un'addizione e spiega come vanno incolonnati i numeri prima di eseguire l'operazione.
3. Esegui in colonna l'addizione di tre numeri riportata da Fibonacci, usando il tuo solito modo.

Or sia tolto vn exemplo. 3oe. caua 3 4 8
da 4 5 2. e metti le tue poste in forma cosi.
die 342
adatto

4	5	2
3	4	8
1	0	4

Lo resto
Primo habbando da cauare mazoz de menoze:
segondo eguale da eguale:terzo meoz da mazoz:
fara cosi. dicendo. 8. de. 2. non se puo cauare: ma
.2. me compie. i. o. quel. 2. che te ha compie el to. i. o.
tu vie iongere a laltro. 2. che fora. 8. dicendo. 2. e. 2
fa. 4. el qual tu vie scriuere per resto sotto quel. 8.
con questa conditione: che a la figura seguente al
.8. 3oe. al. 4. tu vie iongere. i. e leuera. 5. poi dira. 5
da. 5. che eguale da eguale: resta. o. la qual. o. scriui
dretto li sotto doue nascuta. poi caua. 3. da. 4. che
menoz da mazoz: e resta. i. e scriui quel. i. sotto el. 3
et e fatta. e nasce per resto. i. o. 4.

Prendi un esempio, cioè sottrai 348 da 452. Disponi i numeri così:

452

348

104

Da destra, primo: dobbiamo sottrarre numero maggiore da numero minore; secondo: uguale da uguale; terzo: minore da maggiore. Dirai così: 8 da 2 non si può sottrarre, ma 8 e 2 fa 10, più l'altro 2 che è sopra l'8 fa 4 che dovrai scrivere come resto sotto l'8. Alla cifra che segue l'8, cioè al 4, dovrai aggiungere 1. Poi dirai: sottraggo 5 da 5, cioè uguale da uguale, e resta 0, che scriverai in basso. Poi sottrai 3 da 4, cioè minore da maggiore, e resta 1 che scrivi sotto il 3: ottieni il resto 104.

Anonimo, *Larte de labbacho*.

Per interpretare il documento

1. Nel documento antico riportato sopra vedi:

3	4	8
1	0	4

Come puoi fare la prova di una sottrazione? Addiziona 348 e 104 e controlla...

⁶ Si tiene conto del "riporto".

2. "... ma 8 e 2 fa 10, più l'altro 2 che è sopra l'8 fa 4 che dovrai scrivere come resto sotto l'8". Rifletti su questa frase e inventa un esempio che usi la regola suggerita (ad esempio se tu calcolassi, scrivendo i numeri in colonna, $45-28...$).

Multiplicar per gelosia, over per graticola si è per certa similitudine di quelle che si mettono alli balconi, over finestre, perché le donne non si vedano selle non vogliono. [...] Hor mettiamo che voglia multiplicar 9876 fia⁷ 6543, conchia⁸ il maggior numero di sopra come vedi qui, e poi metti l'altro numero dal lato dritto. E poi di' 3 fia 6 fa 18, e metti 18 nel primo quadretto di sotto da man destra, e poni il numero, coie 8 sotto al diametro del quadretto, e la decena sopra il diametro di detto quadretto, questo farai in tutti mettendo la decena di sopra, e il numero di sotto, e poi di' 3 fia 7 fa 21, metti 21 nel secondo quadretto [...] e poi comincia dal mezzo quadretto di sotto, e anderai fra li doi diametri, così metti 8 e poi di' 1 e 1 fa 2 e 4 fa 6, e metti 6, e di' 4 e 2 fa 6 e 8 fa 14 e 2 fa 16, e metti 6, e havrai 1 e di' 1 e 7 fa [...] 654 fia 9876, cioè fa 64618668.

	9	8	7	6	
6	5 4	4 8	4 2	3 6	6
4	4 5	4 0	3 5	3 0	5
6	3 6	3 2	2 8	2 4	4
1	2 7	2 4	2 1	1 8	3
	8	6	6	8	

Francesco Feliciano, *Scala Grimaldelli*, libro I.

Per interpretare il documento

1. Svolgi la moltiplicazione di 9876 per 6543 nel tuo solito modo.
2. "3 fia 6 fa 18": il numero 18 è inserito nell'ultimo quadratino, tagliato da una diagonale, in basso a destra. Osserva dove sono inseriti i risultati di $3 \cdot 7$, $3 \cdot 8$, $3 \cdot 9$, $4 \cdot 6$, $4 \cdot 7$ ecc.
3. Osservando la "graticola", calcola $1+1+4$ (1, 1, 4 sono scritti in diagonale in basso a destra).
4. Cerca ora dove sono scritti, in diagonale, 4, 2, 8, 2, 0 e calcola $4+2+8+2+0...$ Scrivi le unità e conserva il riporto (1).
5. Calcola ora $1+7+2+2+2+5+3+6...$ Scrivi le unità e conserva il riporto... E così via: rifai i calcoli della "graticola".
6. Immagina di spiegare ad un tuo amico la regola esposta da Feliciano: scrivi cosa gli diresti, fai dei confronti con la regola per la moltiplicazione che già conoscevi, spiegagli perché la moltiplicazione per gelosia "funziona".

⁷ Volte, per.

⁸ Colloca, scrivi.

Volendo partire 3868 per 12 a galera ne farai 3 batutte in questo modo; acomcia il numero che voi dividere [come vedi] in margine e sotto metici il partitore ch'è 12, coè 12 in 38 c'entra 3 volte, metelo in una casella fatta di linee dietro al numero che voi partire, et multiplica per 3, che c'entra via 12 ch'è il partitore, fa 36, sotrallo di 38, resta 2, metelo sopra al 8 e questa è la prima batutta, ora segue alla 2^a batutta [...] et arai partito 3868 et ne verà 322 $\frac{4}{12}$ ⁹[...].

Dionigi Gori, *Libro di Arimeticha*, c. 7v.

Per interpretare il documento

- Qui di seguito trovi, in dettaglio, i diversi calcoli che vanno fatti, a mente, per dividere 3868 per 12 “a galera”: tu completali e usali per capire l’esempio proposto da Dionigi Gori.

38:12 _____	26-24 _____
3 · 12 _____	28:12 _____
38-36 _____	2 · 12 _____
26:12 _____	28-24 _____
2 · 12 _____	

- Indica il resto della divisione.
- Dionigi Gori conclude che il risultato è 322 $\frac{4}{12}$. Allora, se facciamo la prova della divisione, $(322 + \frac{4}{12}) \cdot 12$ dovrà essere uguale a 3868. Se già conosci il calcolo con le frazioni, fai tu la verifica.
- Un altro modo di fare la prova: $322 \cdot 12 + 4$ dovrà essere uguale a 3868. Verificalo.
- Mettiti alla prova con altri esempi di operazioni utilizzando le tecniche antiche.

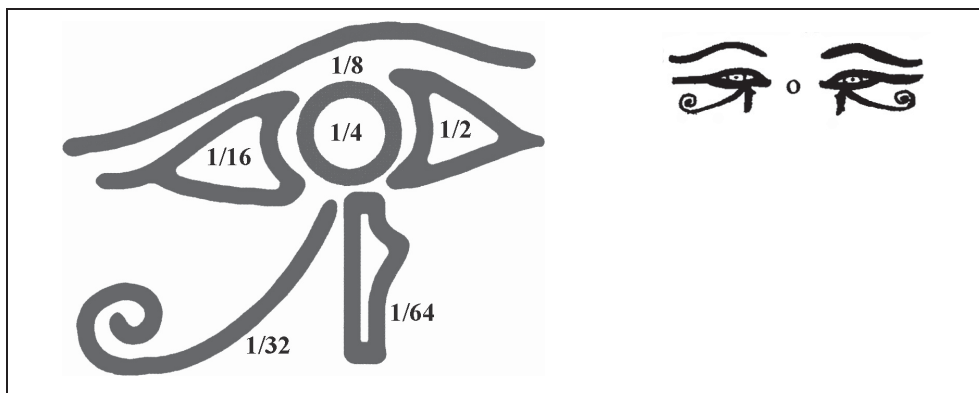
⁹ Vale a dire $322 + \frac{4}{12}$.

Non solo numeri naturali

Il calcolo con le frazioni crea a volte qualche difficoltà agli alunni, eppure tutti siamo d'accordo sulla sua importanza. Se tu provassi ad azzardare un parere, quando penseresti che l'uomo abbia cominciato ad usare le frazioni (per un momento non guardare più avanti perché una risposta la troverai tra poco)?

FRAZIONI IN EGITTO: L'OCCHIO DEL DIO HORUS

Un'antica leggenda ha per protagonista Horus, il figlio dalla testa di falco di Iside e di Osiride. Quest'ultimo venne ucciso da suo fratello, Seth, che si impadronì del potere. Per vendicare la morte del padre, Horus ingaggiò una terribile lotta con Seth durante la quale perse un occhio. Intervenne allora il dio Toth che ricompose le varie parti dell'occhio...



L'occhio di Horus

Per interpretare il documento

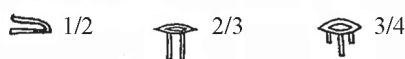
1. Addiziona le frazioni che vedi nella figura precedente (ma che non erano scritte nell'originale egizio!) e verifica che per ottenere l'intero manca $\frac{1}{64}$... Quella è proprio la parte che venne fornita dal dio Toth in modo da ricomporre l'intero occhio.

COME INDICAVANO LE FRAZIONI IN EGITTO

- a. Per indicare le frazioni, gli Egizi usavano il geroglifico della bocca. Tutti i libri di storia della matematica ricordano la loro predilezione per le frazioni unitarie (cioè con numeratore uguale ad 1), eccone alcune:



- b. Simboli speciali indicavano le frazioni $1/2$; $2/3$; $3/4$.



- c. Ecco altre due frazioni: sono scritte come somma di frazioni unitarie e questa è una caratteristica degli Egizi (in questo senso va intesa la predilezione di cui si diceva sopra).



Per interpretare il documento

1. Se non la conosci, rivedi la numerazione egizia riportata più indietro in *Sistemi di numerazione*.
2. Scrivi nella maniera che hai sempre utilizzato ciascuna delle frazioni egizie riportate al punto “a”.
3. Scopri quali sono le due frazioni del punto “c”, eseguendo l’addizione delle frazioni unitarie che vedi riportate.
4. Considera la frazione $3/4$. Trova due frazioni unitarie che diano come somma proprio $3/4$.
5. Ripeti con le frazioni $2/3$, $4/7$, $5/8$.

I NUMERI DECIMALI E GLI ARABI

Abùl-Hasan Ahmad ibn Ibrahim al-Uqlidisi è autore di un importante libro dal titolo *Capitoli sull’aritmetica indiana*, scritto a Damasco nel 952-53. “Al-Uqlidisi” sta per “l’euclideo” e indica la professione di copista delle opere di Euclide, il famoso ma-

tematico greco. Egli introduce esplicitamente i numeri decimali che di solito da noi europei sono attribuiti al matematico fiammingo Simon Stevin.

[...] Per esempio: vogliamo sommare 135 col suo decimo cinque volte. Ripetiamolo di sotto [...] sarà così 135

135

sommandoli farà 148'5¹⁰. Poi sommiamolo col suo decimo per la seconda volta, trovando ancora il suo decimo. Sarà così 148'5

14 85

sommandoli farà 163'35 cioè centosessantatré più trentacinque di cento¹¹; cioè un quarto e un decimo. Sommiamolo col suo decimo, trovando prima il suo decimo. Poi sommiamoli così 163'35

16 335

se li sommiamo farà 179'685, e davanti al posto delle unità¹² c'è 685 riferito al mille, perché il posto delle unità è il quarto in questo [numero]¹³. Se lo sommiamo col suo decimo una quarta volta farà 197'6535. E quando sommiamo questo col suo decimo farà 217'41885. Riferiamo così che ciò che precede il posto delle unità è 41885 di centomila; così abbiamo sommato 135 col suo stesso decimo cinque volte.

Al-Uqlidisi, *Capitoli sull'aritmetica indiana*, p. 150.

Per interpretare il documento

- Calcolare un decimo di un numero è come dividerlo per 10. Calcola un decimo di:
 - 135
 - 148,5
 - 163,35
 - 179,685
 - 197,6535
- Esegui le addizioni che, nel testo, al-Uqlidisi ha già preparato con i numeri in colonna.
- Addiziona 179'685 con il suo decimo; addiziona 197'6535 con il suo decimo e confronta il tuo risultato con quello che trovi nel testo.
- Scegli tu un numero naturale e ripeti i calcoli di al-Uqlidisi cioè al numero che hai scelto addiziona il suo decimo, addiziona anche a quest'ultimo il suo decimo e così via.

¹⁰ È proprio al-Uqlidisi che suggerisce di porre un segno sopra la cifra delle unità.

¹¹ Cioè 35 centesimi, vale a dire 0,35 oppure 35/100.

¹² Noi diremmo "dopo il posto delle unità": sarà un caso o dipenderà dal fatto che gli Arabi scrivono da destra a sinistra?

¹³ Vedi nota precedente.

5. Calcolare un centesimo di un numero è come dividere per...: scegli un numero naturale e addizionagli il suo centesimo.

I NUMERI DECIMALI IN EUROPA

Simon Stevin è un matematico belga noto in Italia come Stevino. Ha il merito di aver diffuso in Europa i numeri decimali, grazie al suo libretto *La Disme (Il Decimo)* apparso nel 1585 in lingua francese.



Simon Stevin
(1548-1620)

Definizione II. Ogni numero intero proposto si dice *Inizio*, il suo segno è il seguente ①. *Spiegazione.* Per esempio ogni numero proposto di tre cento sessanta quattro, lo chiamiamo tre cento sessanta quattro *Inizi*, li descriviamo in tal modo 364①. E così tutti gli altri simili.

Definizione III. E ciascuna decima parte dell'unità di inizio la chiamiamo *Primo*, il suo segno è ① e la decima parte dell'unità di primo la chiamiamo *Secondo*, il suo segno è ②. E così ciascuna decima parte degli altri, dell'unità del suo segno precedente, sempre nell'ordine uno di vantaggio.

Spiegazione. Come 3① 7② 5③ 9④, cioè 3 Primi, 7 Secondi, 5 Terzi, 9 Quarti¹⁴, e così si potrebbe procedere all'infinito. Ma per dire del loro valore, è ben noto, che secondo questa definizione, i detti numeri sono $\frac{3}{10} \frac{7}{100} \frac{5}{1000} \frac{9}{10000}$, insieme $\frac{3759}{10000}$. Similmente $8① 9② 3③ 7④$ valgono $8 \frac{9}{10} \frac{3}{100} \frac{7}{1000}$, insieme $8 \frac{937}{1000}$. E così altri simili. È anche necessario sapere che nel *Decimo* non usiamo alcun numero rotto¹⁵ e anche che il numerodi moltitudine dei segni, eccettuato ①, non supera mai il 9. Per esempio non scriviamo 7① 12②, ma al loro posto 8① 2②, poiché essi valgono altrettanto.

Simon Stevin, *La Disme*, parte I.

Per interpretare il documento

1. Scrivi $\frac{3759}{10000}$ alla maniera di Stevino e poi scrivilo come numero con virgola alla tua solita maniera.
2. Come indica Stevino il numero 8,937?

¹⁴ Cioè 3 decimi, 7 centesimi ecc., vale a dire 0,3, 0,07 ecc.

¹⁵ Cioè frazione.

3. Mostra come 0,3759 può essere ottenuto addizionando frazioni con denominatore 10, 100, 1 000, 10 000.
4. Completa l'uguaglianza seguente, inserendo numeri che non superino il 9:
$$\frac{7}{10} + \frac{12}{100} = \dots \frac{}{10} + \dots \frac{}{100}$$
5. Scrivi il numero 5,678:
 - a. alla maniera di Stevino;
 - b. utilizzando frazioni con denominatore 10, 100, 1 000.
6. In viaggio con la macchina del tempo. Sei arrivato in un'epoca precedente ai periodi in cui sono vissuti al-Uqlidisi e Stevino. Nessuno sa usare i numeri decimali, ma tu li conosci bene. Incontri un mercante che di sicuro troverebbe molto comodo usarli per il suo lavoro ed è quindi davvero interessato a conoscerli: come faresti a spiegarglieli?

Il triangolo aritmetico

In Italia è chiamato *triangolo di Tartaglia*; all'estero, più frequentemente, *triangolo di Pascal* ma...

CINESI, ARABI, EUROPEI...

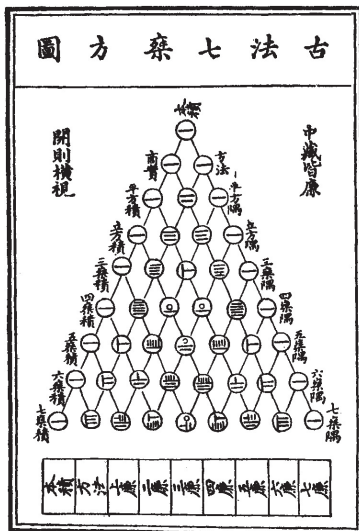
È davvero sorprendente come il triangolo aritmetico si sia ripresentato in momenti storici e in luoghi tanto diversi: nell'opera di Ahmad al-Ab'darī ibn Mun'im, un matematico vissuto a Marrakech intorno al 1200; in un codice vaticano, forse del XIII secolo; nell'opera di Chu Shih-Chieh *Ssu Yuan Yii Chien* (1303); per la prima volta in un volume a stampa, nel testo di aritmetica di Pietro Apiano (Ingolstadt, 1527); successivamente, nel *General Trattato* (1556), Niccolò Tartaglia ha rivendicato la paternità del triangolo per quanto riguarda le prime undici potenze del binomio; Blaise Pascal ne ha parlato diffusamente nel suo *Traité du triangle arithmétique* (pubblicato postumo nel 1665).



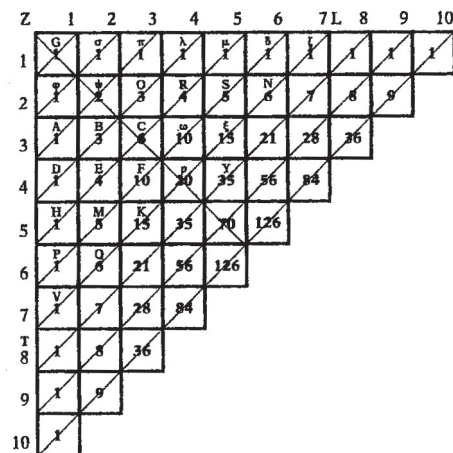
Niccolò Tartaglia
(1500-1557)



Blaise Pascal
(1623-1662)



Il triangolo aritmetico come appare nell'opera di Chu Shih-Chieh *Ssu Yuan Yii Chien* (1303).



Il triangolo aritmetico come appare nell'opera di Blaise Pascal *Traité du triangle arithmétique* (1654).

Il triangolo aritmetico da un'opera di Ahmad al-Ab'darī ibn Mun'im (1200 d.C. circa).



Frontespizio dell'opera di Pietro Apianus sull'aritmetica (1527).

Per interpretare il documento

1. Dal confronto delle diverse rappresentazioni del triangolo aritmetico, ricava come Ahmad al-Ab'darī ibn Mun'im scrive le cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 (rifletti inoltre sul fatto che è del 1202 la pubblicazione del *Liber abbaci* di Leonardo Pisano al quale viene riconosciuto il merito della diffusione in Europa del sistema di numerazione indo-arabico).
2. Ricava informazioni sulla numerazione cinese (scrivi almeno i primi dieci numeri naturali...).

Fai le tue ipotesi

1. Per quali motivi lo stesso oggetto matematico si sarà ripresentato in momenti storici e in luoghi tanto diversi?

Problemi curiosi

In molti trattati d'abaco, i problemi mercantili si trovano alternati a problemi curiosi, vale a dire esercizi di aritmetica o di logica che gli autori riportavano, come afferma F. Ghaligai¹⁶, per “le sere di verno, quando si sta al fuoco, e mancano e' ragionamenti acciocché si abbi a ragionare di qualche cosa”. Alcuni di questi problemi sono da considerarsi dei “classici” che, con molte varianti, compaiono in tutti i libri antichi più importanti. Osserviamo che spesso non sono necessari calcoli per la risoluzione, ma solo abilità nell'organizzare il ragionamento.

Ai problemi che riguardano le principali attività mercantili e le usanze nella conduzione degli affari, erano dedicate molte pagine in ogni trattato d'abaco. Tali attività erano principalmente le seguenti: i baratti, le compagnie, i cambi di monete ed unità di misura, i prestiti di denaro, l'analisi della composizione delle leghe metalliche per il conio delle monete. Spesso i problemi in questione si risolvono facendo ricorso alle proporzioni, ma essi sono complicati dall'uso di diversi sistemi monetari e di unità di misura. Riportiamo alcuni esempi particolarmente significativi, scelti da opere diverse.

RISOLVIAMO ASSIEME

Cinque fiorini d'oro e 7 tornesi¹⁷ vagliono 91 tornese meno uno fiorino d'oro; per 100 fiorini d'oro quanti tornesi averò io?

Fa chosì. Poni sopra¹⁸ 5 fiorini d'oro uno fiorino d'oro, ch'è ttu di meno, eccho 6 fiorini d'oro; e trai 7 tornesi, ch'è di più, di 91 tornese, rimane 84 tornesi. Ora di' chosie: ogni 6 fiorini d'oro vagliono 84 tornesi, che varanno gli 100 fiorini d'oro? Multipricha 100 via¹⁹ 84 tornesi e parte²⁰ in 6, viene 1400 tornesi. Abbiamo che 100 fiorini d'oro varanno 1400 tornesi, a ragione che 5 fiorini d'oro e 7 tornesi vagliono 91 tornese meno uno fiorino d'oro. Ed è fatta, così fae le simili.

Anonimo Lucchese, *Aritmetica*, L-LI.

¹⁶ Francesco Ghaligai è autore di una *Pratica d'Aritmetica*, pubblicata a Firenze nel 1552.

¹⁷ Il *tornese*, moneta coniata per la prima volta a Tours, in Francia (da cui il nome), corrispondeva a 20 soldi.

¹⁸ Addiziona.

¹⁹ Per.

²⁰ Dividi.

Per interpretare il documento

1. Accanto all'uguaglianza che segue, scrivi la frase corrispondente tratta dal documento dell'Anonimo Lucchese:

$$5f+7t=91t-1f$$

2. Addiziona a entrambi i membri o sottrai o moltiplica o dividi per trasformare l'uguaglianza (*), utilizzando le indicazioni contenute nel documento:

$$(*)5f+7t=91t-1f$$

Poni sopra [...] uno fiorino d'oro... ottieni _____

tra i 7 tornesi... ottieni _____

Multipricha 100 via 84 tornesi e parte in 6... ottieni _____

3. Per una parte della soluzione illustrata dall'autore del problema si può anche impostare una proporzione. Scrivila e risolvi per rispondere alla domanda seguente:

6 fiorini vagliono 84 tornesi, che varanno gli 100 fiorini d'oro?

4. Rifletti: le lettere nella precedente uguaglianza $5f+7t=91t-1f$ non sono delle incognite, cosa rappresentano in realtà?

Un signore à un suo fante e mandalo nel giardino per 7 mele e dice: tu troverai 3 portinai che ciaschuno ti dirà: io voglio la metà di tutte e due più di quelle che tti rimangono dopo la divixione. Adomando quante che ne cholxe di prima volendo che ne gli rimanexxe sette.

Paolo dell'Abbaco, *Trattato d'Aritmetica*, 47.

Per interpretare il documento

1. Rileggi il problema per trovare i dati che permettano di risolverlo e rispondi alle domande seguenti:

- il signore quante mele desidera che il suo fante gli porti? _____
- quanti portinai troverà il fante? _____
- ciascun portinaio, oltre alla metà di tutte le mele, quante altre ne vuole? _____

2. Risolvi il problema trovando il numero delle mele che il fante ha dovuto cogliere perché gliene rimanessero sette dopo essere passato da tutti i portinai.

Ecco la soluzione scritta da Paolo dell'Abbaco.

Fà chosì e di': se questo fante vuole che ne gli rimanga 7, all'ultima porta quante chonviene che n'abbi? Chonviene che n'abbi 18. E poi di': se gli vuole che glene rimangha 18 alla seconda, chonviene che n'abbia 40; e poi se egli vuole che glene rimangha 40 alla terza porta chonviene che egli n'abbi 84. Ed ai falichato 3 porti e, muovendosi da prima chon 84, negli rimanghono 7. Ed è fatta.

Paolo dell'Abbaco, *Trattato d'Aritmetica*, 47.

Per interpretare il documento

1. Risolviamo assieme. Trascrivi il testo del problema e della soluzione come li vorrebbe l'insegnante di lettere cioè eliminando gli... errori di ortografia (che però non sono tutti errori ma - l'hai capito - dipendono dal fatto che Paolo dell'Abbaco ha scritto la sua opera alcuni secoli fa).
2. Ecco dei calcoli utili per risolvere il problema:
 - $(7+2) \cdot 2 = 18$ mele che si devono avere all'ultima porta
 - $(18+2) \cdot 2 = 40$ mele che si devono avere alla porta di mezzo
 - $(40+2) \cdot 2 = 84$ mele che si devono avere alla prima porta
 Prova a compattare i tre precedenti calcoli in un'unica espressione.
3. Risolvi lo stesso quesito precedente con la seguente modifica: "ciascun portinaio vuole metà delle mele più mezza mela. Il tutto senza dover mai tagliare nessuna mela."
4. Prova ad inventare e a risolvere un problema simile ai due precedenti sulle mele.

Due huomini fanno un viaggio. Il primo uomo vae ongnindi 30 migla, il sechondo uomo vae il primo di' due miglia, e il sechondo di va 4, e 'l terzo di' 6 e choxì cresce ongnindi 2 migla. Adomando in quanto tempo l'arà raggiunto. Fa choxì. [...]

Paolo dell'Abbaco, *Trattato d'Aritmetica*, 118.

Per interpretare il documento

1. Al termine del primo giorno, quante miglia di vantaggio ha il primo uomo?
2. Dopo due giorni, quante miglia ha percorso il primo uomo? quante il secondo? Chi si trova in vantaggio? di quante miglia?
3. Dopo tre giorni, dopo 10, 20, 30 com'è la situazione (cerca una strategia per abbreviare i calcoli)?
4. Riporta i dati precedenti nella tabella:

Tempo (giorni)						
Distanza percorsa dal primo uomo (miglia)						
Distanza percorsa dal secondo uomo (miglia)						

5. In un riferimento cartesiano indica sull'asse delle ascisse il tempo e su quello delle ordinate le distanze percorse. Riporta i dati che riguardano entrambi gli uomini e traccia i due grafici.

Ecco la soluzione (un po'... misteriosa) proposta da Paolo dell'Abbaco.

Parti 30 in 2, ne viene 15, e poi radoppia, fa 30. e poi trai uno, restano 29; e in 29 di' l'arà raggiunto. Ed è fatta.

Paolo dell'Abbaco, *Trattato d'Aritmetica*, 118.

Per interpretare il documento

1. Interpreta la soluzione di Paolo dell'Abbaco utilizzando il calcolo letterale e ricordando che la somma dei primi n numeri naturali è uguale a $n \cdot (n+1) : 2$.
2. Come andrebbe cambiata la soluzione proposta da Paolo dell'Abbaco se il secondo uomo facesse il primo giorno 3 miglia, il secondo 6, il terzo 9 e così via?

Egli è uno che trae 3 dadi in su una tavola et a caso trae 6 e 5 e 3 e tu vuoi sapere per regola di numeri quello che egli ha trato²¹. Farai in questo modo. Digli che radopi e' numeri d'uno de' dadi, pongo che sia quello del 6 che raddoppiato fa 12, ponvi su 5 fa 17 et questo m[u]ltipricha per 5, fa 85 et in su questo poni 10, fa 95 et in su questo poni el numero d'uno degli altri dadi, che pongo sia el 5, che fa 100 et questo multipricha per 10, che fa 1000 et in su questo poni el numero del terzo dado, cioè 3 che fa 1003. Et di questo trai tacitamente 350, resta 653 e tu dirai: per 6 centinaia fu 6 el primo dado et per 5 decine fu 5 el secondo dado et per 3 numeri fu 3 el terzo dado. Et così diremo che trasse 6 et 5 et 3 come vedi.

Filippo Calandri, *Aritmetica*, LXXX.

Per interpretare il documento

1. Il procedimento, a prima vista “magico”, proposto dall'autore, si basa in realtà su opportune operazioni con tre numeri generici. Indica con x , y e z proprio i tre numeri (che non saranno necessariamente 6, 5 e 3) e traduci il procedimento descritto nel testo con un'espressione algebrica.
2. Semplificala: otterrai $100x+10y+z$. Esaminiamo quest'ultima espressione (ricorda che x , y , z rappresentano i punteggi ottenuti lanciando un dado e sono quindi numeri di una cifra):

²¹ Devi immaginare di non conoscere i tre punteggi: grazie al calcolo si potrà scoprirli.

- a. prendi i valori che Filippo Calandri ha utilizzato, vale a dire 6, 5, 3 e sostituisce rispettivamente a x , y , z .
 - b. esegui le moltiplicazioni e le addizioni.
 - c. osserva le cifre del risultato che sono proprio quelle ottenute nel lancio dei tre dadi.
3. Fai il gioco con un amico: digli di pensare tre numeri naturali di una cifra, fagli fare i calcoli e scopri i tre numeri.

ALTRI PROBLEMI: IL TESTO

1.

Una nave à tre vele in tal lhuogo che²² alzando la prima vela farebbe un viaggio²³ in 10 di²⁴ et alzando la seconda farebbe il viaggio in 12 di' et alzando la terza farebbe il viaggio in 15 di'. Adimandasi²⁵ alzandole tutte e tre a un tratto²⁶ in quanti di' farebbe quello viaggio.

Pier Maria Calandri, *Tractato d'Abbacho*, c. 88r.

2.

Due compani²⁷ si partono di²⁸ Siena per il viaggio di S. Jacomo [...] e giunti che furno si trovarono senza denari e avevano per obrigo²⁹ stare 7 giorni et si trovavano [ad avere] 3 tazze d'argento che fra tutte 3 pessavano 7 omcie³⁰: la prima pessa 1 omcia, la 2a pessa 2 omnce, la 3a pessa 4 omce e l'oste non si fida de pelegriani, né pelegriani de l'oste, e omgni giorno gli danno omce una d'argento e non ropeno³¹ mai dette tazze; adomando come facieno³² el pagamento che l'oste fusse pagato a una omcia el di'.

Dionigi Gori, *Libro di Arimeticha*, c. 71r. e v..

²² “in tal lhuogo che”: in modo che (alzandole una per volta).

²³ Viaggio.

²⁴ Giorni.

²⁵ “Adimandasi”: si domanda.

²⁶ “a un tratto”: contemporaneamente.

²⁷ Compagni.

²⁸ Da.

²⁹ “per obrigo”: per obbligo, dovevano.

³⁰ Once (l'oncia è un'antica unità di misura del peso).

³¹ Rompono.

³² Fanno.

3.

Tre belle done con 3 loro maritti molti gelossi, volendo passare el fiume in una barcha, che non passa si no 2 per volta³³, e nisuno³⁴ di questi maritti fida la sua dona all'atro³⁵ maritto, essendo di bissomgnio³⁶ passare el fiume, si dimanda senza fidarsi l'uno maritto dell'atro, come facieno al passarlo:...

Dionigi Gori, *Libro di Arimeticha*, c. 71r. e v.

4.

Una torre è alta bracia³⁷ 50, uno serpente ci sale su omgni di' 1/3 di bracio e la notte scende 1/4 di bracio, si dimanda in quanti di' vi sarà su...

Dionigi Gori, *Libro di Arimeticha*, c. 73r.

5.

Tre fratelli devono partire ugualmente³⁸ tra di loro botte 21³⁹, 7 piene, 7 mezze e 7 vacante⁴⁰ e devono havere tanto vino per uno e tante botte per uno senza muovere il vino, si domanda come lo spartiranno.

Domenico Griminelli, *Novissima Pratica d'Aritmetica mercantile*, p. 429.

ALTRI PROBLEMI: LE SOLUZIONI

1.

Faremo positione⁴¹ ch'elie facessimo quello viaggio in 60 di'; la prima che in 10 di' fa il viaggio, in 60 di' farà 6 volte et la seconda, che in 12 di' fa il viaggio, in 60 di' lo farebbe 5 volte et la terza, che in 15 di' fa il viaggio, in 60 di' lo farebbe 4 volte. Che acchozzate⁴² insieme tra tutte quante arebbono⁴³ fatto il viaggio 6, 5, 4 che sono 15 volte et noi vogliamo che



³³ “che non passa si no 2 per volta”: che trasporta fino a due persone per volta.

³⁴ Nessuno.

³⁵ “fida la sua dona all'atro”: è disposto a lasciare la propria donna con un altro.

³⁶ “di bissomgnio”: il bisogno di, la necessità di.

³⁷ Braccia (unità di misura della lunghezza).

³⁸ “partire ugualmente”: dividere in parti uguali.

³⁹ “botte 21”: 21 botti, recipienti.

⁴⁰ Vuote.

⁴¹ “Faremo positione”: supporremo.

⁴² Addizionate.

⁴³ Avrebbero.

facci una; dove multipricha 60 via 1⁴⁴, fanno 60 et questo dividi in 15, vienne 4. Et in tantidi' dirai ch'elle facessino il sopradetto viaggio, e così in tutte e' simiglianti a questa⁴⁵.

Pier Maria Calandri, *Tractato d'Abbacho*, c. 88r.

2.

Cossì fecero: la prima sera lo pagorno⁴⁶ con quella di una omcia, la 2^a sera derno⁴⁷ quella di 2 omce e si feceno rendere quella di una oncia, la 3^a sera gli ridano quella di una omcia, la 4^a sera gli dano quella di 4 omce e si fano dare ristiuire⁴⁸ le 2 datte, una di una omcia e l'atra di 2 omce: la 5^a sera lasorno⁴⁹ quella di una omcia, la 6^a sera se lla fecero rendere e gli derno quella di 2 omce, la 7^a sera gli derno la terza tazza di una omcia e fu finito el tempo e le tazze e si messero⁵⁰ in cammino senza tazze e senza denari[...]

Dionigi Gori, *Libro di Arimeticha*, c. 71r. e v..

3.

... prima passò una moglie e uno marito, el marito rimena⁵¹ la barcha e lassa la moglie, poi passorno le due mogli e resta el marito⁵², come sonno passate una di quelle done rimena la barcha e resta dal suo marito, e lli due maritti che anno già le mogli passatte passano dalle loro mogli, e rimena in qua la barca una moglie e ritorna coll'atra moglie, e quella che rimenò la barcha resta e l'atra ritornò per il suo marito e così passorno⁵³ tutti e 3 le mogli e maritti.

Dionigi Gori, *Libro di Arimeticha*, c. 71r. e v..

4.

..farai cossì, cava quello che monta el di'⁵⁴, di 50 resta $49 \frac{2}{3}$ ⁵⁵, ora guarda quanto avanza fra di' e notte, coè dal $\frac{1}{3}$ al $\frac{1}{4}$ si ci è un $\frac{1}{12}$ ⁵⁶ di bracio, che in 12 di' avanza uno bracio e però dirai: omgni bracio vale 12 di', che varranno $49 \frac{2}{3}$: e multiplica 12 via $49 \frac{2}{3}$ fa 596 e in di' 596 sarà montatto el serpente alla torre⁵⁷.

Dionigi Gori, *Libro di Arimeticha*, c. 73r.

⁴⁴ "multipricha 60 via 1": moltiplica 60 per 1.

⁴⁵ "in tutte e' simiglianti a questa": in tutti i casi come questo (viene suggerita una regola generale).

⁴⁶ Pagarono.

⁴⁷ Diedero.

⁴⁸ "si fano dare ristiuire": si fanno restituire.

⁴⁹ Lasciarono.

⁵⁰ Misero.

⁵¹ Riporta.

⁵² "resta el marito": (ognuna) lascia il marito.

⁵³ Passarono.

5.

Per risolvere si dice che al primo ne toccheranno 2 piene, tre mezze e due vacante, al secondo tre piene, una mezza e tre vacanti e al terzo 2 piene, tre mezze e 2 vacanti, e così ogni uno haverà 7 botte, haveranno tanto vino per uno senza toccarlo, cioè 3 botte e mezzo di vino.

Domenico Griminelli, *Novissima Pratica d'Aritmetica mercantile*, p. 429.

⁵⁴ “che monta el di”: che sale durante il giorno.

⁵⁵ $50 - 1/3 = 49 + 1 - 1/3 = 49 + 2/3$.

⁵⁶ $1/3 - 1/4 = 1/12$.

⁵⁷ L'autore commette un errore, poiché si dimentica di aggiungere a 596 un altro giorno, che è quello in cui il serpente percorre il tratto finale.

Numeri “falsi”

I numeri negativi hanno creato disagio ai matematici e nei problemi le soluzioni negative venivano trascurate. Dopo molti ‘alti e bassi’, accettazioni e rifiuti, si è dovuto arrivare ai primi decenni del 1700 perché essi fossero accolti a pieno titolo dalla comunità dei matematici.

NELL'ITALIA DEL 500

Nel 1500, in Italia operavano alcuni matematici importanti: Niccolò Tartaglia, Gerolamo Cardano, Rafael Bombelli,...

Bombelli (1530-1573) era di origine bolognese, ma si sa molto poco della sua vita. Lo ricordiamo per la sua opera *L'Algebra* del 1572, poi ristampata.

Del sommare più, e meno.

Più con più si aggiunge insieme, e fa più. Meno con meno si aggiunge insieme, e fa meno. Più con meno si toglie la minor quantità dalla maggiore, e quello che resta, è della natura della maggiore (come. Se si sommarà più 10 con più 6,) fa più 16, & è, come a dire; Io mi trovo 10 scudi in vna mano, e 6 nell'altra, che insieme faranno 16 meno 10, con m. 20 fa meno 30, & è (come se io mi trouassi debitore di vno scudi 20, e di vn'altro 10.) Io hauerei in tutto debito scudi 30, & a sommar più 16, con m. 8, è come, se io hauessi scudi 16, e ne hauessi debito 8, che pagato il debito mi restarebbono scudi 8. E p. 15 con m. 20 fa m. 5. perche se io mi trouassi scudi 15, e ne fossi debitore 20, pagati li 15 restarei debitore 5, e si sono posti questi esempi tanto facili per chiarezza di vn principiante, e questo basta quanto al sommare.

Rafael Bombelli, *L'Algebra*, 1579.

Per interpretare il documento

1. Trascrivi il brano di Bombelli usando parole della lingua italiana moderna (osserva anzitutto che la lettera 's' e la lettera 'v' sono scritte in modo... strano: la prima sembra una 'f' e la seconda è una 'u'; inoltre non fare troppo caso alla punteggiatura).
2. Cerca nel brano gli esempi di addizione di numeri interi e scrivilo sotto forma di piccole espressioni.
3. Con parole tue, fai una sintesi del brano collegandoti anche con quanto avevi già imparato in matematica.

Più via più fà più.
Meno via meno fà più.
Più via meno fà meno.
Meno via più fà meno.

Più 8 via più 8, fà più 64.
Meno 5 via meno 6 fà più 30.
Meno 4 via più 5 fà meno 20.
Più 5 via meno 4 fà meno 20.

Rafael Bombelli, *L'Algebra*, p. 70

Per interpretare il documento

1. Bombelli parla di moltiplicazione... Trascrivi questo brano cambiando i termini che non ritieni chiari e inventa degli esempi per ognuna delle quattro affermazioni (già che ci sei, fai finta di essere l'insegnante di italiano e sottolinea gli 'errori di ortografia', visto che al giorno d'oggi "su qui, qua, fa l'accento...").

**UNA DONNA
ALLE PRESE CON LA MATEMATICA**

Ancora Cartesio chiamava "false" le soluzioni negative di un'equazione... Come si diceva sopra, il concetto di quantità negativa è stato accettato dai matematici a partire dall'inizio del 1700. Il testo di Maria Gaetana Agnesi (Milano 1718-1799) è tratto da *Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* del 1748.



M. Gaetana Agnesi
(1718-1799)

2. Ma delle quantità altre sono positive, cioè maggiori del nulla, altre minori del nulla, e però negative. Per cagion d'esempio: I Beni, che si posseggono, sono positivi, ma quelli, che ad altri si debbono, sono negativi, perché dai positivi s'hanno a sottrarre, e ne diminuiscono la somma, e però siccome sono quantità positive i Capitali, che uno abbia, così sono quantità negative i Debiti. Similmente se un Mobile⁵⁸ diretto verso uno scopo, o meta del suo viaggio descriva uno spazio, sarà questo spazio positivo; ma se si porterà verso la opposta parte, descriverà uno spazio, che relativamente alla meta, verso cui doveva andare, sarà negativo. Quindi in Geometria se una linea condotta da una parte si assuma per positiva (il che è arbitrario) sarà negativa la linea condotta verso la parte opposta.

3. Le quantità positive si distinguono in algebra dalle negative per mezzo di certi segni a loro prefissi; alle positive si prefigge il segno +, che dicesi più, alle negative il segno -, che dicesi meno; e quando una quantità, che sia posta sola, o in una serie di altre sia la prima, non abbia prefisso segno alcuno, s'intende sempre affetta da segno positivo.

Maria Gaetana Agnesi, *Istituzioni analitiche*, libro I, cap I.

Per interpretare il documento

1. I “Beni, che si posseggono, sono positivi, ma quelli, che ad altri si debbono, sono negativi”. Spiega con altre parole questa frase.
2. “[...] in Geometria se una linea condotta da una parte si assuma per positiva (il che è arbitrario) sarà negativa la linea condotta verso la parte opposta”. Esaminiamo assieme questa frase. Di solito sui libri si trova:



Ma Agnesi ci ricorda che è arbitrario, cioè si potrebbe fare viceversa, così:



Ricava dal tuo libro di testo e disegna gli assi del piano cartesiano e indica qual è il verso positivo e quale il negativo.

3. Cerca nella parte di teoria del tuo libro di matematica l'introduzione ai numeri negativi e sottolinea gli esempi tratti dalla vita di tutti i giorni o dalle scienze. Fai un confronto con quanto scrive M.G. Agnesi.

⁵⁸ Un corpo che si muove.

Dalle parole ai simboli

L'uomo ha fatto algebra per millenni esprimendo i propri ragionamenti con parole, usando il linguaggio naturale e gli esempi numerici (algebra *retorica*) oppure si è basato sulle figure geometriche, come avevano iniziato a fare i Babilonesi. Poi ha iniziato a scrivere delle abbreviazioni (algebra *sincopata*). Infine ha elaborato un sistema di simboli (algebra *simbolica*). Nello sviluppo dell'algebra, dunque, si possono individuare tre fasi, talvolta sovrapposte.

Quella dei Babilonesi forse non era vera algebra: quando l'uomo ha cominciato a fare autentica algebra, come la intendiamo noi?

UN GRANDE MATEMATICO ARABO

La parola *algebra* deriva dal titolo dell'opera *Al-kitab al muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-mugabale* del matematico arabo, originario dell'Uzbekistan, Mohammed al-Khuwarizmi (nato prima dell'800 - morto dopo l'847). Quest'opera contiene la spiegazione delle regole per risolvere le equazioni di primo e secondo grado. Tuttavia al-Khuwarizmi non usa lettere e simboli: egli illustra le regole servendosi di esempi numerici e... parole.

Capitolo I. Censi⁵⁹ equivalenti a cose⁶⁰.

Il seguente è un esempio di censi equivalenti a cose: un censo è equivalente a 5 cose. La radice del censo allora è 5, e 25 forma il censo che, naturalmente, equivale a cinque cose.

Un altro esempio: la terza parte di un censo equivale a quattro cose. Quindi la radice del censo è 12 e il censo è 144. E similmente, cinque censi equivalenti a dieci cose. Quindi un censo è equivalente a due cose e la radice del censo è 2. Quattro rappresenta il censo.

Allo stesso modo, quindi, quello che coinvolge più di un censo, o è meno di uno, viene ridotto a un censo. Così applichi le stesse operazioni sulle cose che accompagnano i censi.

Al-Khuwarizmi, *Al-kitab al muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-mugabale*.

Per interpretare il documento

1. Trascrivi gli esempi numerici utilizzando il simbolismo moderno.

⁵⁹ *Censo* (traduzione letterale della parola araba *mal*) ha il significato di quadrato dell'incognita.

⁶⁰ *Cosa* sta per incognita o radice.

L'area totale di quest'ultima figura è $39+6,25\cdot 4=64$ e il lato è 8. Ma, con riferimento alla figura in basso a sinistra, $8=x+2,5+2,5$, quindi $x=3$ (osserva che al-Khuwarizmi non ha ottenuto l'altra radice dell'equazione, quella negativa).

Applica ora il metodo grafico di al-Khuwarizmi all'equazione $x^2+8x=20$.

Capitolo V. Censo e numeri equivalenti a cose.

Ho diviso dieci in due parti, poi ho moltiplicato ogni parte per se stessa ed [ho] preso la somma delle due, che fa cinquantotto dirham⁶¹.

Poni una delle due parti [uguale a] una cosa e l'altra [uguale a] dieci meno una cosa. Moltiplica dieci meno una cosa per se stesso, fa cento più un censo meno 20 cose, poi [moltiplica] una cosa per una cosa, fa un censo. Poi addiziona entrambi [i prodotti], fa cento più due censi meno 20 cose, [il tutto] equivalente a cinquantotto dirham. Restauro⁶² il cento più due censi con le 20 cose mancanti e portale ai cinquantotto [dirham], fa allora cento più due censi equivalente a cinquantotto dirham più venti cose. Riporta a un unico censo prendendo la metà di tutto [ciò] che hai. Fa cinquanta dirham più un censo equivalente a ventinove dirham più dieci cose. Diminuiscilo⁶³, cioè sottrai da cinquanta ventinove, rimane ventuno più un censo uguale a dieci cose⁶⁴. Dimezza le cose, fa cinque, e moltiplicalo per se stesso, fa venticinque. Sottrai da questo il ventuno legato al censo, rimane quattro. Prendi la sua radice che fa due e sottrai questo dalla metà delle cose, cioè cinque. Rimane tre che è una delle due parti e l'altra è sette. Questo problema ti ha riferito uno dei sei casi, cioè censi più numero equivalente a cose.

Al-Khuwarizmi, Al-kitab al muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-mugabala.

Per interpretare il documento

1. Scrivi l'equazione che puoi ricavare dalle prime due righe del documento usando simboli moderni.
2. Risolvi l'equazione seguendo il ragionamento di al-Khuwarizmi ma utilizzando i simboli moderni.
3. "Dimezza le cose": le "cose" sono 10, quindi dimezza e ottieni 5... esegui anche le successive operazioni indicate da al-Khuwarizmi e confronta questi calcoli con l'applicazione della formula risolutiva per le equazioni di secondo grado (se non la conosci già, cerca sul tuo libro di testo la cosiddetta "formula ridotta").

⁶¹ Dirham è il nome di una moneta. Possiamo vedere queste prime righe come il testo del problema (domanda esclusa).

⁶² Restaurare indica il trasportare "dall'altra parte dell'uguale".

⁶³ Il verbo *qabala* è stato qui tradotto con "diminuire".

⁶⁴ Al-Khuwarizmi ha così ridotto l'equazione alla forma "censi più numeri equivalenti a cose".

Capitolo VI. Cose e numeri equivalenti a censo

[...]

Al-Khuwarizmi, *Al-kitab al muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-mugabale*.**Per interpretare il documento**

1. Scrivi esempi di equazioni del tipo di cui tratta il capitolo VI.

DIOFANTO, UNO CHE HA LASCIATO IL SEGNO

Prova a immaginare di dovere, d'ora in poi, proseguire i tuoi studi matematici senza poter utilizzare simboli (lettere, segni di operazione ecc.)...

Nella storia della matematica per arrivare ai simboli che usiamo noi oggi, si è dovuto attendere fino al 1600. Prima, i diversi matematici ricorrevano tutt'al più ad abbreviazioni come "R.q." per "radice quadrata", "m." per "meno"... (algebra *sincopata*). Come mai l'idea del simbolismo avrà tardato tanto ad affermarsi? Qualche storico dice perché non se ne sentiva la necessità in quanto nei ragionamenti si usavano le figure (vedi al-Khuwarizmi) come facevano i Greci e, ancor prima, i Babilonesi. Come spesso accade, però, qualche eccezione c'è stata. La più nota è quella di Diofanto di Alessandria (III sec. d.C.). Nello scritto tratto dall'*Aritmetica* che qui presentiamo, ha illustrato un sistema di simboli, che peraltro non ha più usato nel resto della sua opera.

[...] si chiama potenza il quadrato e il suo contrassegno distintivo è Δ avente come indice γ ; cioè la potenza è Δ^γ . Si chiama cubo [quello che risulta dalla moltiplicazione di un quadrato per la sua propria radice] ed il suo contrassegno distintivo è un K avente come indice γ ; cioè il cubo è K^γ . Si chiama biquadrato quello che risulta da un quadrato moltiplicato per se stesso, e il suo contrassegno distintivo è due delta aventi come indice γ ; cioè il biquadrato è $\Delta^\gamma\Delta$. Si chiama quadrato-cubo quello che risulta da un quadrato moltiplicato per un cubo avente la stessa radice del quadrato, e il suo contrassegno distintivo è Δ^γ avente come indice γ ; cioè il quadrato-cubo è ΔK^γ . Si chiama cubo-cubo quello che risulta dal cubo moltiplicato per se stesso, e il suo contrassegno distintivo è due cappa aventi come indice γ ; cioè il cubo-cubo è $K^\gamma K$. Infine il numero che non possiede alcuna delle particolarità precedenti, ma che possiede in sé una indeterminata quantità di unità, si chiama l'arithmos, e il suo contrassegno distintivo è ς . C'è ancora un altro contrassegno distintivo per l'invariante dei numeri determinati, cioè per l'unità e questo contrassegno è M avente come indice o [...].

Diofanto, *Aritmetica*, libro I, Introduzione.

Per interpretare il documento

1. Traduci in termini moderni le scritture simboliche che appaiono nel brano.
2. Si può affermare che Diofanto nel realizzare il suo simbolismo abbia in mente la proprietà espressa dall'uguaglianza $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$: in che senso ciò è vero?

Fai le tue ipotesi

1. Perché Diofanto pone l'apice γ ?
2. Quali vantaggi dal punto di vista dell'esposizione matematica e del calcolo avrebbe prodotto questa notazione simbolica?

TUTTE EQUAZIONI

Una carrellata di algebra sincopata: abbreviazioni e simboli diversi nei diversi Autori.

Trouame. 1.n°. che gioto al suo qdrat° faccia .12.

1 □ e 32 c° - 320 numeri.

Qdratu aeqtur 4 rebus p: 32.

1 ◇ P6 ρ P9 [1 ◇ P3 ρ P24 ·

Luca Pacioli (1494)

Francesco Ghaligai (1521)

Girolamo Cardano (1545)

J. Buteo (1559)

Per interpretare il documento

1. Facilissimo! Associa ad ognuna delle equazioni precedenti la propria traduzione in simboli moderni, vale a dire, non in ordine:

$$x^2=4x+32 \quad x^2+32x=320 \quad x+x^2=12 \quad x^2+6x+9=x^2+3x+24.$$

2. Risolvi le equazioni precedenti.

UNA "RICETTA" PER RISOLVERE UN'EQUAZIONE

Fra' Luca Pacioli (1445-1517) nacque a Borgo San Sepolcro, oggi Sansepolcro (Arezzo). A Milano conobbe Leonardo da Vinci per il quale tradusse in italiano alcune parti degli *Elementi* di Euclide e il quale per lui disegnò alcuni poliedri che apparvero nell'opera *De divina proporzione*. La sua opera principale è la *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalità*.



Fra' Luca Pacioli
(1445-1517)

Trouame 1.numero. che multiplicato per .5. faccia quanto el suo quadrato gionto con .4. Poni ch'l sia .1. co.⁶⁵ El suo quadrato e ne .1. ce.⁶⁶ Giontoci .4. sira eguale a .5. via⁶⁷ .1. co. Cioe .1. ce. p .4. se ugualiano a .5. co. Smezza le cose. Multiplica in se. Leuane el numero. Restara .2 1/4. e la R.2 1/4.p.2 1/2 . per lo dimezamento de le cose valse la cosa. E foel domandato numero: cioe .4.

Luca Pacioli, *Summa*, p. 145.

Per interpretare il documento

1. Dalla prima frase del documento di Pacioli ricava un'equazione scrivendola nel tuo modo usuale.
2. Quanto hai scritto al punto precedente confrontalo con le successive indicazioni di Pacioli ("Poni [...] a .5. co.").
3. Trova le radici dell'equazione che hai scritto utilizzando la cosiddetta "formula ridotta" (utilizzala anche se il coefficiente del termine di primo grado non è pari!).
4. Esegui le varie operazioni suggerite da Pacioli ("Smezza [...] cioe .4.") e confrontale con i calcoli fatti al punto precedente.

Fai le tue ipotesi

1. Ricerca nelle pagine precedenti (negli altri documenti di questa parte e in *Numeri "falsi"*) i possibili motivi per i quali Pacioli trascura una delle due radici dell'equazione.

LA SCIENZA DEL CALCOLO LETTERALE

Gli storici della matematica considerano il 1591 come data d'inizio dell'algebra *simbolica*. In quell'anno, infatti, comparve il trattato del francese François Viète nel quale i ragionamenti non venivano più fatti solamente ricorrendo a casi numerici (come in al-Khuwarizmi, ad esempio) ma utilizzando lettere. La sua opera è in parte ispirata a Diofanto e di ciò si può avere una conferma nel primo, brevissimo documento.



François Viète
(1540-1603)

$1QC-15QQ+85C-225Q+274N \text{ aequatur } 120.$

François Viète (c. 1590)

⁶⁵ "Co." sta per "cosa" (vedi il precedente brano di al-Khuwarizmi).

⁶⁶ "Ce." sta per "censo".

⁶⁷ "Via" indica la moltiplicazione.

Per interpretare il documento

1. Trascrivi in simboli moderni la precedente equazione.

[...] si distingueranno le grandezze date dalle grandezze incognite cercate, rappresentandole mediante un simbolo costante, invariabile e ben chiaro, per esempio designando le grandezze cercate mediante la lettera A o mediante ogni altra vocale E, I, O, U, Y, e le grandezze date mediante le lettere B, G, D o mediante le altre consonanti.

François Viète, *In artem analyticon isagoge*, cap. V.

Per interpretare il documento

1. “Grandezze cercate” e “grandezze date” (parametri): ricerca nella tua esperienza alcuni esempi delle une e delle altre e rifletti sul diverso uso delle lettere nei testi moderni e in Viète.
2. Al-Khuwarizmi e Pacioli illustrano come risolvere un'equazione facendo riferimento a specifici esempi numerici. In che modo il contributo di Viète avrebbe consentito di superare questo limite?

FILOSOFO, FISICO E... MATEMATICO

Nell'opera matematica di René Descartes (1596-1650), italianizzato Cartesio, ci sono testi che è oggi possibile capire senza grosse difficoltà in quanto il simbolismo è del tutto analogo al nostro. Bisogna solo tener presente che l'uguaglianza viene indicata con il simbolo $\propto$.

Il brano che segue contiene argomenti che i libri di testo riportano ancora oggi.



René Descartes
(1596-1650)

[...] se si suppone x uguale a 2, oppure $x-2$ uguale a nulla, e nuovamente $x \propto 3$, o $x-3 \propto 0$, moltiplicando queste due equazioni $x-2 \propto 0$ e $x-3 \propto 0$, l'una per l'altra, si avrà $xx-5x+6 \propto 0$, oppure $xx \propto 5x-6$, che è un'Equazione nella quale la quantità x vale 2 e al tempo stesso vale 3. Se di nuovo si pone $x-4 \propto 0$, e si moltiplica questa somma per $xx-5x+6 \propto 0$, si avrà $x^3-9xx+26x-24 \propto 0$, che è un'altra Equazione nella quale x , avendo tre dimensioni, ha tre valori, che sono 2, 3 e 4.



Ma spesso accade che alcune di queste radici siano false, o men che niente⁶⁸, come se si suppone che x indichi anche il difetto di una quantità, che sia 5, si ha $x+5 \succ 0$, che moltiplicata per $x^3-9xx+26x-24 \succ 0$, fa $x^4-4x^3-19xx+106x-120 \succ 0$, un'equazione nella quale ci sono quattro radici. Cioè tre vere che sono 2, 3, 4 ed una falsa che è 5.

[...]

$$x^4-4x^3-19xx+106x-120 \succ 0$$

può essere divisa per $x-2$, e per $x-3$, e per $x-4$, e per $x+5$; ma non può essere divisa per $x + 0$ - alcun'altra quantità, cosa che mostra che essa non può avere altro che le quattro radici 2, 3, 4 e 5⁶⁹.

René Descartes, *La Géométrie*, libro III.

Per interpretare il documento

1. Esegui le moltiplicazioni indicate nel brano di Cartesio.
2. Utilizzando i binomi presenti nel documento, scrivi la scomposizione in fattori primi di $x^4-4x^3-19xx+106x-120$.
3. Scrivi un'equazione di terzo grado che abbia come radici 1, 2, -3.
4. Scrivine una di quarto grado che abbia, oltre alle precedenti, anche 0 come radice.

Da ciò si vede anche quante radici vere ci possono essere, e quante false in ogni Equazione. Cioè se ne possono⁷⁰ avere tante vere, quanti segni + e - si trovano di volta in volta a essere cambiati, e tante false quante volte si trovano due segni + o due segni - che si susseguono.

Così nell'ultima, poiché dopo $+x^4$ c'è $-4x^3$, che è un cambiamento del segno + in -, e dopo $-19xx$ c'è $+106x$, e dopo $+106x$ c'è -120 , che sono ancora altri due cambiamenti, si vede che ci sono tre radici vere, e poiché i due segni - di $4x^3$ e $19xx$ si susseguono, una falsa.

[...] se al posto di

$$x^4-4x^3-19xx+106x-120 \succ 0$$

si scrive

$$x^4+4x^3-19xx-106x-120 \succ 0$$

si ha un'Equazione nella quale non c'è che una radice vera, che è 5, e tre false che sono 2, 3 e 4.

René Descartes, *La Géométrie*, libro III.

Per interpretare il documento

1. Riprendi le equazioni che trovi nella parte finale del documento: quante radici "vere" e quante "false" ha la prima? e la seconda?
2. Rifacendoti a quanto detto da Cartesio, spiega come si fa a stabilire quante radici positive e quante negative può avere un'equazione.

⁶⁸ Vale a dire negative.

⁶⁹ Considerandone il valore assoluto.

⁷⁰ Cartesio dice "ve ne possono essere": qualche radice potrebbe essere immaginaria... (vedi in questo capitolo la parte sul numero i).

3. Utilizza le osservazioni di Cartesio per stabilire quante radici “vere” e quante “false” può avere l'equazione $x^3 - 10x^2 + x + 120 = 0$.
4. Confronta il simbolismo di Viète con quello di Cartesio, dopo aver osservato la data di pubblicazione dell'opera di Viète e il periodo nel quale è vissuto Cartesio...

Problemi ed equazioni

Questa parte comprende esercizi, che possono essere risolti anche senza impostare un'equazione, e problemi più articolati che richiedono la rilettura ed un impegno maggiore per la comprensione del testo.

PROBLEMI DI PRIMO E SECONDO GRADO

Problema I

Trovisi un numero che gionto con 40 faccia 100.

Problema II

Faccisi di 80 due parti che l'una sia 20 più dell'altra.

[...] la minor parte sarà 30 e la maggiore sarà 50 [...]

Problema III

Trovisi un numero che cavato di⁷¹ 10 resti due.

Problema IIII

Trovisi un numero che moltiplicato per 8 faccia 32.

Problema V

Trovisi un numero che partito per⁷² 6 ne venga 8.

Problema VI

Trovisi un numero che moltiplicato per 6 et al prodotto gionto 8 faccia 48.

[...] $6\frac{2}{3}$ ⁷³, e questo è il numero che si addomanda e si vede che la sua regola è cavare l'8 di 48 e lo restante partire per 6.

Rafael Bombelli, *L'Algebra*.

Un numero più il suo settimo dà come risultato 19. Qual è quel numero?

Un numero più i suoi $\frac{2}{3}$, più la sua metà, più il suo settimo dà come risultato 33.

Qualè il numero?

Ahmes, Scriba del XVII sec. a.C., *Papiro Rhind*.

⁷¹ “Cavato di”: tolto da.

⁷² “Partito per”: diviso per.

⁷³ “ $6\frac{2}{3}$ ” è $6 + \frac{2}{3}$.

2. Problema del viandante

Un uomo camminando per una strada vide altri viandanti e disse loro: “Vorrei che voi foste altrettanti quanti siete, più un quarto della somma che risulterebbe, più metà di quest’ultima quantità, allora con me sareste 100”. Dica, chi vuole, quanti erano quelli che da lui furono visti all’inizio.

Quelli che egli vide in principio furono 36 [...]

26. Problema di un campo, della corsa di un cane e della fuga di una lepre

C’è un campo che ha una lunghezza di 150 piedi. Ad un’estremità c’è un cane e all’altra una lepre. Il cane si muove quando la lepre comincia a correre. D’altra parte, quando il cane faceva 9 piedi in un balzo, la lepre ne faceva 7. Dica, chi vuole, quanti piedi, ovvero quanti salti di cane fecero, il cane inseguendo e la lepre fuggendo, finché questa fu presa. [...] 675.

Tanti piedi percorre il cane inseguendo la lepre fino a che non l’afferra con i suoi denti robusti. [...] 525. Tanti piedi percorse la lepre fino a che non fu raggiunta.

44. Problema del saluto di un fanciullo al padre

Un fanciullo salutò il padre: “Ave padre”, disse. A lui il padre: “Sta bene figlio [...]”. Se triplicherai il numero dei tuoi anni raddoppiati, e vi sommerai uno dei miei, vivrai 100 anni. Dica, chi può, quanti anni aveva in quel tempo il fanciullo.

Il fanciullo aveva 16 anni e 6 mesi [...]

Alcuino di York, *Propositiones ad acuendos juvenes*.

Egli è una coppa di 3 pezzi che il coperchio pesa $\frac{1}{5}$ di tutta la coppa et il nappo⁷⁴ pesa il $\frac{1}{6}$ di tutta e ‘l gambo pesa 20 oncie; vo’ sapere quanto pesa tutta la coppa.

[...] ne viene 31 oncie e $\frac{11}{19}$. E tanto peserà tutta la coppa.

Filippo Calandri, *Aritmetica*, LXXX.

567

[...]

Venti persone, uomini e donne, hanno mangiato in una locanda; il conto di un uomo è di 8 ventesimi di lira, quello di una donna è di 7 ventesimi di lira; il conto totale ammonta a 7 lire e 5 ventesimi; si chiede il numero degli uomini e quello delle donne.

[...] 5 uomini e 15 donne.

568

[...]

Venti persone, uomini e donne, si trovano in una locanda; gli uomini spendono 24 fiorini e le donne altrettanto; ciascun uomo spende un fiorino in più di ciascuna donna. Si chiede quanti sono gli uomini e quante le donne.

[...] 8 [...] 12 [...]



⁷⁴ Parte destinata a contenere il liquido.

586

[...]

Un padre lascia ai suoi tre figli 1 600 scudi. Il testamento riporta che il maggiore avrà 200 scudi in più del secondo e che quest'ultimo avrà 100 scudi in più del minore. Si chiede quale sarà la quota spettante a ciascuno.

[...] La parte spettante al minore è di 400 scudi, quella del secondo è di 500 scudi e quella del maggiore è di 700 scudi.

587

[...]

Un padre lascia ai quattro figli 8 600 lire; secondo il testamento, la parte del maggiore dovrà essere doppia di quella del secondo, meno 100 lire; il secondo dovrà ricevere tre volte il terzo, meno 200 lire; il terzo dovrà ricevere quattro volte il quarto, meno 300 lire; si chiede quanto spetta a ciascun figlio.

[...] al minore 300 lire, al terzo figlio 900 lire, al secondo 2.500 lire e al maggiore 4 600 lire.

588

Un uomo lascia 11 000 scudi da suddividere fra la vedova, i due figli e le tre figlie. Vuole che la madre riceva il doppio di ciascun figlio e che ciascun figlio riceva il doppio di ciascuna figlia. Si chiede quanto spetta a ciascuno.

[...] una figlia riceve 1 000 scudi [...]

589

[...]

Un padre indica nel testamento che i figli si dividano i suoi beni come segue: il maggiore 1000 scudi in meno della metà di tutta l'eredità, il secondo 800 scudi in meno della terza parte dei beni e il terzo 600 scudi in meno della quarta parte dei beni. Si chiede a quanto ammonta l'intera eredità e qual è la parte di ciascun erede.

[...] L'eredità è di 28 800 scudi e il maggiore dei figli riceve 13 400 scudi

il secondo	8 800
il minore	<u>6 600</u>
tutti tre assieme	28 800 scudi.

[...]

590

Un padre lascia quattro figli che si suddividono i suoi beni nel modo seguente:

il primo prende la metà dell'eredità, meno 3 000 lire;

il secondo prende un terzo, meno 1 000 lire;

il terzo prende esattamente la quarta parte dei beni;

il quarto prende 600 lire e la quinta parte dei beni.

A quanto ammonta l'eredità e quanto riceve ciascun figlio?

L'eredità era di 12 000 lire [...]

610

[...] cercare due numeri la cui somma sia $=a$ e la differenza $=b$.

Il numero più grande [...] è $= (a+b)/2$; e il più piccolo [...] è $= (a-b)/2$.

612

[...]

Un mulo e un asino portano carichi di qualche quintale. L'asino si lamenta e dice al mulo: Se io portassi un quintale del tuo carico, sarei caricato il doppio di quanto lo sei tu. Il mulo risponde: Sì, ma se tu mi dessi un quintale del tuo, io sarei tre volte più carico di te. Si chiede quanti quintali porta ciascuno.

[...] il mulo porta 2 quintali e $3/5$ e l'asino 2 e $1/5$.

619

[...]

Tre fratelli hanno acquistato una vigna per 100 luigi. Il minore dice che potrà pagarla da solo se il secondo gli darà la metà del denaro che possiede; il secondo dice che se il maggiore gli darà solamente un terzo del suo denaro, potrà pagare la vigna da solo; infine il maggiore non domanda che un quarto del denaro del minore, per pagare da solo la vigna. Quanto denaro ha ciascuno?

[...] il minore ha 64 luigi, il secondo 72 luigi e il maggiore 84.

622

[...]

Un capitano ha tre compagnie di soldati: una di Svizzeri, l'altra di Svevi e la terza di Sassoni. Egli vuole portare un assalto con una parte delle sue truppe e promette una ricompensa di 901 scudi, secondo il criterio seguente:

ciascun soldato della compagnia che andrà all'assalto riceverà uno scudo e il resto del denaro sarà distribuito in modo uguale alle altre due compagnie.

Risulta che se danno l'assalto gli Svizzeri, ciascun soldato delle altre compagnie riceve mezzo scudo; se gli Svevi vanno all'assalto, ciascuno degli altri riceve $1/3$ di scudo; infine se i Sassoni danno l'assalto, ciascuno degli altri riceve $1/4$ di scudo.

Si domanda di quanti uomini è composta ciascuna compagnia.

[...] La compagnia degli Svizzeri è di 265 uomini; quella di Svevi di 583 uomini e quella di Sassoni di 689 uomini.

650

[...]

Un sensale ha acquistato un cavallo per un certo numero di scudi e lo rivende per 119 scudi. Egli guadagna per cento scudi quanto il cavallo gli era costato. Si chiede quanto l'aveva pagato.

[...] il cavallo è costato 70 scudi [...]

Leonhard Euler, *Éléments d'algèbre*, cap. I.

L'epitaffio di Diofanto

Hunc Diophantus habet tumulum qui tempora vitae

Illius mira denotat arte tibi.

Egit sex tantem juvenic; lanugine malas

Vestire hinc coepit parte duodecima.

Septante uxori post haec sociatur, et anno

Formosus quinto nascitur inde puer.

Semissem aetatis postquam attigit ille paternae, Infe-

lix subita morte peremptus obit.

Quator aestater genitor lugere superstes

Cogitur, hinc annos illius assequere.

Questa è la tomba che racchiude Diofanto, meraviglia da contemplare! Essa, per mezzo dell'aritmetica, indica la misura della sua vita. Dio gli concesse la fanciullezza per un sesto della sua vita; dopo un altro dodicesimo la barba coprì le sue guance; dopo un settimo accese la fiaccola nuziale e dopo cinque anni ebbe un figlio. Ahimè! Il misero fanciullo, pur tanto amato, appena raggiunta un'età uguale a metà degli anni della vita del padre, morì. Quattro anni ancora, mitigando il proprio dolore con la scienza dei numeri, visse Diofanto a raggiungere il termine della sua vita.

[Diofanto visse 84 anni.]

Problema VII

Trovinsi due numeri che l'uno sia 2 più dell'altro e aggiunti insieme faccino 20.

[...] il primo numero [...] sarà 9, e l'altro [...] sarà 11 [...]

Problema VIII

Trovinsi due numeri che siano in proportionem l'uno all'altro come 2 a 3 e giunti insieme faccino 25.

[...] il primo numero [...] sarà 10, e il secondo [...] sarà 15 [...]

Problema IX

Trovinsi due numeri che siano in proportionem come 3 a 4 e che moltiplicato il minore per 5 e il maggiore per 2, li prodotti, giunti insieme faccino 46.

[...] il minore [...] sarà 6 e il maggiore [...] sarà 8.

Problema X

Trovinsi due numeri de' quali il maggiore sia quattro volte il minore e che il maggiore sia 21 più del minore.

[...] Il minore [...] sarà 7 e il maggiore [...] sarà 28.

Problema XI

Dividasi 100 in due numeri tali che il terzo dell'uno e il quinto dell'altro giunti insieme faccino 30.

[...] il primo numero [...] sarà 75, e l'altro [...] sarà 25.



Problema XII

Trovinsi dui numeri che l'uno sia 4 più dell'altro e che il quadrato del maggiore sia 32 più del minore.

[...] il minore [...] sarà 2 e il maggiore [...] sarà 6 [...]

Problema XIII

Dividasi 100 in due parti che il quarto del primo superi il sesto del secondo di 18.

[...] $83 \frac{1}{5}$ [...] $16 \frac{4}{5}$ che giunti insieme fanno 100 et il quarto del primo [...].

Problema XXXII

Faccisi di 50 due parti che dell'una cavatone il terzo e dell'altra il quarto li restanti siano eguali.

[...] $26 \frac{8}{17}$ [...] $23 \frac{9}{17}$ [...]

Problema XXVIII

Trovinsi tre numeri che il primo col secondo sia 20, il secondo col terzo sia 30 et il terzo col primo sia 40.

[...] 15 [...] 5 [...] 25 [...]

Problema XXX

Trovinsi quattro numeri tali che il primo, secondo e terzo faccino 20; il secondo, terzo e quarto faccino 22; il terzo, quarto e primo faccino 24; il quarto, primo e secondo faccino 27.

[...] 9 [...] 7 [...] 4 [...] 11.

Problema XXXI

Trovinsi tre numeri che il primo e secondo siano 20 più del terzo, il secondo e terzo siano 30 più del primo, e il terzo e primo siano 40 più del secondo.

[...] 30 [...] 25 [...] 35.

Problema XXXVI

Far di 200 tre parti tali che la prima e la seconda siano tre volte quanto la terza e la seconda e terza quattro volte quanto la prima.

[...] 40 [...] 110 [...] 50 [...]

Problema XLI

Trovisi tre numeri che il primo dando al secondo la terza parte di se stesso et il secondo dando al terzo il suo quarto et il terzo dando al primo il suo quinto, che all'hor poi tutte tre le somme siano eguali.

[...] 12 [...] 8 [...] 10 [...]

Rafael Bombelli, *L'Algebra*.

Problema XXXIII

Trovinsi due numeri quadrati che il lato dell'uno sia 2 più del lato dell'altro e che cavato l'uno dell'altro resti 10.

[...] li numeri quadrati saranno $2 \frac{1}{4}$ e $12 \frac{1}{4}$ [...]



Problema L

Trovisi un numero che moltiplicato per 200 e per 5 gli dui prodotti siano l'uno il quadrato dell'altro.

[...] 8 sarà il numero che si cerca⁷⁵ [...]

Problema LI

Faccisi di 20 due parti tali che lo eccesso delli loro quadrati sia 120.

[...] una parte sarà 13 e l'altra 7 [...]

Problema LII

Faccisi di 10 due parti tali che moltiplicata l'una via l'altra faccino quanto la differenza di dette parti moltiplicata per 8.

[...] 13-R.q.89⁷⁶ e questa sarà una parte;

l'altra saà lo restante sino in 10, cioè R.q.89-3[...]

Problema LIII

Trovinsi dui numeri over quantità che l'uno sia 4 più dell'altro e che moltiplicati l'uno per l'altro faccino 60.

Problema LVIII

Trovisi dui numeri tali che il maggiore sia tre volte quanto il minore e che il quadrato del minore sia 12 volte quanto il maggiore.

[...] 36 [...] 108

Problema LXI

Dividasi 25, numero quadrato, in due numeri quadrati.

Problema LXII

È 52 divisibile in dui numeri quadrati, cioè in 36 e 16. Hor lo voglio ridividere in dui altri numeri quadrati che non siano li medesimi: si domanda quali saranno.

[...] li numeri quadrati saranno 51 21/25 e 4/25, che gionti insieme fanno 52.

Problema LXIII

Trovisi dui numeri quadrati che l'uno sia 96 più dell'altro.

Problema XX

Faccisi di 10 due parti che li loro quadrati cavati l'uno dell'altro resti 12.

[...] 5 3/5 [...] 4 2/5 [...]

Problema XLVII

Trovisi due numeri over quantità che l'uno sia 2 più dell'altro e li loro quadrati gionti insieme faccino 24.

[...] R.q. 11-1, e questo è uno delli numeri, e l'altro sarà R.q. 11+1

Problema XLIX

Faccisi di 10 due parti tali che moltiplicate l'una via l'altra faccino 16.



⁷⁵ L'Autore trascura la radice nulla.

⁷⁶ Radice quadrata di 89.

Problema XLIX bis

Faccisi di 12 due parti tali che li loro quadrati gionti insieme faccino 104.

Rafael Bombelli, *L'Algebra*.

Bombelli e il numero i

Pur di arrivare alla soluzione delle equazioni di terzo e quarto grado, i matematici italiani del Cinquecento erano disposti a utilizzare un oggetto così ‘sfuggente’ come l’unità immaginaria i , il cui quadrato è -1 .

SARÀ UN NUMERO?

I numeri immaginari furono introdotti nel tentativo di risolvere le equazioni di terzo grado. Già dal 1515 era nota la formula di risolutiva (ricavata da Scipione dal Ferro e pubblicata da Cardano nella sua *Ars Magna* del 1545) che nel caso di equazioni del tipo $x^3=px+q$ risulta essere:

$$x=u+v=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Questa formula presentava però un ostacolo: il cosiddetto caso irriducibile. Questo caso si ha quando risulta negativa l’espressione sotto la radice quadrata nella formula, un’eventualità che lo stesso Cardano definisce “sofistica e lontana dalla natura dei numeri”. Era proprio una situazione inquietante, perché, se nelle equazioni di secondo grado la presenza di questi radicali porta ad escludere delle soluzioni reali, nelle equazioni cubiche non si può giungere a questa conclusione, in quanto esse ammettono sempre almeno una soluzione reale. Il caso irriducibile si può presentare anche quando le soluzioni sono tutte e tre reali, come nell’equazione, proposta da Bombelli, $x^3=15x+4$, che ha come soluzioni i numeri: $4; \sqrt{3}-2; -\sqrt{3}-2$.

L’ostacolo che si presentava non dipendeva quindi dalla natura dell’equazione, ma dal procedimento di calcolo utilizzato nella risoluzione (veniva messa in dubbio anche la formula stessa).

Bombelli, a differenza di Cardano, decise di affrontare questi ‘strani’ numeri. Nel primo documento compare quanto scrive in proposito nella sua *Algebra*.

Dopo aver deciso di ‘scendere a compromessi’ con questi nuovi numeri, Bombelli andò oltre e riuscì a trovare un procedimento per arrivare a ottenere almeno una soluzione reale per le equazioni di terzo grado, pur utilizzando la formula risolutiva

vista sopra. Questo procedimento consiste nel trasformare i radicali $\sqrt[3]{m \pm \sqrt{n}}$ cubici in quelli che noi oggi siamo soliti chiamare *numeri complessi* e che scriviamo nella forma $a+ib$ (con a e b numeri reali). In questo modo la formula risolutiva dell'equazione porta a sommare due numeri complessi *coniugati*, che danno un numero reale: $(a+ib)+(a-ib)=2a$.

Bombelli espone questo metodo nel documento.

Ho trovato un'altra sorte⁷⁷ di R.c.legate⁷⁸ [...], la qual nasce dal Capitolo di cubo equale a tanti e numero⁷⁹, quando il cubato del terzo delli tanti è maggiore del quadrato della metà del numero⁸⁰, [...] la qual sorte di R.q.⁸¹ ha nel suo Algoritmo diversa operatione dall'altre e diverso nome; perché quando il cubato del terzo delli tanti è maggiore del quadrato della metà del numero, lo eccesso loro non si può chiamare né più né meno, però lo chiamarò più di meno⁸² quando egli si doverà aggiungere, e quando si doverà cavare lo chiamerò men di meno⁸³, e questa operatione è necessarijssima [...], la quale parrà a molti più tosto sofisticata che reale, e tale opinione ho tenuto anch'io sin che ho trovato la sua dimostratione in linee⁸⁴ [...] e prima tratterò del moltiplicare, ponendo la regola del più et meno:

più via⁸⁵ più di meno fa più di meno
meno via più di meno fa meno di meno
più via meno di meno fa meno di meno
meno via meno di meno fa più di meno
più di meno via più di meno fa meno
più di meno via men di meno fa più
meno di meno via più di meno fa più
meno di meno via men di meno fa meno.

Rafael Bombelli, *L'Algebra*, 1579, p. 169.

⁷⁷ Un altro tipo.

⁷⁸ Per "Radici cube legate" Bombelli intende quelle del tipo $\sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}}$ o $\sqrt[3]{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$.

⁷⁹ Corrisponde a $x^3=px+q$; Bombelli indica con "tanto" l'incognita (così come faceva Diofanto) e con "numero" il termine noto q .

⁸⁰ Quando il termine sotto radice quadrata della formula risolutiva è negativo.

⁸¹ Radici quadrate.

⁸² L'autore indica $\sqrt{-1}$, cioè i , con "più di meno".

⁸³ "meno di meno" è $-\sqrt{-1}=-i$.

⁸⁴ Dimostrazione per via geometrica.

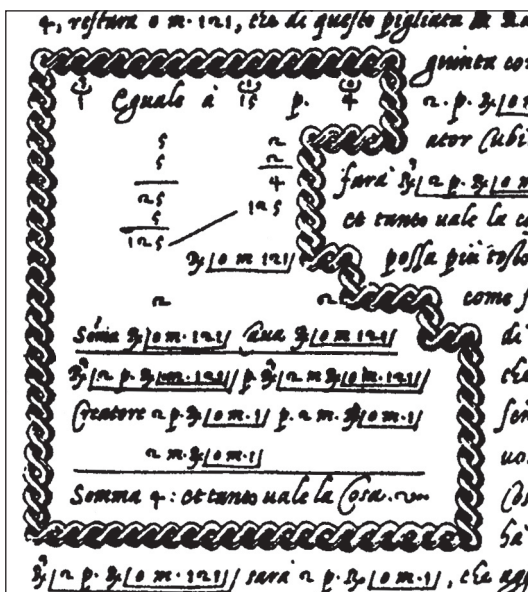
⁸⁵ Moltiplicato per.

Per interpretare il documento

1. Traduci in termini matematici moderni “il cubato del terzo delli tanti è maggiore del quadrato della metà del numero”, utilizzando p e q .
2. Riporta la prima parte del documento di Bombelli utilizzando anche il simbolismo algebrico moderno.
3. Completa la tabella seguente aggiungendo le interpretazioni mancanti di quattro versi del brano di Bombelli.

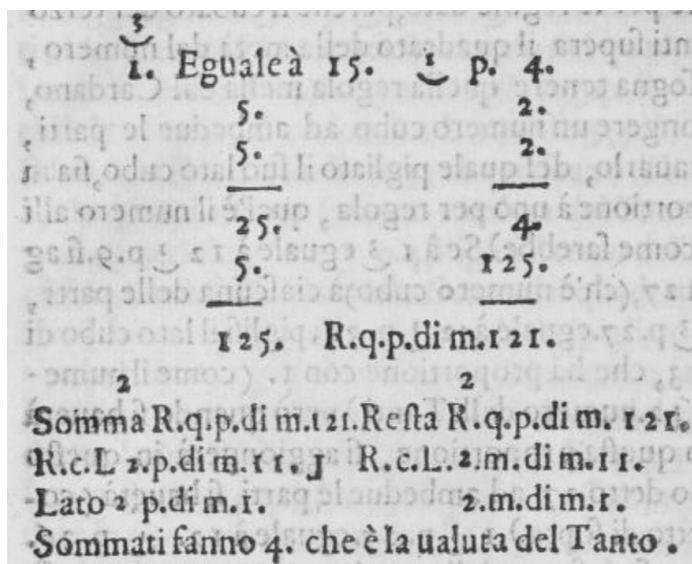
	Interpretazioni
più via più di meno fa più di meno	$(+1) \cdot (+i) = +i$
meno via più di meno fa meno di meno	$(-1) \cdot (+i) = -i$
più via meno di meno fa meno di meno	
meno via meno di meno fa più di meno	
più di meno via più di meno fa meno	$(+i) \cdot (+i) = -1$
più di meno via men di meno fa più	$(+i) \cdot (-i) = +1$
meno di meno via più di meno fa più	
meno di meno via men di meno fa meno.	

4. Dimostra che non si ha perdita di generalità a considerare solo le equazioni della forma $x^3 = px + q$, in questo modo: da una generica equazione $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, ricava $y^3 = py + q$ operando il cambio di variabile $x = y - a/3$.



Rafael Bombelli, *Manoscritto B*, 1569, Biblioteca dell'Archiginnasio, Bologna

Presentiamo anche una trascrizione dello stesso documento così come compare ne *L'Algebra*, 1579, p.294^{86 87}.



Per interpretare il documento

1. Traduci in termini moderni l'equazione della prima riga.
In questo caso, quanto valgono i coefficienti p e q nominati nell'introduzione? E $p/3$ e $q/2$?
2. Trova una soluzione reale di questa equazione, usando la formula risolutiva scritta nell'introduzione; ti potrebbe essere utile affrontare prima i successivi tre quesiti.
3. Scrivi $\sqrt{-121}$, utilizzando i .
4. Calcola $(2+i)^3$ e $(2-i)^3$.
5. A questo punto puoi dire quanto valgono $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$, $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ e la soluzione reale che ricava anche Bombelli.
6. Verifica che la soluzione trovata è proprio una soluzione dell'equazione.
7. Individua nei passaggi che hai fatto per arrivare alla soluzione il seguente passo del documento:

Somma R.q.p.di m.121. Resta R.q.p.di m. 121.

8. Confronta anche gli altri dettagli del documento con i passaggi che hai fatto tu.

⁸⁶ I numeri 3 e 1 nei semicerchi servono ad indicare l'esponente dell'incognita che viene sottintesa.

⁸⁷ Nel testo stampato de *L'Algebra*, vengono utilizzate due L (una è rovesciata) per svolgere la funzione di parentesi, parentesi che saranno introdotte solo vent'anni dopo da Viète.

Logaritmi

Ecco un esempio di come due matematici, pur lavorando a varie centinaia di chilometri di distanza, siano arrivati indipendentemente alle stesse conclusioni e negli stessi anni: del resto l'idea non era nuova...

UN'IDEA ANTICA

È nel 1600 che assume concretezza un'idea già abbozzata nel XV secolo e molto utile per rendere più facili i calcoli, in particolare quelli della trigonometria: l'uso dei *logaritmi*. Storicamente il merito viene dato a due autori: allo scozzese John Napier (1550-1617), conosciuto in Italia come Nepero, e allo svizzero Jobst Bürgi (1552-1632).

Dato che le loro opere sono di difficile interpretazione, qui riportiamo un documento tratto da un testo del 1700 concepito proprio per gli studenti.



John Napier
(1550-1617)

287

I Geometri si dovevano da gran tempo della lunghezza dei calcoli nella moltiplicazione, e nella divisione dei numeri molto grandi, e sopra tutto nell'estrazione delle radici un poco alte, quando finalmente Nepero, Barone Scozzese, uomo di raro genio, imaginò una maniera estremamente felice di rimediare ad un simile inconveniente. Egli arrivò al termine di ridur le moltiplicazioni a semplici somme, le divisioni a semplici sottrazioni, le formazioni delle potenze a moltiplicazioni assai corte, e l'estrazione delle radici a divisioni le più facili. [...]

288

Sia dunque una progressione geometrica qualunque $a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5$; ec. si sa che [...]

$$a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5 \dots, a^7 \times a^9 = a^{7+9} = a^{16}.$$

Così il prodotto di due termini qualunque d'una progression geometrica è sempre uguale a quel termine della progressione medesima il quale abbia per esponente la somma degli esponenti di questi due.



289

Oltre a ciò si sa che [...] *per avere il quoziente di due di questi termini, bisogna prender la differenza de' loro esponenti, e farne l'esponente del quoziente cercato.*

Ora questi esponenti son ciò che dicesi *Logaritmo*. Di modo che se $a=10$, la formula diventando allora $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4$, ec. ovvero 1, 10, 100, 1000, 10000 ec., l'esponente 0 è il logaritmo dell'unità; l'esponente 1 è il logaritmo di 10; 2 quello di 100 ec..

Ma siccome che questi esponenti non danno altro che i logaritmi de' numeri che son nella progression decupla 1, 10, 100, 1000, ec. e frattanto si ha bisogno spessissimo de' logaritmi dei numeri intermedi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, ec. come pure de' logaritmi delle frazioni, così per trovare tutti questi logaritmi si sono aggiunti a ciascuno degli esponenti della formula alquanti zeri in forma di decimali, il che l'ha mutata in questa, postivi solamente sette zeri

$$1^{0,0000000}, 10^{1,0000000}, 10^{2,0000000}, 10^{3,0000000}, \text{ ec.}$$

Quindi si è rilevato che inserendo in questa formula degli esponenti in progressione aritmetica, i valori del 10 elevato alle potenze indicate da essi, saranno numeri in progressione geometrica, e però questi stessi esponenti saranno i logaritmi di questi numeri. Dunque facendo crescere questi decimali consecutivi di $1/10000000$ [...] si è trovata una nuova progression geometrica i di cui primi termini sono

$$10^{0,0000000}, 10^{0,0000001}, 10^{0,0000002}, 10^{0,0000003}, \text{ ec.}$$

e i valori corrispondenti di ciascheduno di questi termini son numeri che van crescendo assai lentamente dall'unità in su; poichè il primo termine vale 1, e il dieci-milionesimo-primo non vale che 10. Tra tutti questi termini inseriti ve ne sarà dunque uno = 2, un altro = 3, un altro = 4 ec. o almeno prossimamente vicini ec. Si è trovato per esempio che 2 è presso a poco il valore del termine $10^{0,3010300}$, che 3 è presso a poco = $10^{0,4771213}$, che finalmente 4 = $10^{0,6020600}$, ec.; e si son riguardati questi esponenti come i logaritmi di 2, di 3, di 4 ec.

290

[...] furono costruite le Tavole dei Logaritmi per tutti i numeri dall'unità fino a 100000, e che servono a trovar quelli ancora de' numeri più grandi. Vi sono alcune di queste tavole nelle quali per una precisione maggiore i logaritmi hanno dieci, quindici, venti decimali; ma bastano d'ordinario i primi cinque. [...]

291

Frattanto senza ricorrere ad esse [tavole] si può intendere 1°, che i Logaritmi dei numeri intermedi fra 1 e 10 debbono cominciare per 0; quelli dei numeri posti fra 10 e 100 cominceranno per 1; quelli dei posti fra 100 e 1000 per 2; ec. Questa prima cifra dei logaritmi (che è l'intero dell'esponente) si chiama la *Caratteristica* del logaritmo, perchè serve a far conoscere di quanti caratteri è composto il numero che gli corrisponde; poichè è evidente che questo numero deve avere una cifra di più di quelle unità che contiene la caratteristica. Così si vede in un colpo d'occhio che il logaritmo 4,814560 appartiene a un numero di cinque cifre perchè la sua caratteristica è 4.



292

2° Che il prodotto di due numeri corrisponde alla somma dei loro logaritmi, e che il loro quoziente corrisponde alla differenza dei loro logaritmi. Così per moltiplicare 48 per 166, io sommo i loro logaritmi che sono 1,681241 e 2,220108; la somma è 3,901349; e questo logaritmo corrisponde nelle tavole al numero 7968, che è appunto il prodotto di 48×166 . Per divider 7336 per 56, bisogna sottrarre il logaritmo di 56 che è 1,748188 dal logaritmo di 7336, che è 3,865459, e la differenza loro che è 2,117271 è un logaritmo che corrisponde nelle Tavole a 131. Dunque 131 è il quoziente di 7336 diviso per 56.

Abate Marie, *Lezioni elementari di matematiche*, pp. 199-202.

Per interpretare il documento

1. Qual è stata storicamente l'utilità dei logaritmi?
2. Come formula l'Abate Marie le proprietà del prodotto e del quoziente di potenze con la stessa base?
3. Qual è il logaritmo (decimale) di 1? e quello di 10? e di 1 000?
4. Ricava dal documento il valore (approssimato) del logaritmo di 2, di 3, di 4.
5. Il logaritmo di 6, con quale cifra inizia? e il logaritmo di 60? e il logaritmo di 600?
6. Qual è la cifra delle unità del logaritmo di un numero di cinque cifre?
7. Calcola $166 \cdot 48$, utilizzando i logaritmi. Ripeti con $7336:56$.
8. Ricava dagli esempi presenti nel documento, o utilizzando il tuo testo di matematica, il significato di *progressione aritmetica* e di *progressione geometrica*.
9. Dopo aver individuato la cifra iniziale, stabilisci fra quali numeri interi consecutivi sono compresi, rispettivamente, il logaritmo di 350; di 35; di $7/2$.
10. Stabilisci fra quali potenze consecutive di 10 è compreso 0,05. Individua fra quali numeri interi consecutivi è compreso il logaritmo di 0,05.
11. Osserva la tavola dei logaritmi riportata nella pagina seguente.

1	00 000	50	69 897	100	00 000	150	17 609	200	30 103	250	39 794	300	47 712
2	30 103	51	70 757	101	00 432	151	17 898	201	320	251	39 967	301	47 857
3	47 712	52	71 600	102	00 860	152	18 184	202	535	252	40 140	302	48 001
4	60 206	53	72 428	103	01 284	153	18 469	203	750	253	40 312	303	48 144
		54	73 239	104	01 703	154	18 752	204	30 963	254	40 483	304	48 287
5	69 897	55	74 036	105	02 119	155	19 033	205	31 175	255	40 654	305	48 430
6	77 815	56	74 819	106	02 531	156	19 312	206	387	256	824	306	572
7	84 510	57	75 587	107	02 938	157	19 590	207	597	257	40 993	307	714
8	90 309	58	76 343	108	03 342	158	19 866	208	31 806	258	41 162	308	855
9	95 424	59	77 085	109	03 743	159	20 140	209	32 015	259	330	309	48 996
10	00 000	60	77 815	110	04 139	160	20 412	210	32 222	260	41 497	310	49 136
11	04 139	61	78 533	111	04 532	161	20 683	211	428	261	664	311	276
12	07 918	62	79 239	112	04 922	162	20 952	212	634	262	830	312	415
13	11 394	63	79 934	113	05 308	163	21 219	213	32 838	263	41 996	313	554
14	14 613	64	80 618	114	05 690	164	21 484	214	33 041	264	42 160	314	693
15	17 609	65	81 291	115	06 070	165	21 748	215	33 244	265	42 325	315	49 831
16	20 412	66	81 954	116	06 446	166	22 011	216	445	266	488	316	49 969
17	23 045	67	82 607	117	06 819	167	22 272	217	646	267	651	317	50 106
18	25 527	68	83 251	118	07 188	168	22 531	218	33 846	268	813	318	243
19	27 875	69	83 885	119	07 555	169	22 789	219	34 044	269	42 975	319	379
20	30 103	70	84 510	120	07 918	170	23 045	220	34 242	270	43 136	320	50 515
21	32 222	71	85 126	121	08 279	171	23 300	221	439	271	297	321	651
22	34 242	72	85 733	122	08 636	172	23 553	222	635	272	457	322	786
23	36 173	73	86 332	123	08 991	173	23 805	223	34 830	273	616	323	50 920
24	38 021	74	86 923	124	09 342	174	24 055	224	35 025	274	775	324	51 055
25	39 794	75	87 506	125	09 691	175	24 304	225	35 218	275	43 933	325	51 188
26	41 497	76	88 081	126	10 037	176	24 551	226	411	276	44 091	326	322
27	43 136	77	88 649	127	10 380	177	24 797	227	603	277	248	327	455
28	44 716	78	89 209	128	10 721	178	25 042	228	793	278	404	328	587
29	46 240	79	89 763	129	11 059	179	25 285	229	35 984	279	560	329	720
30	47 712	80	90 309	130	11 394	180	25 527	230	36 173	280	44 716	330	51 851
31	49 136	81	90 849	131	11 727	181	25 768	231	361	281	44 871	331	51 983
32	50 515	82	91 381	132	12 057	182	26 007	232	549	282	45 025	332	52 114
33	51 851	83	91 908	133	12 385	183	26 245	233	736	283	179	333	244
34	53 148	84	92 428	134	12 710	184	26 482	234	36 922	284	332	334	375
35	54 407	85	92 942	135	13 033	185	26 717	235	37 107	285	45 484	335	52 504
36	55 630	86	93 450	136	13 354	186	26 951	236	291	286	637	336	634
37	56 820	87	93 952	137	13 672	187	27 184	237	475	287	788	337	763
38	57 978	88	94 448	138	13 988	188	27 416	238	658	288	45 939	338	52 892
39	59 106	89	94 939	139	14 301	189	27 646	239	37 840	289	46 090	339	53 020
40	60 206	90	95 424	140	14 613	190	27 875	240	38 021	290	46 240	340	53 148
41	61 278	91	95 904	141	14 922	191	28 103	241	202	291	389	341	275
42	62 325	92	96 379	142	15 229	192	28 330	242	382	292	538	342	403
43	63 347	93	96 848	143	15 534	193	28 556	243	561	293	687	343	529
44	64 345	94	97 313	144	15 836	194	28 780	244	739	294	835	344	656
45	65 321	95	97 772	145	16 137	195	29 003	245	38 917	295	46 982	345	53 782
46	66 276	96	98 227	146	16 435	196	29 226	246	39 094	296	47 129	346	53 908
47	67 210	97	98 677	147	16 732	197	29 447	247	270	297	276	347	54 033
48	68 124	98	99 123	148	17 026	198	29 667	248	445	298	422	348	158
49	69 020	99	99 564	149	17 319	199	29 885	249	620	299	567	349	283
50	69 897	100	00 000	150	17 609	200	30 103	250	39 794	300	47 712	350	54 407

(Accanto ad ogni numero in grassetto, è indicato il valore del suo logaritmo in base 10, esclusa la parte intera, a cinque decimali: la precisione è quindi minore di quella degli esempi riportati nel documento dall'Abate Marie).

Trascrivi il valore del logaritmo di qualche numero scelto da te, dopo aver stabilito la prima cifra che non è riportata nella tavola.

12. Calcola, utilizzando i valori del logaritmo presenti nella tavola: $12 \cdot 16$; $330:22$; 18^2 vale a dire $18 \cdot 18$; 18^3 ; 18^4 ; $\sqrt[3]{289}$ vale a dire $289^{\frac{1}{3}}$, 289 .

Fai le tue ipotesi

1. Come avranno fatto a compilare le prime tavole con i valori del logaritmo a più cifre decimali?

UNA RISPOSTA AUTOREVOLE!

Il documento che segue è tratto dall'opera di Eulero e fornisce una risposta significativa alla domanda contenuta in *Fai le tue ipotesi*.

235

Anzitutto, poiché $L.1=0$ e $L.10=1$, è evidente che i logaritmi di tutti i numeri tra 1 e 10 dovranno essere compresi tra 0 e 1, ed essere di conseguenza più grandi di 0 e più piccoli di 1.

Consideriamo il numero 2; [...] assumendo $L.2=x$, è necessario che il valore di questa lettera sia tale da avere esattamente $10^x=2$.

È facile pure convincersi che x deve essere molto più piccolo di $\frac{1}{2}$ oppure, ed è la stessa cosa, che $10^{\frac{1}{2}}$ è più grande di 2. Infatti, se prendiamo il quadrato di entrambi otteniamo che il quadrato di $10^{\frac{1}{2}}$ è uguale a 10^1 e quello di 2 è uguale a 4; ora, quest'ultimo è molto minore del primo. [...]

Scegliamo ancora un'altra frazione come [...] $\frac{3}{10}$ e vediamo se $10^{\frac{3}{10}}=2$; se è così, le decime potenze di questi due numeri sono pure uguali fra di loro; però, la decima potenza di $10^{\frac{3}{10}}$ è $10^3=1000$ e la decima potenza di 2 è 1024; concludiamo dunque che $10^{\frac{3}{10}}$ non è uguale a 2, che $\frac{3}{10}$ è una frazione troppo piccola per produrre questa uguaglianza [...].

236

[...]

$L.2=x$ e noi mostreremo come, se esso fosse conosciuto, si potrebbero ricavare i logaritmi di un'infinità di altri numeri.

[...]

237

Anzitutto, siccome $L.2=x$ e $L.10=1$, avremo che $L.20=x+1$; $L.200=x+2$; $L.2000=x+3$; $L.20000=x+4$, $L.200000=x+5$, ecc.

238

Inoltre, siccome $L.c^2=2L.c$, $L.c^3=3L.c$, $L.c^4=4L.c$, ecc. abbiamo $L.4=2x$; $L.8=3x$; $L.16=4x$; $L.32=5x$; $L.64=6x$; ecc. e troviamo da esse che $L.40=2x+1$; $L.400=2x+2$; $L.4000=2x+3$; $L.40000=2x+4$; ecc. $L.80=3x+1$; $L.800=3x+2$ [...]



239

[...] poiché $L.10=1$ e $L.2=x$, avremo che $L. (10/2)$ cioè $L.5=1-x$ e dedurremo le equazioni seguenti:

$L.50=2-x$; $L.500=3-x$; $L.5000=4-x$; ecc.

$L.25=2-2x$; $L.125=3-3x$; [...]

Leonhard Euler, *Éléments d'algebre*, chapitre XXII.

Per interpretare il documento

- Ricava dal documento i motivi in base ai quali è possibile affermare che $\log 2 < 1/2$ e $3/10 < \log 2$.
- Con riferimento agli esempi ed ai simboli utilizzati da Eulero, completa le seguenti uguaglianze applicando le proprietà dei logaritmi:
 - $\log 20 = \log(2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = x + \dots$
 - $\log 200 = \log(2 \cdot 100) = \dots$
 - $\log 2\,000 = \dots$
 - $\log 20\,000 = \dots$
 - $\log 200\,000 = \dots$
 - $\log c^2 = \log(c \cdot c) = \dots$
 - $\log c^3 = \dots$
 - $\log c^4 = \dots$
 - $\log 4 = \log 2^2 = \dots$
 - $\log 8 = \log 2^3 = \dots$
 - $\log 40 = \log(4 \cdot 10) = \dots$
 - $\log 400 = \dots$
 - $\log 5 = \log 10/2 = \dots$
 - $\log 50 = \log(5 \cdot 10) = \dots$
 - $\log 125 = \log 5^3 = \dots$
- Stabilisci se $\log 2$ è maggiore oppure minore di $4/10$ utilizzando un ragionamento analogo a quello di Eulero.
- Ragionando come nel documento, ma utilizzando il valore a cinque decimali di $\log 2$ che si trova nella tavola precedente (vale a dire 0,30103) risalisci al valore di $\log 250$.
- Ripeti l'esercizio precedente con $\log 625$.
- Scegli un nuovo numero naturale che possieda come divisori primi solo il 2 e il 5; determinane il logaritmo assumendo ancora che il valore di $\log 2$ sia 0,30103.
- Servendoti di una calcolatrice munita della funzione di elevamento alla potenza n -esima, ma senza utilizzare il tasto "LOG", determina il valore di $\log 3$ a due cifre decimali (esponi un ragionamento analogo a quello di Eulero).

E inoltre... evoluzione dei simboli

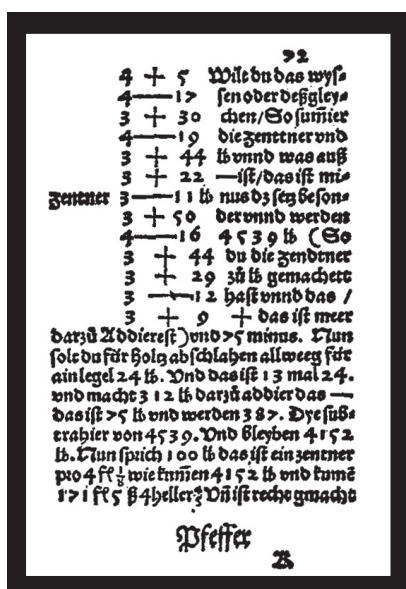
Per l'aritmetica e l'algebra

ADDIZIONE

- $\nearrow$ (gambe che si avvicinano), *Papiro Rhind*, Egitto, 1650 a.C.
- $\bar{p}$ oppure $\tilde{p}$, vari documenti del XV e XVI sec.
- Scrittura contratta di **et**, che ha dato origine al simbolo $+$, in manoscritti del XV sec.

SOTTRAZIONE

- $\nwarrow$ (gambe che si allontanano), *Papiro Rhind*, Egitto, 1650 a.C.
- $\dot{6}$ oppure $\overset{\circ}{6}$ per indicare -6, Bhaskara, India, c. 1150 d.C.
- $\bar{m}$ oppure $\widetilde{m}$, vari documenti europei del XV e XVI sec.
- Il simbolo moderno per indicare la sottrazione sembra derivi dall'uso di apporre un trattino per indicare l'omissione di qualche lettera (come in Pacioli *Sūma per Summa*).



Primo uso dei simboli $+$ e $-$, 1489.

J. Widman, *Behennde vnd hüpsche Rechnung*, Leipzig, 1489 (questa pagina è tratta dall'edizione del 1526).

MOLTIPLICAZIONE

- **6.fia.8.fa.48.**, Anonimo, *Larte de labbacho*, Treviso, Italia, 1478.

- | | |
|------|--|
| 57 | |
| X | |
| 23 | |
| 1311 | |

The note of addition is (+)
of subtracting (-)
of multiplying (x).

E. Wright, Inghilterra, 1618.

- | | |
|-----------------|-------------|
| Factores | Faci |
| 7·17 | 119 |

Vlacq, Olanda, 1628.

- ... minutia minutiae ita scribēda est $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7}$
pronūciaturque sic. Tres quintae quatuor septimarū
vnius integri

Clavio, Germania/Italia, 1583.

- ed anche $\cap$, Leibniz, Germania, c. 1682

DIVISIONE

- — linea di frazione, Fibonacci, *Liber abbaci*, Italia, 1202.
- ∴, Johnsons *Arithmetick, In two Books*, Inghilterra, 1633.

- $x:y$ quod idem est ac x divis. per y seu $\frac{x}{y}$.

Leibniz, Germania, 1684.

SEGNI DI RELAZIONE

- $\propto$ (anche ruotato; derivato da æ , æqualis), Cartesio e manoscritti, Francia, 1637.

- = ... una coppia di parallele, o linee gemelle della stessa lunghezza, quindi: perché non vi sono due cose che possano essere più uguali.

Recorde, Inghilterra, 1557.

- $>$, $<$, Harriot, Inghilterra, 1631, (postumo).

ESPONENTI

- $.9^3. \tilde{m}$ per $9x^{-3}$, Chuquet, Francia, 1484.
- $x^3-9xx+26x-24$, Cartesio, Francia, 1637.
- $\frac{1}{8}$ cujus index -3 ; $\frac{1}{\sqrt{2}}$ cujus index $-\frac{1}{2}$, Wallis, Inghilterra, 1695.

RADICALI

- **E cosi la .R. de .20 1/4. e .4 1/2**, Pacioli, Italia, 1494.
- $\mathfrak{R} \quad \mathfrak{V} \quad \sqrt{\quad}$, in vari manoscritti europei (per la lettera **r**), dopo il XIV sec.
- $\sqrt{\quad}$, Rudolff, Germania, 1525.

INFINITO

- Jam numerus incrementorum est ∞ , Wallis, Inghilterra, 1695.

Fai le tue ipotesi

1. Elenca alcuni motivi per i quali l'uso dei simboli costituisce un vantaggio rispetto alle modalità espressive dell'algebra retorica e sincopata.
2. Perché, secondo te, il nuovo simbolismo, poi universalmente adottato, si è sviluppato proprio in Europa? Perché non in un singolo Paese?

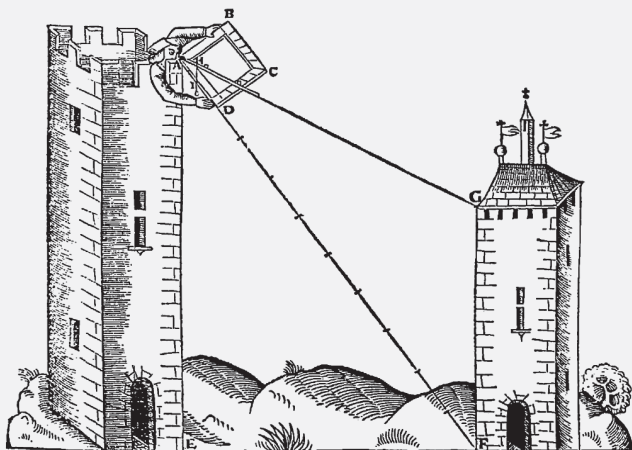


Immagine tratta da *Protomathesis*, O. Finé, 1532.

Capitolo 2

I volti della geometria

Aritmo-geometria: i numeri figurati

I “numeri figurati” sono rappresentazioni geometriche dei numeri naturali. Si parla di numeri figurati lineari, poligonali, solidi. Ecco il primo volto della geometria, quello che mostra come essa non sia poi così tanto staccata dall’aritmetica.

I primi quattro documenti sono tratti dall’opera *Introduzione aritmetica*, di Nicomaco (I-II sec. d.C.): nato a Gerasa, in Arabia, è autore anche di una *Introduzione geometrica* purtroppo andata perduta.



Nicomaco

(I-II sec.d.C.)

NUMERI POLIGONALI

Per i Pitagorici il numero sacro per eccellenza era la *Tetraktis*. La sua rappresentazione la puoi vedere più avanti nel primo documento: è il numero triangolare $1+2+3+4$, vale a dire 10.

L’importanza dei numeri quadrati è ben nota: la loro radice quadrata è un numero intero. In questo volume troveremo un brano di Galileo, nella parte sull’infinito, che si riferisce ad essi. Ma ecco ora il primo documento di Nicomaco.

È dunque **triangolo** il numero che, nella sua risoluzione in unità, configura in triangolo la posizione equilatera nel piano delle sue parti; lo sono per esempio:

3, 6, 10, 15, 21, 28,

e così via. [...]

Esso si genera quando il numero naturale è esposto in linea e, sempre dopo l’inizio, i numeri successivi sono aggiunti uno a uno, poiché i triangoli ben ordinati si realizzano a ciascuna addizione e ammucciamiento; per esempio a partire da questa linea naturale:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15,

e prendendo il primo numero, ho il primo triangolo in potenza, l’unità, poi ammuccchiando su di esso il seguente, ho il primo triangolo in atto, poiché $3 = 2 + 1$, e nella rappresentazione figurata esso si costituisce così: sotto la prima unità si dispongono due unità affiancate, e il numero 3 è reso triangolo; poi 3, che è il numero seguente, ammuccchiato su questo, esposto in unità e riunito, produce 6, secondo numero triangolo in atto e gli dà anche una configurazione; e a sua volta, il numero che segue naturalmente, 4, ammuccchiato su questo e trascritto in unità, dà il numero 10, ben ordinato dopo quelli dei quali



si è parlato, e prende una configurazione triangolare; e 5 dopo di lui, poi 6, poi 7, e tutti i seguenti di modo che i lati di ciascuno conterranno armoniosamente tante unità quanti sono i numeri della linea naturale sommati per costituirlo.

```

          a
        a a
      a a a
    a a a a
  a a a a a

```

Nicomaco, *Introduzione aritmetica*.

Per interpretare il documento

1. Quanti punti si aggiungono per passare dal primo numero triangolare “in potenza” al primo “in atto”? Quanti se ne aggiungono per passare da ciascuno degli altri nominati da Nicomaco al successivo?
2. Osserva la figura che compare nel documento e poi disegna i due successivi numeri triangolari.
3. Senza servirti del disegno, calcola l’ottavo numero triangolare.
4. Quanti punti bisogna aggiungere per passare dall’ n -esimo numero triangolare (quello che ha alla base n “unità affiancate”) al suo successivo?
5. Quanto vale il decimo numero triangolare? Ragiona così¹:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	$11 \cdot 10 : 2 = \dots$

Puoi rappresentare la stessa situazione anche con un disegno:

```

a aaaaaaaaaa
aa aaaaaaaaaa
aaa aaaaaaaaaa
aaaa aaaaaaaaaa
aaaaa aaaaaaaaaa
aaaaaa aaaaaaaaaa
aaaaaaa aaaaaa
aaaaaaaa aaaa
aaaaaaaaa aaa
aaaaaaaaaaa aa
aaaaaaaaaaaa a

```

e quindi trova quante “a” ci sono in ciascuno dei due triangoli, dividendo per 2 l’area dello ‘schieramento’ rettangolare.

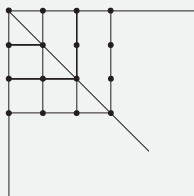
6. Quanto vale l’ n -esimo numero triangolare? Rispondi scrivendo una formula ottenuta generalizzando i metodi utilizzati al punto precedente.

¹ Karl Friedrich Gauss (1777-1855), grande matematico tedesco, durante le scuole elementari stupì il maestro utilizzando questo metodo veloce per sommare tutti i numeri da 1 a 100, compito assegnato presumibilmente per tenere occupata la classe per molto tempo.

È **quadrato** il numero che viene dopo quello [triangolare] e che dà, non più tre angoli come il precedente, ma quattro angoli nella rappresentazione figurata, tuttavia [si rappresenta] anch'esso in una configurazione equilatera, come

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

poiché i loro tracciati equilateri diventano dei quadrati nel modo seguente:



e così di seguito fino a quando vuoi. [...]

Questo si genera anche quando il numero naturale che si stende per unità è esposto in linea, ammuccchiando non più i seguenti sui seguenti, come è stato mostrato, ma tutti quelli che sono distanti di uno gli uni dagli altri, cioè i dispari; poiché il primo è 1, primo quadrato in potenza, il secondo 1 e 3, primo quadrato in atto, il terzo 1, 3 e 5, secondo quadrato in atto, il quarto 1, 3, 5, e 7, terzo quadrato in atto, e il seguente nasce dall'ammucchiamento di quello di 9 sui precedenti, e quello che viene dopo di lui, di quello di 11, e così sempre. Si ha per questi numeri che il lato di ciascuno conta tante unità quanti sono i numeri ammuccchiati per generarlo.

Nicomaco, *Introduzione aritmetica*.

Per interpretare il documento

1. Quali numeri si “ammucchiano” per costruire un numero quadrato? Spiega in che modo riprendendo gli esempi del documento di Nicomaco.
2. Quanti punti si aggiungono per passare dal quarto “quadrato in atto” al quinto?
3. Quanti numeri sono stati “ammucchiati” per generare ciascun numero quadrato?
4. Per Nicomaco i numeri triangolari erano la base di tutti i numeri poligonali. Costruisci, disegnando, un numero quadrato con due numeri triangolari successivi.
5. Dimostra algebricamente che la somma di due numeri triangolari successivi è un numero quadrato.
6. Qual è il criterio per verificare se un numero è quadrato (cioè, dato un numero naturale, quale calcolo si può fare per stabilire se esso è quadrato)?

È **pentagono** il numero che anch'esso, nello spiegamento delle unità, è rappresentato in piano da una figura pentagonale, interamente equilatera, così

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70

e numeri analoghi.

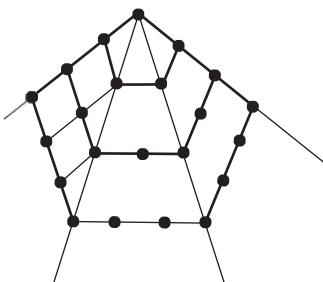


Ma ciascun lato del primo pentagono in atto, cioè 5, è la diade, poiché l'unità è il lato del primo pentagono in potenza, uno, la triade è il lato del secondo di quelli che sono disposti, 12, la tetrade lo è di quello che segue, 22, la pentade lo è del seguente, 35, l'esade di quello che viene dopo di esso, 51, e sempre così; poiché in generale il lato conta tante unità quanti sono i numeri ammuchciati per costituirlo e scelti nel flusso numerico disposto naturalmente in linea, in modo affine e simile in effetti, si ammuchciano gli uni sugli altri per costituire il pentagono i numeri che lasciano tra di loro un intervallo di due a partire dall'unità, cioè che si sorpassano gli uni gli altri di una triade.

Nicomaco, *Introduzione aritmetica*.

Per interpretare il documento

1. Osserva nel disegno di quanti punti differisce un numero pentagonale dal suo successivo.



2. Scrivi alcuni numeri pentagonali maggiori di 70.

[...] come il numero triangolo si è realizzato ammettendo per l'ammuchciamento i numeri che differiscono di un'unità senza lasciarne alcuno, il quadrato ammette i numeri che differiscono di una diade lasciandone uno, il pentagono, in modo conseguente, ammette i numeri che differiscono di una triade lasciandone due, come abbiamo mostrato esponendo i loro esempi, e quelli della loro realizzazione, analogamente i numeri esagoni avranno gli gnomoni che differiscono di una tetrade² lasciandone tre.

Per chi prende in considerazione tutti i casi, è una regola generale che gli gnomoni di ciascun poligono differiscono gli uni dagli altri di una diade di meno della quota legata al nome degli angoli.

Nicomaco, *Introduzione aritmetica*.

² Di quattro unità.

Per interpretare il documento

1. Spiega con le tue parole la parte in cui si dice: “come il numero triangolo si è realizzato ammettendo per l’ammucchiamento i numeri che differiscono di un’unità senza lasciarne alcuno, il quadrato ammette i numeri che differiscono di una diade lasciandone uno, il pentagono, in modo conseguente, ammette i numeri che differiscono di una triade lasciandone due”. (Suggerimento: scrivi alcuni dei primi numeri triangolari e metti in evidenza quanti punti si aggiungono da un numero all’altro, trova poi di quanto questi ultimi differiscono. Ripeti lo stesso procedimento con i numeri quadrati e pentagonali).
2. Quale relazione sussiste tra un numero esagonale e il suo successivo? E tra un accrescimento e l’altro?
3. Scrivi alcuni numeri esagonali.
4. C’è una relazione tra la differenza fra i numeri che vengono aggiunti e il numero dei lati del numero poligonale? Esprimi con le tue parole la regola generale per costruire i numeri poligonali, presente nel testo appena letto: “Per chi prende in considerazione tutti i casi, è una regola generale che gli gnomoni³ di ciascun poligono differiscono gli uni dagli altri di una diade di meno della quota legata al nome degli angoli”.

³ Le aggiunte.

Terne pitagoriche

Gli antichi Egizi avevano osservato che un triangolo con i lati di 3, 4, 5 unità di lunghezza è rettangolo e che inoltre sono rettangoli quei triangoli che hanno lati di 6, 8, 10 unità oppure 9, 12, 15 unità. Pure Indiani e Cinesi avevano osservato la stessa cosa, e anche con le lunghezze 5, 12, 13 o con 8, 15, 17. In tutti questi casi, la somma dei quadrati dei due numeri minori dà il quadrato del maggiore: $3^2+4^2=5^2$, $6^2+8^2=10^2$ ecc. Vengono chiamate *terne pitagoriche* le terne di numeri interi che godono di questa proprietà.

MODI INGEGNOSI PER RICAIVARE TERNE PITAGORICHE

Con interessanti ragionamenti sulle proprietà dei numeri naturali è possibile ricavare intere ‘famiglie’ di terne pitagoriche, come mostra il seguente documento tratto dall’opera di Leonardo Pisano, detto Fibonacci.



Fibonacci
(ca. 1170-1230)

Io ò chonsiderato sopra l’orrigine di tutti i numeri quadrati e ò trovato quella venire dalla ordinata ascensione de’ numeri impari. Inperò che unità è quadrata e di quella è fatta el primo quadrato, cioè uno. Al quale agunto 3, fanno el sechondo quadrato, cioè 4, la cui radice è 2; al quale quadrato se s’agungne al terzo numero impari, cioè 5, si crierà el terzo numero quadrato, cioè 9, la cui radice è 3.

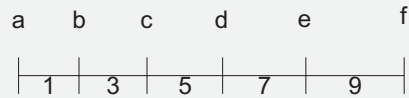
E chosì senpre, per l’ordinata chonguntione de’ numeri impari ne proviene l’ordinatio-
ne de’ numeri quadrati⁴.

Onde, quando vorremo trovare due numeri quadrati de’ quali lo agugnimento faccia numero quadrato, torrò qual vorrò numero impari quadrato, e quello arò per uno de’ 2 detti quadrati; l’altro troverrò per lo agugnimento di tutti e’ numeri impari che sono da uno in-
fino a quello numero quadrato impari. ►

⁴ I numeri quadrati si ottengono dalla somma di numeri dispari (vedi in questo capitolo la parte sui numeri figurati).

Exempli gratia. Piglierò 9 per uno de' detti due quadrati, l'altro arò per lo agugnimento di tutti e' numeri impari che sono disotto a 9, cioè 1,3,5,7 de' quali la somma è 16, che è quadrato; el quale, agunto chon 9, fanno 25, che è quadrato.

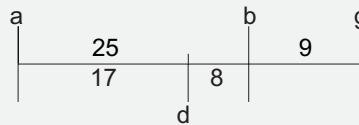
E se vogliamo geometricamente dimostrare tolghinsi alquanti numeri impari inchominciando da unità per ordine, e sien ab, bc, cd, de, ef e sia ef quadrato;



perché ef e ae sono quadrati, perché e' sono fatti dalla aguntione de' numeri impari inchominciando da uno e per ordine ascendendo, cioè ab, bc, cd, de; e tutto af è simigliantemente quadrato. E chosì de' due quadrati ae e ef è fatto el quadrato af.

[...]

E gli è anchora un altro modo a trovare due numeri quadrati che 'loro chongunto faccia numero quadrato, che nel 10 d'Euclide è manifesto⁵.



Sieno due quadrati numeri, insieme pari ovvero impari, cioè che ll'uno e l'altrosia pari o impari⁶; e sieno e' detti quadrati la radicie del ab e bg⁷, dove il chonposto⁸ loro, cioè ag sia pari. E sia ab maggiore che bg, e dividisi ag in 2 parti iguali sechondo il numero d. Adunque intero è ad, perché è la metà del numero ag; e tratto ad del ab⁹, rimarrà db intero. E perché ag numero è diviso igualmente nel punto d e inegualmente nel punto b, sarà la multiplicatione del ab in bg chol¹⁰ quadrato che è fatto dal numero db iguali al quadrato fatto dal numero dg. Ma quello che è fatto del ab in bg è quadrato, chon ciò sia chosa che sieno quadrati e numeri ab e bg, è anchora quello che è fatto di detta multiplicatione quadrato¹¹; e quello che è fatto del db è anchora quadrato.

E chosì sono trovati due quadrati faccienti il loro congiunto numero quadrato, cioè quello che è fatto dal numero dg. Ch'era bisogno trovare. E ne' numeri sia ab 25 e bg sia 9; sarà ag 34 e il ad 17. Adunque il quadrato [di] ad fia 289, che è iguali al quadrato del db e al quadrato fatto del ab in bg¹², cioè 225.

Leonardo Fibonacci, *Liber quadratorum*, cc. 253r-255r.

⁵ Contenuto nel X libro degli Elementi di Euclide.

⁶ I due numeri devono essere o entrambi pari o entrambi dispari (in modo tale che la loro somma sia pari).

⁷ La lunghezza dei segmenti ab e bg.

⁸ La somma.

⁹ Sottratto il segmento ad dal segmento ab.

¹⁰ Sommato.

¹¹ Il prodotto di ab per bg è un quadrato perché ab e bg lo sono.

¹² Il prodotto abbg.

Per interpretare il documento

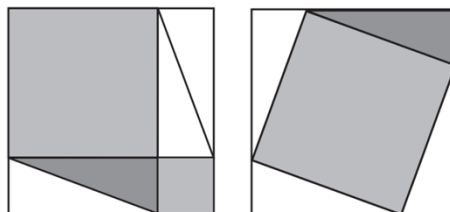
1. Qual è il primo numero quadrato considerato da Fibonacci? Come ottengono il secondo ed il terzo quadrato?
2. Prendi 9 e spiega come ha fatto Fibonacci a ricavare un secondo numero quadrato che sommato a 9 dia un terzo numero quadrato.
3. Fibonacci considera un elenco di numeri dispari successivi che partono da 1 (“ab, bc, cd, de, ef”) e scegliendo di arrivare fino al numero quadrato “ef”. Perché “ae” e “af” sono numeri quadrati?
4. Il numero quadrato “af” è somma di altri due quadrati: quali?
5. Riassumendo, spiega con le tue parole il metodo esposto da Fibonacci per la formazione di una terna pitagorica a partire da un numero quadrato dispari.
6. Nella seconda parte del documento, per quale motivo il “chonposto” è sicuramente pari? Perché “ad” è sicuramente intero?
7. Utilizzando i valori numerici presenti nel documento, mostra che “sarà la multiplicatione del ab in bg chol quadrato che è fatto dal numero db iguali al quadrato fatto dal numero dg”.
8. Utilizzando i valori numerici del documento, mostra che la moltiplicazione di “ab in bg è quadrato”. Se scegli tu valori numerici opportuni, è ancora vera l’affermazione “sieno quadrati e numeri ab e bg, è anchora quello che è fatto di detta multiplicatione quadrato”?
9. “E chosì sono trovati due quadrati faccienti il loro congiunto numero quadrato” vale a dire si sono trovati tre numeri quadrati, la somma dei primi due uguale al terzo: quali sono questi tre numeri?
10. Dai tre numeri precedenti, ricava la terna pitagorica.
11. Riassumendo, illustra il metodo per trovare terne pitagoriche, esposto nella seconda parte del documento.
12. Costruisci qualche terna pitagorica usando il metodo enunciato da Fibonacci nella prima parte del documento.
13. Usa il metodo di Euclide per ricavare una terna pitagorica a partire da due quadrati, uno pari e uno dispari, primi tra loro.
14. Dimostra in modo algebrico la relazione enunciata nel testo: “la multiplicatione del ab in bg chol quadrato che è fatto dal numero db iguali al quadrato fatto dal numero dg” vale a dire $ab \cdot bg + (db)^2 = (dg)^2$ (considera $dg=x$ e $db=y$).
15. Dimostra per via algebrica che il prodotto di due numeri quadrati è ancora un quadrato, giustificando così l’affermazione: “sieno quadrati e numeri ab e bg, è anchora quello che è fatto di detta multiplicatione quadrato”.
16. Se a^2 e b^2 sono i due quadrati di partenza, esprimi in modo generale la relazione enunciata da Fibonacci per le terne pitagoriche nella seconda parte del documento.

Teorema di Pitagora

Nella secondaria di primo grado è **II** teorema: tantissimi sono i problemi che, grazie ad esso, un ragazzo risolve. Nella secondaria superiore lo si trova in numerose applicazioni sia della matematica che della fisica.

Nella storia è stato protagonista di una vicenda che ricorda quella del triangolo aritmetico: esso è apparso in luoghi ed in momenti molto distanti, spesso senza che ci sia stato uno scambio di informazioni. Lo troviamo nell'antico Egitto, in Mesopotamia, in India, in Cina. Ma perché allora chiamarlo 'di Pitagora'? Perché sembra proprio che sia stato lui a dimostrarlo, cioè a far vedere che in **qualsunque** triangolo rettangolo la somma dei quadrati dei due cateti è equivalente al quadrato dell'ipotenusa. Il suo ragionamento potrebbe essere stato il seguente.

I due quadrati 'grandi' sono uguali. Tolti da ciascuno quattro triangoli rettangoli, tutti uguali, rimangono: nel primo i due quadrati costruiti sui cateti, nel secondo il quadrato dell'ipotenusa dei triangoli all'interno dei due quadrati 'grandi'... Ed è quindi dimostrato il teorema di Pitagora.



A SPASSO PER LA STORIA: I LATI E I QUADRATI...

I due piccoli documenti che vengono presentati provengono da epoche molto distanti: il primo è un francobollo greco, il secondo una frase scritta forse 1100 anni prima della nascita di Cristo, in Cina. Uno aiuta a comprendere l'altro.



Francobollo greco dedicato al teorema di Pitagora.

Fai i quadrati del primo e del secondo lato e addizionali; allora la radice quadrata è l'ipotenusa.

Anonimo, *Nove capitoli dell'arte matematica*.

Per interpretare il documento

1. Nell'immagine del francobollo, individua le lunghezze dei lati del triangolo rettangolo (in lati di quadretto) e l'area dei loro quadrati (in quadretti).
2. Addiziona le aree dei quadrati dei cateti e confronta il risultato con l'area del quadrato dell'ipotenusa.
3. Guarda ancora la figura del francobollo ma ora esegui le operazioni indicate nella frase tratta dai *Nove capitoli dell'arte matematica*. Hai ottenuto l'ipotenusa?

... UN PROBLEMA NEL RINASCIMENTO...

Come il padre, il nonno e il fratello, Filippo Calandri (1468-1518) era un abacista (un contabile o un ragioniere, diremmo noi, ma anche un insegnante). Nacque a Firenze. La sua opera principale, pubblicata nel 1491, fu uno dei primi testi di aritmetica a stampa (non un manoscritto!).

Per interpretare il documento

1. Ricava dal testo del problema l'altezza della torre e la larghezza del fiume che passa accanto al suo piede.
2. Qual è la lunghezza della corda che va dalla riva del fiume alla cima della torre? Ricava la risposta dai calcoli eseguiti da Calandri.
3. Calcola anche tu la lunghezza della corda con l'utilizzo del teorema di Pitagora e confronta il tuo procedimento con quello di Calandri: trovi delle diversità?

... PROBLEMI ED EQUAZIONI

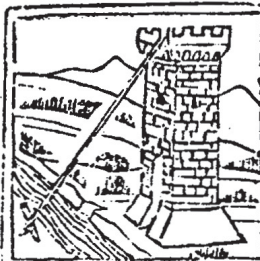
Il seguente problema dell'albero (o del bambù) spezzato è famoso nella storia della matematica. Lo si ritrova in Cina, in India e, più tardi, in Europa: in questo caso è probabile che ci sia stata una migrazione della matematica da Oriente verso Occidente. L'opera dalla quale è tratta l'immagine originale cinese è del 1261.

Eglie una torre che e
alta 40 braccia 7 dap
pie uipaifa uno fiume
che e largo 30 brac
cia. uo sapere quanto
sara lunga una fune
che sia appicata alla ri
ua del fiume 7 alla ci
ma della torre

$$\begin{array}{r}
 40 \quad \text{---} \quad 30 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 40 \quad 30
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1600 \\
 900 \\
 \hline
 2500
 \end{array}$$

la radice di 2500
sara lunga 50 brac
cia



Filippo Calandri, *Aritmetica*.

C'è un bambù alto 10 chih la cui estremità superiore, essendo spezzata, tocca il terreno a 3 chih di distanza dalla base del fusto. A che altezza si trova la frattura?

Soluzione proposta nel documento originale

Prendete il quadrato della distanza tra la base del bambù e il punto dove la cima tocca il terreno, poi dividete la quantità ottenuta per la lunghezza del bambù. Sottraete il risultato dalla lunghezza del bambù e dividete per 2 la differenza. Il risultato fornisce l'altezza del punto in cui il bambù si è spezzato.

Yang Hui, Hsiang Chieh Chiu Chang Suan Fa Tsuan Lei.

Eglie unalbero infu la riva dan fiume elquale e altro 5 o braccia el fiume e largho } o braccia 7 per fortuna di ucto siruppe intal luogo che lacima dellalbero toccaia lriua del fiume. No sapere quante braccia fene ruppe 7 quanto nerimase rito

$$\begin{array}{r} 50 \text{ --- } 30 \\ \sim 50 \sim 500 \sim 30 \\ 100 \mid \quad 900 \\ \hline 1600 \end{array}$$

rimase rito 16 braccia 7 4 braccia fene ruppe



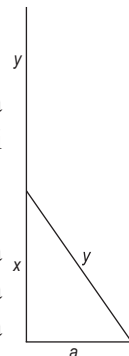
Filippo Calandri, *Aritmetica*



Il "problema del bambù spezzato" come viene illustrato nello Hsiang Chieh Chiu Chang Suan Fa.

Per interpretare il documento

1. Risolvi il problema del bambù spezzato utilizzando un tuo ragionamento.
2. Utilizzando le indicazioni fornite nella precedente soluzione, proposta nel documento originale cinese, scrivi un'espressione che ti permetta di calcolare il valore dell'altezza alla quale il bambù si è spezzato.
3. Cerca ora di capire il senso delle operazioni indicate nella soluzione proposta: a) se non l'hai già fatto, risolvi per via algebrica il problema; b) confronta questa tua soluzione con l'espressione che hai scritto nel precedente esercizio.
4. Risolvi algebricamente anche il problema di Calandri e riesamina i valori numerici presenti nel documento.
5. Esamina la seguente soluzione nella quale sono indicati con x l'altezza alla quale il bambù si è spezzato, con y la parte rimanente, con a la distanza della base del fusto dal punto in cui la cima tocca il terreno: $x = \frac{1}{2} \cdot (x + y - a^2 / (x + y))$ e mostra che è equivalente a $x = ((x + y)^2 - a^2) / (2(x + y))$.



6. Utilizza quest'ultima uguaglianza per interpretare la soluzione indicata da Calandri: calcola anzitutto i valori di $(x+y)^2$, di $2(x+y)$, di a^2 e rintracciali nel documento.
7. Utilizza il procedimento riportato nella soluzione proposta nel caso del problema del bambù, per risolvere il problema di Calandri.
8. Risolvi i seguenti problemi tratti da tavolette babilonesi:
 - “Un bastone lungo 30 unità è appoggiato ad un muro. In alto scivola di 6 unità. Di quanto il piede del bastone si allontana dalla base del muro?”
 - “Trovate il raggio di un cerchio in cui è inscritto un triangolo nel quale un lato è 50, un altro ancora 50, il terzo 1;0” (vale a dire 60 unità: osserva che viene utilizzata la numerazione sessagesimale, illustrata nel primo capitolo e ripresa in questo secondo per il calcolo della radice di 2).
9. Risolvi il seguente problema tratto ancora dallo *Chiu Chang*:
 - “Sotto un albero alto 20 chih e con una circonferenza di 3 chih cresce una sagittaria rampicante che si avvolge sette volte attorno al tronco e raggiunge esattamente la cima dell'albero. Quanto è lunga la pianta rampicante?” (1 chih è uguale a circa 23 cm).

Fai le tue ipotesi

1. Formula un tuo parere sulle soluzioni fornite dai due autori nei precedenti documenti: a loro mancava un simbolismo evoluto come il nostro, come avranno fatto a risalire alla soluzione?

Punti lontani

Molti problemi geometrici nella storia hanno riguardato le opere dell'uomo. In civiltà diverse (Cina, Medio Oriente, Grecia,...) sono apparsi problemi analoghi, legati alla determinazione della distanza di un punto inaccessibile come la sommità di un edificio. Un altro interessante problema è stato quello di stabilire la direzione lungo la quale scavare un tunnel attraverso una montagna, dopo aver stabilito i suoi punti estremi.

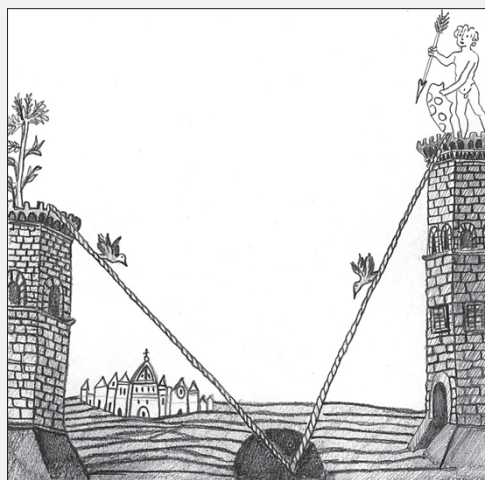
DI TORRI ED ALTRI EDIFICI

Il primo degli esempi qui riportati è tratto dal *Liber Abbaci* di Leonardo Pisano, detto Fibonacci, ed è corredato da un'illustrazione tratta dall'opera di Filippo Calandri. Il secondo esempio è tratto dall'opera di Cosimo Bartoli (1503-1572), *Del modo di misurare le distanze* (Venezia, Franceschi, 1564).

In quodam plano sunt due turres, quarum una est alta passibus 30, altera 40, et distant in solo passibus 50; infra quas est fons, ad cuius centrum volitant due aves pari volatu, descendentes pariter ex altitude ipsarum; queritur distantia centri ab utraque turri.

Su di un piano ci sono due torri, delle quali una è alta 30 passi, l'altra 40, che distano alla base 50 passi; tra di esse c'è una fonte verso il cui centro volano due uccelli, con la stessa velocità, che scendono contemporaneamente dalle sommità e assieme arrivano; si chiede la distanza del centro [della fonte] da entrambe le torri.

Leonardo Pisano, *Liber Abbaci*.



Filippo Calandri, *Aritmetica*.

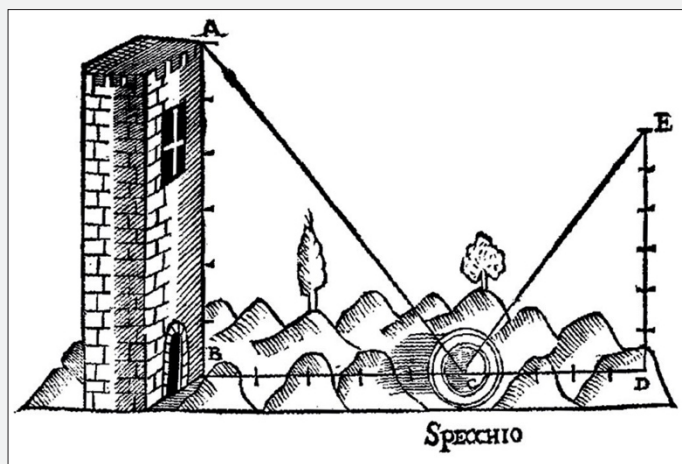
Per interpretare il documento

1. Riporta sul disegno di Calandri i dati che trovi nel testo di Leonardo Pisano.
2. Nel documento, trova come sono fra di loro le velocità dei due uccelli.
3. I due uccelli partono e arrivano assieme: come sono le distanze da essi percorse?

4. Risolvi il problema di Leonardo Pisano illustrando il metodo da te utilizzato ad esempio: per prove ed errori, con il disegno o con il calcolo,...

Piglisi uno specchio piano come sarebbe una sfera di acciaio o di cristallo, e pongasi a diacere sopra il piano del terreno. Bisogna di poi accostarsi, o discostarsi tanto a detto specchio che si vegga in esso rappresentarsi la cima della torre, o casa da misurarsi; oltre a questo mandisi dall'occhio [...] a terra un filo col piombino.

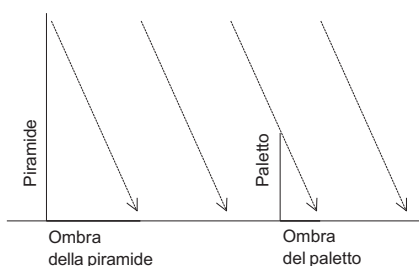
[...] ne vò mancare di dire, che questa operazione si può fare con un vaso di acqua in cambio dello specchio.



Cosimo Bartoli, *Del modo di misurare le distanze*, cap. XII.

Per interpretare il documento

1. Rifletti: a cosa serve il “filo col piombino” (filo a piombo usato dai muratori) nel realizzare l’esperienza descritta da Bartoli?
2. Nell’immagine, compaiono due triangoli rettangoli: come fai a capire che sono simili?
3. I triangoli hanno i lati in proporzione. Se immagini di conoscere i cateti del minore e la distanza dello specchio dalla base della torre, descrivi come puoi calcolare l’altezza di quest’ultima.
Ora assegna tu le misure dei cateti del triangolo minore e la distanza dello specchio dalla base della torre e quindi calcola l’altezza di quest’ultima.
4. Un celebre metodo per determinare l’altezza di un edificio (tradizionalmente una piramide) viene attribuito a Talete di Mileto (ca. 624-ca. 546 a.C.) e consiste nel misurare l’altezza di un paletto infisso nel terreno e la lunghezza delle ombre (del paletto e della piramide).



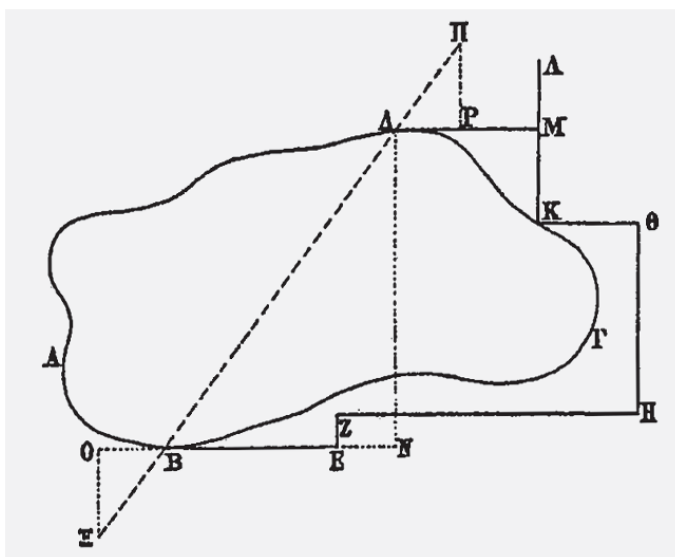
Analogamente a quanto fatto a proposito del documento di Bartoli, assegna valori numerici verosimili alle lunghezze delle ombre e all'altezza del paletto e determina con il calcolo l'altezza della piramide.

COME SCAVARE UN TUNNEL E NON SBUCARE NEL PUNTO SBAGLIATO

Il terzo documento è molto più antico dei precedenti ma viene riportato per ultimo considerata la sua maggiore complessità.

Lo storico greco Erodoto descrisse un tunnel realizzato sull'isola di Samo circa nel 530 a.C., lungo oltre 1 000 metri e destinato ad essere utilizzato come conduttura dell'acqua. Sino alla fine del Diciannovesimo secolo si perse ogni traccia dell'opera ma successivamente gli scavi archeologici confermarono la sua esistenza e la descrizione di Erodoto si rivelò del tutto attendibile.

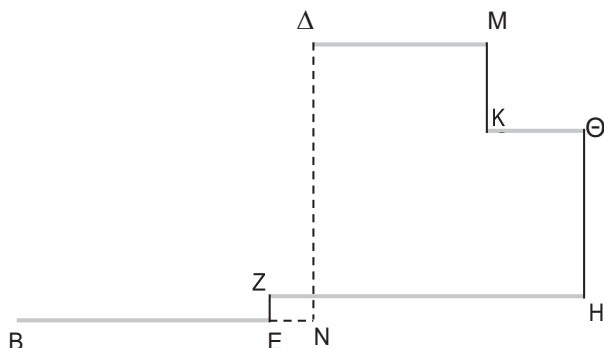
Il problema affrontato nel documento è il seguente: “Si deve scavare un tunnel rettilineo fra due punti separati da una montagna: da ciascuno dei due punti non si vede l'altro. Come si può fare a prendere la corretta direzione lungo la quale scavare?”



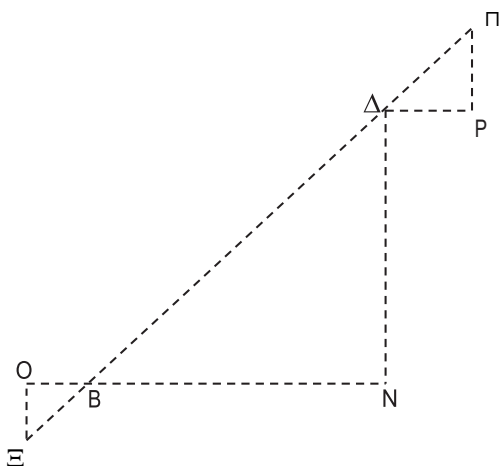
Il metodo di Erone per la realizzazione di un tunnel

Per interpretare il documento

1. Nella mappa sopra riportata, la figura curvilinea rappresenta la collina in cui si vuole realizzare il tunnel, vista dall'alto. B e Δ indicano le imboccature del traforo. Oltre che della corda metrica, Erone di Alessandria (vissuto in un periodo fra il 100 a.C. e il 100 d.C.) disponeva di uno squadro, strumento che consentiva di tracciare angoli retti. Se BE fosse lungo 500 passi, EZ 60, ZH 650, H Θ 350, Θ K 200, KM 180, M Δ 350, stabilisci le lunghezze di BN e N Δ .



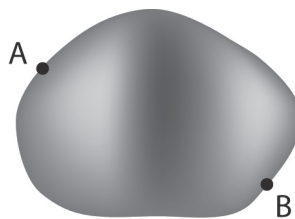
2. I triangoli O Ξ B e Δ P Π sono simili a BN Δ : come sono stati disegnati? Rifletti e poi prosegui con le domande successive.



3. Supponiamo che OB sia lungo 150 passi e Δ P sia lungo 200 passi. Sfruttando la similitudine, stabilisci le lunghezze dei cateti mancanti dei triangoli O Ξ B e di Δ P Π

in modo da riuscire a individuare la direzione $\Pi\Delta$, che permette di iniziare lo scavo del tunnel a partire da Δ , e la direzione ΞB , per iniziare a scavare in B.

4. Immagina Erone all'opera: da quale punto avrà iniziato a tracciare 'segmenti ed angoli retti', da B o da Δ ? Per quale motivo il segmento $K\Lambda$ è così lungo?
5. Riporta su carta quadrettata il disegno seguente, che rappresenta una collina vista dall'alto, nella quale si vuole realizzare un tunnel che abbia come estremi i punti A e B. Immagina ancora Erone all'opera; disegna la spezzata che egli potrebbe aver tracciato sul terreno, assegna tu le misure e ripeti i calcoli come nella prima attività.



Fai le tue ipotesi

- 1 Osserva ancora la spezzata che appare nel documento: perché è stato necessario che fosse formata da così tanti segmenti?

$$\sqrt{2}$$

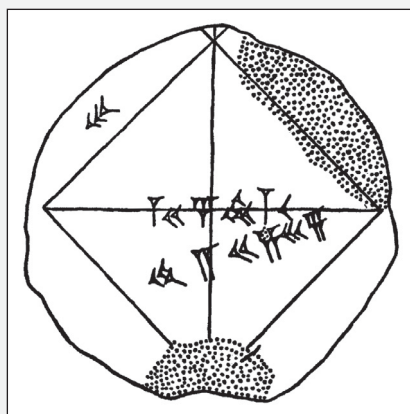
$\sqrt{2}$ merita un'attenzione speciale, come π che trovi più avanti. Sono entrambi numeri irrazionali, non si possono, cioè, scrivere sotto forma di frazione. Questa scoperta mise in crisi i Pitagorici ed uno di loro, Ippaso di Metaponto, si dice che venne ucciso con l'accusa di aver rivelato ad altri il 'segreto', ritenuto pericoloso in quanto il pensiero pitagorico era basato sull'interpretazione della natura esclusivamente attraverso i rapporti tra numeri interi.

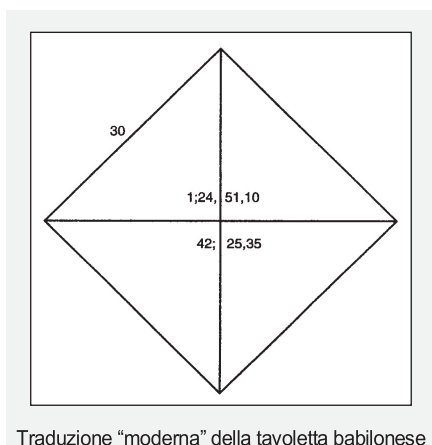
COME AVRANNO FATTO?

Ancora ci si sorprende che i Babilonesi siano riusciti a trovare, circa 2000 anni prima di Cristo, molto prima del periodo in cui visse Pitagora, un valore che approssima così bene $\sqrt{2}$. Non è stato in effetti stabilito con certezza quale fosse la tecnica seguita, ma si possono fare delle ipotesi che vedrai illustrate più avanti.



Tavoletta babilonese.





Traduzione "moderna" della tavoletta babilonese

Per interpretare il documento

1. Calcola il valore di $\sqrt{2}$ (come numero decimale) desumendolo dalle figure precedenti: rivedi le attività *Per interpretare il documento* relative ai Babilonesi nel capitolo sulla numerazione e ricorda che $1;24,51,10 = 1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3$.
2. Secondo lo storico della scienza Otto Neugebauer (1899-1990), i Babilonesi avrebbero utilizzato un algoritmo che può essere tradotto così (conserviamo la scrittura sessagesimale dei numeri): fai una stima anche grossolana di $\sqrt{2}$ e prendi, ad esempio, $1;30$; esegui la di-

visione $2/1;30$ che ha come risultato $1;20$; quindi $1;30$ sarà troppo grande e $1;20$ troppo piccolo (avremmo dovuto ottenere due valori uguali); prendiamo la media $1;25$; calcoliamo $2/1;25$ che è uguale a $1;24,42,21$; quindi $1;25$ è troppo grande e $1;24,42,21$ troppo piccolo; facciamo la media e troviamo $1;24,51,10$ che è il valore della tavoletta.

Ricordando che $1;30 = 1 + 30/60 = 1 + 1/2$, rifai i calcoli dei Babilonesi in scrittura frazionaria moderna e poi in scrittura decimale servendoti di una calcolatrice.

3. Utilizzando ancora l'algoritmo attribuito ai Babilonesi cerca altre cifre dello svi-luppo decimale di $\sqrt{2}$.
4. Utilizza l'algoritmo per trovare la radice quadrata (eventualmente approssimata) di altri numeri.
5. Scrivi la lunghezza della diagonale che compare sulla tavoletta ($42;25,35$) come numero decimale. Calcola poi il rapporto fra essa e la lunghezza del lato del quadrato (30). Confronta il risultato con il valore di $\sqrt{2}$ trovato sopra.

π

Il cerchio, fin dalla preistoria, è stato la figura geometrica forse più facile da disegnare: bastava piantare un paletto, attaccargli una corda e... fare un giro (ben altre difficoltà creava il quadrato, soprattutto per la costruzione degli angoli retti...).

QUALE SARÀ IL VALORE VERO?

Il diametro e la circonferenza sono direttamente proporzionali: per trovare la lunghezza della circonferenza basterà moltiplicare il diametro per un certo numero. Come trovare questo numero? La domanda se la sono posta in molti, nel passato. Le risposte sono state un 'avvicinarsi' progressivo al valore vero.

Fece un bacino di metallo fuso di dieci cubiti da un orlo all'altro, rotondo; la sua altezza era di cinque cubiti e la sua circonferenza di trenta cubiti.

Bibbia, *Primo Libro dei Re* 7,23.

Proposizione 2

Il cerchio ha rispetto al quadrato il rapporto che 11 ha rispetto al 14. [...]

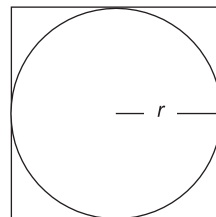
Proposizione 3

La circonferenza di un cerchio è tripla del diametro e lo supera ancora di meno di un settimo del diametro, e di più di dieci settantunesimi.

Archimede, *Misura del cerchio*.

Per interpretare il documento

1. Nel *Libro dei Re*, per quale numero si pensava andasse moltiplicato il diametro per ottenere la circonferenza, cioè quale numero era considerato come il rapporto fra la circonferenza e il diametro?
2. Ricorda che l'area di un cerchio si può trovare moltiplicando il quadrato del raggio per π (vedi i documenti di Kepler e Archimede nella parte sulle radici antiche degli infinitesimi - prima di Leibniz e Newton - terzo capitolo).
 - a. Scrivi il rapporto fra l'area del cerchio di raggio r e quella del quadrato circoscritto (vedi figura a fianco) semplifica la

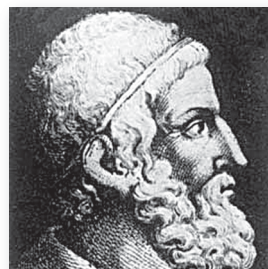


frazione, individua il valore di questo rapporto dalla Proposizione 2 di Archimede e scrivi un'uguaglianza.

- b. Dalla precedente uguaglianza, ricava il valore di π ed esprimilo sotto forma di numero decimale.
3. Stabilisci quale fra i valori $3+1/7$ e $3+10/71$ è il maggiore.
4. Dalla Proposizione 3, ricava fra quali valori è compreso π .
5. Confronta i valori di π ricavati dalla Proposizione 2 e dalla Proposizione 3: il valore ottenuto dalla Proposizione 2 costituisce un'approssimazione per eccesso o per difetto?

Archimede

Era inevitabile dedicargli uno spazio tutto suo, dopo averlo incontrato parlando di un numero famoso, π ! Archimede è quasi universalmente riconosciuto come il più importante matematico dell'Antichità: per l'originalità del suo pensiero, per la suggestione che esercita la sua vicenda personale.



Archimede (287-212 a.C.)

UNA RAFFICA DI PROPOSIZIONI

Archimede (287-212 a.C.) nacque a Siracusa e studiò ad Alessandria. Si occupò di geometria, di aritmetica, di fisica, di metodologia della scienza. Realizzò macchine da guerra utilizzate contro i Romani durante l'assedio di Siracusa. Secondo la versione più nota della sua morte, venne ucciso da un soldato romano che lo colpì alle spalle mentre era assorto nei suoi studi.

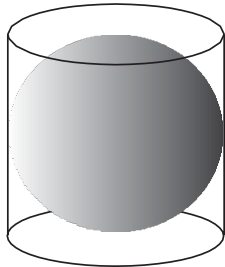
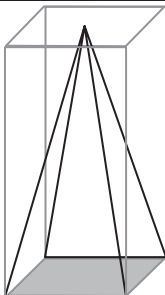
Nel documento che segue, Archimede cita un altro grande matematico greco: Eudosso di Cnido (408?-355? a.C.).

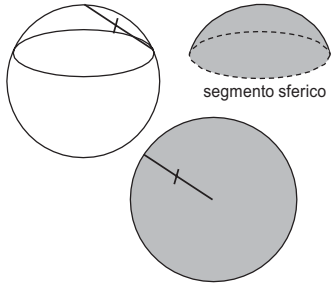
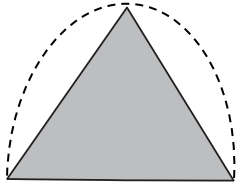
[...] ogni sezione compresa da una retta e da una *sezione di cono rettangolo* [parabola] supera di un terzo il triangolo avente la stessa base della sezione e uguale altezza. In seguito, essendomi imbattuto in teoremi degni di considerazione, composi le loro dimostrazioni. Sono questi: dapprima che la superficie di ogni sfera è quadrupla del suo circolo massimo, poi che alla superficie di qualunque segmento sferico è uguale il cerchio, il raggio del quale sia uguale alla retta condotta dal vertice della sezione alla circonferenza del cerchio che è base della sezione. Oltre a questi: che per qualunque sfera, il cilindro avente la base uguale al circolo massimo della sfera e l'altezza uguale al diametro della sfera supera della metà la sfera, e così la sua superficie [totale] supera della metà la superficie della sfera. Queste proprietà erano da sempre attinenti alla natura delle figure menzionate ed erano ignorate da coloro che prima di noi si occuparono di geometria [...] Perciò non ho esitato a portare queste proposizioni accanto a quelle trovate da altri geometri, ed a quei teoremi, che sembrano di molto superiori, che Eudosso stabilì sulle figure solide, cioè che ogni piramide è la terza parte del prisma avente la stessa base della piramide e uguale altezza, e che ogni cono è la terza parte del cilindro avente la stessa base del cono e uguale altezza: e infatti per queste proprietà appartenenti da sempre alla natura di queste figure accadde che dei molti degni geometri anteriori a Eudosso tutti le ignorarono e nessuno le comprese. È ora data la possibilità ai competenti di esaminare queste proposizioni.

Archimede, *Sulla sfera e il cilindro*.

Per interpretare il documento

1. Completa la tabella seguente:

Proposizione tratta dal documento	La proposizione è attribuita ad Archimede/Eudosso	Figura che illustra la proposizione
“[...] il cilindro avente la base uguale al circolo massimo della sfera e l'altezza uguale al diametro della sfera supera della metà la sfera, e così la sua superficie [totale] supera della metà la superficie della sfera.”	Archimede	
“[...] la superficie di ogni sfera è quadrupla del suo circolo massimo [...]”		
“[...] ogni cono è la terza parte del cilindro avente la stessa base del cono e uguale altezza.”		
		

Proposizione tratta dal documento	La proposizione è attribuita ad Archimede/Eudosso	Figura che illustra la proposizione
		
		

- Esprimi, con una formula, l'area di una “sezione compresa da una retta e da una sezione di cono rettangolo [parabola]” (A_p) in funzione dell'area del triangolo (A_t) “avente la stessa base della sezione ed uguale altezza”.
- Sapendo che l'area di un cerchio di raggio r è uguale a $r^2\pi$, esprimi l'area della superficie sferica con riferimento al cerchio massimo.
- Esprimi la superficie totale ed il volume di un cilindro, avente il diametro uguale all'altezza, in funzione, rispettivamente, della superficie e del volume della sfera avente lo stesso diametro.
- Dopo aver individuato nel documento il riferimento ad Eudosso, esprimi il volume della piramide in funzione di quello del prisma e quello del cono in funzione di quello del cilindro.

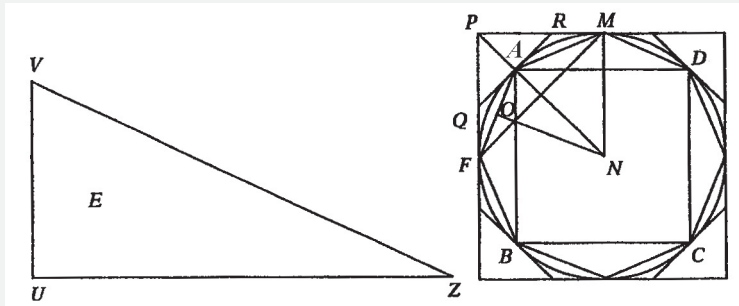
L'AREA DEL CERCHIO E IL METODO DI ESAUSTIONE

Il problema di trovare l'area del cerchio è stato oggetto di studio fin dai tempi più antichi. Archimede lo affrontò con il metodo di *esaustione*.

Il documento che segue riporta solo l'enunciato della proposizione, le figure a cui si è appoggiata la dimostrazione di Archimede e la conclusione che ribadisce l'enunciato iniziale: ricostruiremo attraverso l'interpretazione delle figure i passi essenziali del metodo di esaustione.

Ogni cerchio è uguale ad un triangolo rettangolo se ha il raggio uguale ad un cateto e la circonferenza uguale alla base [l'altro cateto].

[...]



Per interpretare il documento

1. Supponiamo che l'area del cerchio (A_c), sia maggiore rispetto a quella del triangolo (A_t): sarà maggiore di un 'pochino', diciamo p , e quindi potremo scrivere $A_c = A_t + p$. In figura compaiono dei poligoni inscritti nel cerchio, per la precisione un

.....
Aumentando il numero dei lati di questi poligoni inscritti aumenterà anche la loro area e uno di essi arriverà ad avere *un'area più grande di quella del triangolo* (ma ovviamente più piccola di quella del cerchio); *il suo perimetro sarà minore della base* del triangolo (che è lunga quanto la circonferenza), *il suo apotema sarà minore del primo cateto* (che è lungo quanto il raggio)... Ecco un fatto impossibile: spiega perché, dopo aver ricordato come si possono trovare l'area di un poligono regolare e quella di un triangolo.

2. Supponiamo allora che l'area del triangolo sia maggiore di quella del cerchio: $A_t = A_c + p$. Consideriamo i poligoni circoscritti; aumentando il numero dei lati, uno verrà ad avere area minore di quella
il suo perimetro però sarà della base del triangolo; il suo apotema sarà al primo cateto. Ciò è ancora impossibile, perché

[...] Dunque il cerchio è uguale al triangolo E.

Archimede, *Misura del cerchio*.

Coordinate... cartesiane?

L'invenzione della geometria analitica è stata resa possibile dal progresso dell'algebra. Per tradizione la geometria, da una parte, e l'aritmetica, dall'altra, erano due rami distinti della matematica: geometria e algebra dal 1600 in poi hanno cominciato a coesistere grazie al nuovo metodo.

Oggi troviamo gli assi cartesiani non solo nei libri di matematica, ma anche in quelli di fisica, di scienze naturali, di economia...: sono stati proprio una grande idea! Forse, però, il merito non va dato tutto a Cartesio: qualcuno dice che già i Babilonesi abbiano utilizzato qualcosa di analogo. Noi partiamo con un esempio un po' più recente...

NEL 1300

Nicola Oresme (1323?-1382) era un dotto parigino, poi diventato vescovo. Il suo *Tractatus de latitudinibus formarum* comparve in varie edizioni inizialmente manoscritte e poi, a partire dal 1482, stampate. I suoi termini "latitudine" e "longitudine" corrispondono ai nostri ordinata ed ascissa. Fece uso di diagrammi per rappresentare il variare di grandezze, fra cui la velocità.



Nicola Oresme
(1323?-1382)

latitudo uniformis

latitudo diffinita

diffinitio per se tota

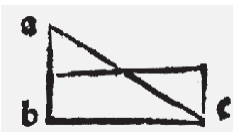
in se tota

[...] Qualsiasi qualità uniformemente difforme che termina con intensità zero viene immaginata come un triangolo rettangolo[...]

Nicola Oresme, *Tractatus de latitudinibus formarum*, Incipit.

Per interpretare il documento

1. Se nelle figure la “longitudine” riporta il tempo e la “latitudine” la velocità, quale dei disegni può rappresentare un moto uniforme? Quale un moto uniformemente decelerato?
2. Dopo aver, facilmente, individuato a quale dei disegni si riferisce il testo di Oresme, interpreta l’espressione “qualità uniformemente difforme”.
3. Prendiamo un altro piccolo frammento dell’opera di Oresme (dal testo abbiamo ricavato le informazioni che riguardano la figura a fianco). Dunque, il triangolo rettangolo abc risulta equivalente al rettangolo (l’area di abc è uguale a quella del rettangolo). Se l’altezza ab del triangolo rappresenta la velocità iniziale, cosa rappresenta l’altezza del rettangolo? Cosa rappresenta la sua area?
4. Oresme ti rivela la risposta all’ultima domanda precedente: “L’area di abc rappresenta la distanza percorsa”. Se la base rappresenta il tempo trascorso, giustifica l’affermazione eventualmente utilizzando il libro di fisica.
5. Con riferimento ai due quesiti precedenti, spiega com’è possibile in generale determinare la distanza percorsa nel moto uniformemente accelerato (che può avere, eventualmente, accelerazione negativa...) utilizzando il concetto di velocità media.



UNO DEI PADRI

Oltre che per i suoi contributi alla teoria dei numeri e al calcolo delle probabilità, Pierre de Fermat (1601-1665) viene ricordato nella storia della matematica per essere stato uno dei padri della geometria analitica.

Sull’argomento scrisse un’opera in latino nella quale introdusse i metodi che utilizziamo ancora oggi.

Egli condivide il merito, del nuovo modo di utilizzare geometria e algebra assieme, con René Descartes (Cartesio) e oggi si è soliti parlare di *coordinate cartesiane*.



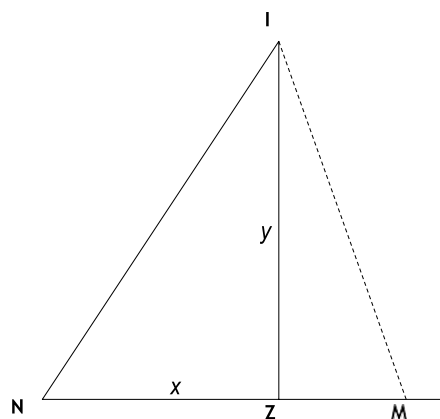
Pierre de Fermat
(1601-1665)

Ogni volta che in una equazione si hanno due quantità incognite, si ha un luogo, poiché l’estremità di una di esse descrive una retta oppure una curva.

La linea retta è semplice ed unica nel suo genere; le specie di curve sono in numero infinito: cerchio, parabola, iperbole, ellisse, ecc.

[...]





Per stabilire le equazioni, è comodo prendere le due quantità incognite sotto un angolo dato, angolo che abitualmente supporremo retto, e fissare la posizione e l'estremità di una di esse.

Sia NZM una retta di cui è data la posizione e sulla quale è stato fissato il punto N. Si ponga NZ uguale alla quantità incognita x , e si ponga la retta ZI (condotta perpendicolarmente alla NZ per I) uguale all'altra quantità incognita y .

Sia $dx = by$

Allora il punto I sarà su una retta, la cui posizione è nota.

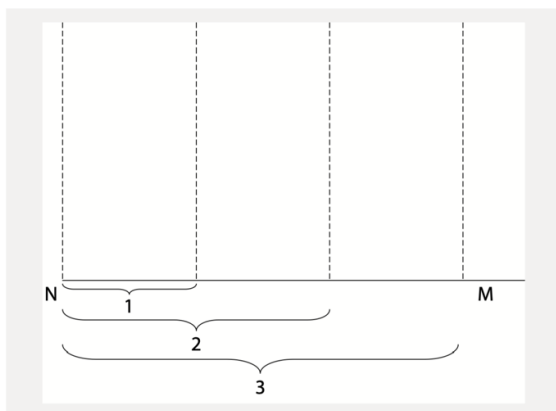
Pierre de Fermat,
Ad locos planos et solidos isagoge.

Per interpretare il documento

1. Indica quale punto nella figura precedente rappresenta quella che noi chiamiamo *origine degli assi*.
2. Scegli tu due valori di b e d . Determina la pendenza della retta $dx = by$.
3. Completa poi la tabella, in modo che le “quantità incognite” x e y soddisfino la relazione $dx = by$.

x	0	1	2	3
y				

Riporta i valori di y nella rappresentazione seguente, che riprende quella utilizzata da Fermat nel documento, scegliendo eventualmente una scala diversa per le ordinate.



4. Utilizziamo ora il ragionamento di Fermat nel caso di due funzioni “notevoli”. Rifai quest'ultimo disegno, ma ora riporta sulle linee tratteggiate i valori che ottieni utilizzando la legge $y=x^2$; ripeti con la legge $y=2^x$.

La geometria, di Euclide e non

Della vita di Euclide si sa poco: che fondò una scuola ad Alessandria d'Egitto, che visse al tempo di Tolomeo I il quale regnò fra il 306 e il 283 a.C. La sua opera principale, gli Elementi, è il libro che ha avuto il maggior numero di edizioni, Bibbia esclusa. Comprende geometria e aritmetica. È una pietra miliare nell'edificio della conoscenza umana, non solo della matematica. Con Euclide si può dire che giunse a compimento un lungo lavoro di ricerca. La geometria era nata per scopi pratici: gli storici parlano di un'origine empirica in Egitto e in Mesopotamia. I pensatori greci erano invece orientati alla ricerca della sua fondazione razionale ed Euclide ha fornito nella sua opera un'esposizione che nei secoli successivi è rimasta un modello indiscusso. Fino a quando, però, qualcuno ha cominciato a riflettere in modo meno 'disincantato'...



Euclide
(325? a.C.-265? a.C)

UN'INTRODUZIONE, AUTOREVOLE MA...

Ecco, anzitutto, un breve documento di Aristotele che indica in cosa consiste la fondazione razionale della geometria. In esso viene sottolineata l'importanza della dimostrazione. (A onor del vero, nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi* di Galileo compare che i filosofi della scuola di Aristotele sconsigliavano lo studio delle matematiche "come quelle che rendono l'intelletto cavilloso ed inabile al ben filosofare", contrariamente a Platone "che non ammetteva alla filosofia se non chi prima si fosse impossessato della geometria" (VII, 423)).

E allora, dato che le dimostrazioni sono universali, e che gli oggetti universali non possono venir percepiti, è evidente che non sarà neppure possibile una conoscenza dimostrativa attraverso la sensazione. Risulta chiaro, piuttosto, che anche se si potesse percepire che nel triangolo la somma degli angoli è uguale a due retti, noi dovremmo ricercare la dimostrazione della cosa, e tale proposizione non sarebbe ancora conosciuta da noi, come pure taluni sostengono. La sensazione si rivolge infatti necessariamente all'oggetto singolo, mentre la scienza consiste nel render noto l'oggetto universale.

Aristotele, citato in G.T. Bagni, 1996, *Storia della matematica*, vol. I, p. 60.

Per interpretare il documento

1. Riformula il brano di Aristotele utilizzando le seguenti parole-chiave: sensazione, oggetti singoli, oggetti universali, dimostrazione.

GLI ELEMENTI: QUASI UNA BIBBIA

Nella prima parte degli *Elementi* sono spiegati i *Termini*; seguono i *Postulati* (proposizioni non dimostrate, di argomento specificamente geometrico) e le *Nozioni comuni* (proposizioni di carattere generale).

Termini

1. **PUNTO** è ciò che non ha parti.
2. **LINEA** [è] una lunghezza senza larghezza.
3. **ESTREMI DI UNA LINEA** sono punti.
4. **LINEA RETTA** è quella che è posta in pari rispetto ai suoi punti.
5. **SUPERFICIE** è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.
6. **ESTREMI DI UNA SUPERFICIE** son linee.
7. **SUPERFICIE PIANA** è quella posta in pari rispetto alle sue rette.
8. **ANGOLO PIANO** è l'inclinazione di due linee in un piano che si toccano, ma non sono per diritto.
9. Quando le linee comprendenti un angolo son rette, l'angolo si chiama **RETTILINEO**.
10. Se una retta posta sopra una retta, fa gli angoli adiacenti eguali tra loro, ognuno dei due angoli eguali è **RETTO**, e la retta posta si chiama **PERPENDICOLARE** a quella su cui è stata posta.
11. **ANGOLO OTTUSO** è quello maggiore di un retto.
12. **ACUTO** è quello minore di un retto.
13. **TERMINE** è l'estremo di qualche cosa.
14. **FIGURA** è ciò che è compreso da uno o più termini.
15. **CIRCOLO** è una figura piana, compresa da una sola linea, tale che tutte le rette condotte ad essa da un punto posto entro la figura, sono eguali tra loro.
16. **CENTRO DEL CIRCOLO** si chiama quel punto.
17. **DIAMETRO DEL CIRCOLO** è una retta condotta per il centro, e terminata ad ognuna delle parti alla circonferenza del circolo, la quale divide anche il circolo per metà.
18. **SEMICIRCOLO** è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata. Il centro del semicircolo è lo stesso del centro del circolo.
19. **FIGURE RETTILINEE** sono quelle comprese da rette, **TRILATERE** da tre, **QUADRILATERE** da quattro, **MULTILATERE** quelle comprese da più di quattro.
20. Tra le figure trilatere è **TRIANGOLO EQUILATERO** quello che ha i tre lati eguali; **ISOSCELE** quello che ha due soli lati eguali; **SCALENO** quello che ha i tre lati diseguali.



21. Inoltre tra le figure trilateri, è **TRIANGOLO RETTANGOLO** quello che ha un angolo retto, **OTTUSANGOLO** quello che ha un angolo ottuso, **ACUTANGOLO** quello che ha i tre angoli acuti.
22. Tra le figure quadrilateri è **QUADRATO** quella che è equilatera e rettangola; **OBLUNGO** quella che è rettangola ma non equilatera; **ROMBO** quella che è equilatera ma non rettangola; **ROMBOIDE** quella che ha gli angoli e i lati opposti eguali tra loro, ma non è né equilatera né rettangola; si chiamano **TRAPEZII** tutti gli altri quadrilateri.
23. **PARALLELE** sono rette, le quali sono nello stesso piano, e prolungate all'infinito da ognuna delle due parti, da nessuna delle due parti si incontrano tra loro.

Postulati

1. Si ammette di poter tirare da ogni punto ad ogni [altro] punto, una linea retta;
2. e di poter prolungare continuamente per diritto una linea retta terminata;
3. e con ogni centro e con ogni distanza descrivere un circolo;
4. e che tutti gli angoli retti sono eguali tra loro;
5. e che se una retta incontrando due rette, fa gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate all'infinito, si incontrano da quella parte nella quale gli angoli sono minori di due retti.

Nozioni comuni

1. Le cose eguali ad una stessa, sono eguali tra loro;
2. e se a cose eguali si aggiungono cose eguali, i tutti sono eguali;
3. e se da cose eguali si tolgono cose eguali, i resti sono eguali;
4. e le cose sovrappontesi l'una sull'altra, sono eguali tra loro;
5. e il tutto è maggior della parte.

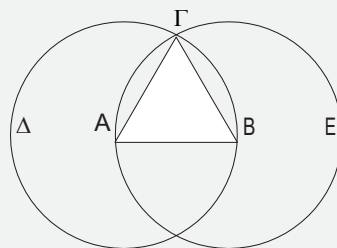
Libro Primo

1. *Sopra una retta data terminata, costruire un triangolo equilatero.*

Sia AB la retta data terminata.

Si deve sulla retta AB costruire un triangolo equilatero.

Con centro A e distanza AB si descriva (P3)¹³ il circolo BΓΔ, e di nuovo con centro B e distanza BA si descriva (P3) il circolo AΓE, e dal punto in cui i circoli si tagliano tra loro, si conducano (P1) ai punti A, B le rette ΓA, ΓB.



¹³ P3 sta per *postulato 3* e, nel prosieguo del documento, T15 per *termine 15*, C1 per *nozione comune 1*, ecc.

E poiché il punto A è centro del circolo $\Gamma\Delta B$, la $A\Gamma$ è eguale (*T15*) alla AB. E di nuovo, poiché il punto B è centro del circolo $\Gamma A E$, la $B\Gamma$ è eguale alla BA (*T15*). Ma si è già dimostrato che ΓA è eguale alla AB. Dunque ognuna delle ΓA , ΓB è eguale alla AB. Ma cose eguali ad una stessa sono eguali tra loro (*C1*), dunque la ΓA è eguale alla ΓB . Dunque le tre ΓA , AB, $B\Gamma$ sono eguali tra loro.

Dunque il triangolo $AB\Gamma$ è equilatero ed è costruito sulla retta data terminata AB, come dovevasi fare.

Euclide di Alessandria, *Elementi*, I libro

Per interpretare il documento

1. Ricerca le risposte corrette nel documento tratto dagli *Elementi* di Euclide.
 - I. L'estremo di qualche cosa è detto:**
 - a. punto;
 - b. estremo di una superficie;
 - c. termine;
 - d. linea.
 - II. Romboide è una figura quadrilatera che:**
 - a. è equilatera;
 - b. è equilatera e rettangola;
 - c. ha i lati e gli angoli opposti uguali tra loro;
 - d. ha i lati e gli angoli opposti uguali tra loro, ma non è né equilatera, né rettangola.
 - III. Si ammette di poter:**
 - a. con ogni centro e con ogni distanza descrivere un circolo;
 - b. con ogni distanza descrivere un circolo;
 - c. con ogni centro descrivere un circolo;
 - d. sempre descrivere un circolo.
 - IV. Se da cose eguali si tolgono cose eguali:**
 - a. sono eguali;
 - b. i resti sono eguali;
 - c. i tutti e i resti sono eguali;
 - d. le cose eguali, i tutti e i resti sono eguali.
2. Rivedi il termine *oblungo*: a quale figura, indicata con un termine attuale, corrisponde?
3. Rivedi la definizione di trapezio del tuo libro di geometria e confrontala con quanto trovi nel documento. Traccia almeno tre figure che 'diano l'idea' di essere *trapezii* nel senso indicato da Euclide (fai in modo che i tre esempi abbiano il minor numero di proprietà comuni che ti è possibile).

4. Ecco, riportati in modo schematico, alcuni passaggi della dimostrazione del *Teorema I. del Libro Primo*: completa tu le indicazioni, ricavandole dal documento.
 - I. Tracciare il primo cerchio
 - II. Tracciare il secondo cerchio
 - III. Tracciare le rette (segmenti)
 - IV. La AF è eguale alla AB poiché
 - V. La BF è eguale alla BA poiché
 - VI. $\angle A$, $\angle B$, $\angle F$ sono eguali tra loro poiché
 - VII. Il triangolo ABF
5. Leibniz scoprì che la dimostrazione del primo teorema degli *Elementi* contiene una lacuna: prova a rivederla e a scoprire quale potrebbe essere questa lacuna (in effetti nessun postulato assicura che i due cerchi si incontrino...).
6. “Il tutto è maggiore della parte”. Confronta questa affermazione con quanto riportato nei documenti sull’infinito nel terzo capitolo, allorquando Galileo mostra che l’insieme dei numeri naturali è in corrispondenza biunivoca con quello dei quadrati perfetti: individua negli altri documenti dello stesso capitolo ulteriori esempi dai quali risulti che il tutto *non* è “maggiore della parte”.

DUE MILLENNI DOPO

Posidonio (I sec. a.C.) e Tolomeo (II sec. d.C.) tentarono di dimostrare il quinto postulato (delle parallele). Si è dovuto attendere però fino al 1700 (ricordiamo il matematico italiano Gerolamo Saccheri) e al 1800 (con il grande matematico tedesco Karl Friedrich Gauss, l’ungherese János Bolyai ed il russo Nikolaj Ivanovic Lobacevskij (1792-1856)) perché ci fosse un chiarimento: il quinto postulato è indipendente dagli altri, cioè non può essere dimostrato partendo da essi. Nel frattempo molti matematici avevano affrontato la questione. Particolarmente interessanti sono i tentativi di Gerolamo Saccheri (1667-1733). Egli sostituì al quinto postulato di Euclide altre proposizioni e da esse ricavò dei teoremi. Ottenne però che questi teoremi non rispecchiavano più quella che per lui era la ‘vera’ geometria (in definitiva quella che tu hai imparato fin dai primi anni di scuola). L’intento di Saccheri era quello di “emendare Euclide da ogni macchia”. Era convinto della verità del quinto postulato e negandolo voleva ricavare delle contraddizioni: dal suo punto di vista, riuscì nell’intento. Va invece riconosciuta agli altri tre matematici il merito della formulazione di una geometria



Nikolaj Ivanovic Lobacevskij
(1792-1856)

non-euclidea: senza pensare se i postulati descrivano una realtà davvero esistente al di fuori di noi, si può costruire una geometria che parta appunto da postulati scelti semplicemente come ipotesi di ragionamento. Con la logica, da essi si ricavano teoremi che sono comunque ‘rispettabili’, anche se non descrivono la realtà che abbiamo sotto gli occhi ma, ad esempio, come ci si è resi conto successivamente, descrivono la realtà messa in luce da Einstein con la sua *teoria della relatività*...

(B) Nessun cultore delle scienze matematiche può ignorare quanto sia il pregio e l'eccellenza degli *Elementi* di Euclide; ne fanno fede Archimede, Apollonio, Teodosio ed altri innumerevoli matematici fino ai nostri giorni, i quali si servono degli *Elementi* come di dottrina da lungo tempo e su basi sicure stabilita. Ciò peraltro non impedì che molti tra gli antichi ed i moderni celebrati cultori della geometria non vi trovassero qualche cosa a ridire; e infatti si notano tre nèi.

Il primo riguarda la definizione delle parallele e con essa il postulato V del libro I «due rette segate da una terza, se formano con questa angoli interni da una medesima parte la cui somma è minore di due retti, si incontrano da questa parte».

Nessuno per certo vi è che dubiti della verità di questo postulato, ma la sola accusa che si muove ad Euclide è di averlo chiamato con il nome di assioma, come se al solo enunciarlo esso riuscisse evidente.

Gli è perciò che in seguito non pochi, pur accettando la definizione euclidea delle parallele, ne tentarono la dimostrazione, servendosi di quelle sole proposizioni del libro I che precedono la 29ª, per la quale incomincia ad essere indispensabile l'uso del controverso postulato.

Giovanni Gerolamo Saccheri, *Euclides ab omni nœvo vindicatus*.

La principale conclusione alla quale io pervenni [...] è l'ammissione dell'esistenza della Geometria in un senso più largo di quello nel quale Euclide per primo ce la presentò. In questa estesa accezione io diedi alla scienza il nome di «Geometria immaginaria», nella quale rientra la «Geometria ordinaria» come caso particolare, corrispondente a quelle limitazioni nelle ipotesi generali che le misure effettive esigono.

Nikolaj Ivanovic Lobacevskij, *Nuovi principi di geometria*.

Per interpretare i documenti

1. Utilizzando l'introduzione ai due ultimi documenti, stabilisci fra di essi un confronto che metta in evidenza soprattutto gli elementi di diversità fra l'orientamento di Saccheri e quello di Lobacevskij.

Trigonometria

Può risultare difficile individuare una storia autonoma della trigonometria all'interno di quella della geometria. Le sue origini sono legate alla risoluzione di problemi riguardanti l'astronomia e l'agrimensura. Si possono far rientrare nel suo ambito le indagini di Aristarco di Samo (310 ca.-230 ca. a.C.) sulle distanze del Sole e della Luna dalla Terra. L'opera più nota, comprendente astronomia e trigonometria, è forse l'*Almagesto* di Tolomeo d'Alessandria (fine I secolo d.C.-168 d.C.). Significativi contributi alla trigonometria vennero, nel periodo corrispondente al Medioevo europeo, anche dalla cultura araba e indiana. Del periodo successivo, si possono ricordare gli apporti dati da Viète e quindi da Eulero, che assunse il raggio del cerchio goniometrico uguale a 1.

DA UN MANUALE DEL 500

Il termine “trigonometria” venne dato a questa branca della matematica nel periodo a cavallo fra il XVI e il XVII secolo. Il tedesco Bartholomaeus Pitiscus (1561-1613) è l'autore del manuale *Trigonometriæ*, ristampato in varie occasioni a partire dal 1595: da esso è tratto il documento qui riportato. Dello stesso periodo è l'invenzione dei logaritmi che divennero un valido supporto per la trigonometria.



Bartholomaeus Pitiscus, *Trigonometriæ*.

BARTHOLOMÆI

Pitisci Grunbergenfis

TRIGONOMETRIÆ LIBER SECVNDVS.

*De necessariis ad dimensionem Triangulorum, tabulis
Sinuum, Tangentium & Secantium.*

I. Triangula sic sunt. Dimensio Triangulorum est ignorantur in Triangulis sive laterum, sive angulorum, ex notis tribus, sive lateribus, sive angulis, sive puris, sive mixtis, inventio. Dicitur etiam solutio Triangulorum: item calculus Triangulorum.

VI. Rectæ ad circumulum applicatæ sunt subtensæ, Sinus, Tangentes & Secantes.

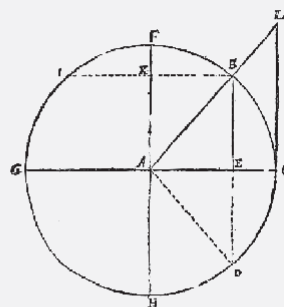
XI. Sinus est rectus vel versus.

XII. Sinus rectus est semissis subtensæ dupli arcus. *Vi sinus rectus arcus BC vel BG, est recta BE semissis subtensæ dupli arcus BC vel BG, hoc est, semissis rectæ BFD, quæ arcum BCD vel BGD subtendit. Sic sinus rectus arcus BF vel BH est recta BK, quippe semissis rectæ BFI, quæ duplum arcum BF vel BH, nempe arcum BFI vel BHI subtendit.*

XIII. Sinus versus est segmentum diametri inter sinum rectum & circumferentiam interceptum. *Vi sinus versus arcus BC est segmentum diametri EC: sinus versus arcus BG est segmentum diametri GE.*

XVII. Tangens est recta à secante per alterum arcus terminum ducta in extremitatem diametri ad alterum arcus terminum perpendicularis: *Vi arcus BC tangens est recta LC.*

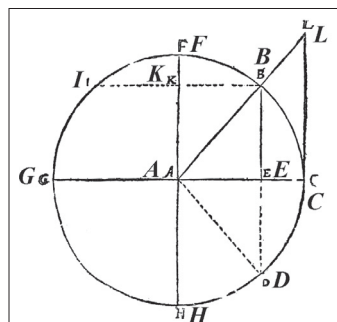
XVIII. Secans est recta per alterum arcus terminum usq; ad summitatem tangentis ducta. *Vi arcus BC secans est recta AL.*



Bartholomæus Pitiscus, *Trigonometriae*, pp. 30-3, *passim*.

Per interpretare il documento

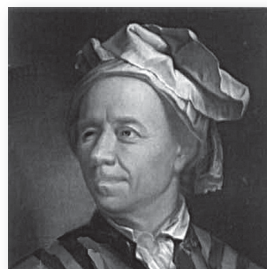
1. Per chi non ha mai affrontato lo studio del latino (proprio così!): completa le seguenti proposizioni che rappresentano la traduzione di parti del documento (nella figura qui a fianco, all'originale è stata aggiunta la trascrizione delle lettere).
 - a. Il seno "retto" degli archi BC o BG è il segmento di retta ...
 - b. Il seno "retto" degli archi BF o BH è ...
 - c. Il seno "verso" dell'arco BC è ...



- d. Il seno “verso” dell’arco BG è ...
 - e. La tangente dell’arco BC è ...
 - f. La secante dell’arco BC è ...
2. Stabilisci se e in quali termini esiste accordo fra le definizioni di seno, tangente, secante riportate sul tuo libro di trigonometria e le definizioni di Pitiscus.
 3. Indica in quale passo del documento viene fatto (implicito) riferimento all’uguaglianza $\text{sen}\alpha = \text{sen}(\pi - \alpha)$: giustifica la tua scelta.
 4. Eventualmente con l’aiuto dell’insegnante di italiano o latino, ricava dalla prima parte del documento la sintesi dei problemi che la trigonometria affronta.

Cos'è la topologia?

Leonhard Euler (1707-1783), svizzero, in Italia noto come Eulero, è considerato da molti il maggior talento matematico del XVIII secolo. A lui, fra le altre cose, va il merito di aver dato avvio ad una branca della matematica moderna che ha avuto sviluppi di grande rilievo e ancor oggi fa parte della ricerca avanzata: la topologia.



Leonhard Euler
(1707-1783)

UNA NUOVA GEOMETRIA

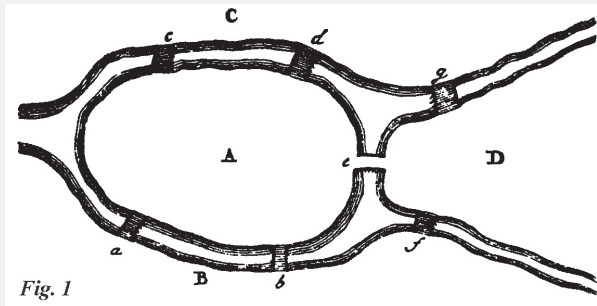
Nei documenti che seguono, Eulero ci propone un itinerario che inizia con la presentazione della nuova “geometria di posizione” e prosegue con l’analisi di quello che forse è l’esempio più noto della storia della topologia, vale a dire il problema dei ponti di Königsberg.

1. - La branca della geometria che si occupa delle grandezze è stata accuratamente studiata già nel passato, ma c’è un’altra branca ancor oggi quasi sconosciuta: di essa parlò per primo Leibniz, chiamandola «geometria di posizione» (*geometria situs*). Questa branca della geometria tratta delle relazioni che dipendono solo dalla posizione e studia le proprietà di posizione; essa non prende in considerazione le grandezze e non coinvolge calcoli con quantità. Ma finora non sono state date soddisfacenti definizioni dei problemi appartenenti a questa geometria di posizione o dei metodi da usare per risolverli. Recentemente è stato proposto un problema che, per quanto sicuramente appartenente alla geometria, non richiede la determinazione di una grandezza e non può essere risolto con calcoli su quantità; conseguentemente, non ho esitato ad assegnarlo alla geometria di posizione, soprattutto perché la risoluzione richiede solo considerazioni di posizione e i calcoli non sono di alcuna utilità. In questo saggio esporrò il metodo che ho scoperto per risolvere questo tipo di problemi, metodo che può servire come esempio della geometria di posizione.

Euler, Leonhardi Euleri, *Opera Omnia* - volumen septimum.

IL PROBLEMA DEI PONTI DI KÖNIGSBERG

2. - Il problema, che so essere ben noto, è il seguente. Nella città di Königsberg in Prussia c'è una isola A, chiamata «Kneiphof», circondata da due rami di un fiume (Pregel) nel modo indicato nella figura 1. Ci sono sette ponti, *a, b, c, d, e, f, g*, che attraversano i due rami.



La domanda è se una persona può programmare una passeggiata in modo da passare su ciascun ponte una e una sola volta.

Euler, Leonhardi Euleri, *Opera Omnia - volumen septimum*.

Per interpretare il documento

1. “Mi fu detto che mentre alcuni negavano la possibilità di fare una tale passeggiata e altri erano in dubbio, non c’era alcuno che sostenesse la possibilità di farla”. Così prosegue Eulero. Rifletti sul problema ed aggiungi a quest’ultima osservazione il tuo parere.

IL RAGIONAMENTO DI EULERO

3. - Il problema particolare dei sette ponti di Königsberg può essere risolto con una accurata elencazione di tutti i cammini possibili e il rilevamento di quelli, se ce ne sono, che soddisfano la condizione.

Questo metodo di risoluzione è però troppo tedioso e difficile a causa del gran numero di combinazioni possibili, e in altri problemi con un numero maggiore di ponti non potrebbe essere usato.

[...]

Di conseguenza l’ho scartato e ne ho ricercato un altro più rivolto allo scopo, cioè un metodo che mostrasse solo la possibilità di trovare una passeggiata soddisfacente alla condizione vista; un tal approccio, ero convinto, sarebbe stato più semplice.

[...] uso lettere maiuscole A, B, C, D, per indicare le diverse regioni che il fiume separa l’una dall’altra. Il passaggio dalla regione A alla regione B attraverso il ponte *a* o *b* lo indico con le lettere AB.

[...] indico tre successivi passaggi con le quattro lettere ABDC.



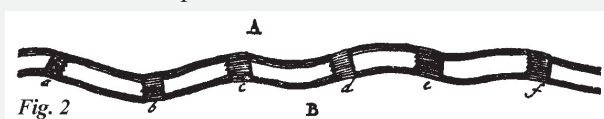
Queste quattro lettere significano che il viaggiatore che era inizialmente in A è passato in B, poi in D e infine in C. [...]

Il passaggio di quattro ponti sarà rappresentato con cinque lettere e il passaggio di un numero qualsiasi di ponti sarà rappresentato con un numero di lettere maggiore di uno del numero di ponti.

Ad esempio, otto lettere sono necessarie per indicare il passaggio di sette ponti.

[...]

prendo una regione A alla quale si può arrivare attraverso un numero arbitrario di ponti, a, b, c, d , etc. (fig. 2). Di questi ponti considero dapprima solo a . Se il viaggiatore attraversa questo ponte deve partire da A o arrivare in A, e, in base al modo di indicare i passaggi, la lettera A dovrà comparire esattamente una volta.



Se ci sono tre ponti a, b, c , che portano a A e il viaggiatore li attraversa tutti, allora la lettera A dovrà comparire due volte, indipendentemente dal fatto che il viaggiatore parta da A o da un'altra regione.

E se ci sono cinque ponti che portano ad A, la successione per un cammino che li attraversi tutti una sola volta contiene tre volte la lettera A.

Se il numero di ponti è dispari, lo si aumenta di uno e si prende la metà della somma: il risultato rappresenta il numero di presenze della lettera A.

9. - Riprendiamo ora il problema dei ponti di Königsberg (fig. 1).

Poiché ci sono cinque ponti a, b, c, d, e , che portano a (e da) l'isola A, la lettera A deve comparire tre volte nella successione che descrive il cammino.

La lettera B deve comparire due volte, poiché tre ponti portano a B; analogamente, C e D devono comparire ciascuna due volte.

Questo significa che la successione di otto lettere che rappresenta gli attraversamenti dei sette ponti deve contenere A tre volte, B, C, D ciascuna due volte: ma questo è impossibile con una successione di otto lettere.

È quindi evidente che un attraversamento dei sette ponti di Königsberg nel modo richiesto non può essere effettuato.

Euler, Leonhardi Euleri, *Opera Omnia* - volumen septimum.

Per interpretare il documento

1. Rivediamo il documento che riporta il ragionamento di Eulero in merito al problema dei sette ponti di Königsberg:
 - a. Qual è il significato della scrittura ABDC?
 - b. Quante lettere maiuscole sono necessarie per indicare il passaggio dei sette ponti di Königsberg una sola volta?

- c. Se ad una regione A arrivano tre ponti, quante volte dovrà comparire la lettera A in una successione che indica un cammino che li attraversi tutti una sola volta? e se ad A arrivano cinque ponti? e sette?
 - d. Tre ponti partono dalla regione B (come pure dalle regioni C e D): la successione che rappresenta gli attraversamenti dei sette ponti quante volte dovrà contenere B (o C oppure D)? quante volte A?
 - e. Perché non è possibile l'attraversamento dei sette ponti, rispettando la condizione del problema?
2. Prepara il disegno di un'altra situazione con rami di un fiume, isole, ponti... Discuti se è possibile programmare una passeggiata in modo da attraversare i ponti una e una sola volta.

In più... numeri solidi

Gli studi sui numeri figurati piani non potevano che essere preliminari a quelli sui numeri solidi, da essi generati per ordinata sovrapposizione. La conoscenza della formula per calcolare i numeri piramidali ha avuto anche degli utilizzi pratici: prima del 1600, le munizioni venivano contate solo dopo averle sovrapposte in modo da formare una piramide¹⁴.

I brani successivi provengono dal trattato *L.IV.21*¹⁵ di Maestro Benedetto (1463), rifacimento della *De institutione aritmetica* di Severino Boezio (VI secolo d.C.) e testimoniano del ricorrente interesse nella storia della matematica per i numeri figurati.



Anicius Manlius Severinus
Boethius
(480? d.C.-524 d.C.)

Hora a' numeri che per nomi solidi sono nominati verremo; e chosì, chome a' numeri nominati per nomi geometrici si dà 2 misure cioè lungheza e largheza, chosì a' numeri solidi vi s'agugne l'altra misura che alchuni la dichono alteza, alchuni grosseza, alchuni profondità. Pare certamente, chome nelle figure piane el triangolo è primo, chosì ne' solidi la figura detta piramide è il principio. La piramide, alchuna è nella basa triangulare, alchuna è quadranghula, alchuna à la base pentagona, et chosì di quanti vuoi angholi. Et, da ciaschuno angholo, si muove el lato et sempre alzando infino alla sommità. Chome, posto el triangholo, et da ciaschuno angholo si levi in alto, et a uno punto gungnino, sia fatta la piramide che è fatta perfecta dalla base triangulare.

[...] El primo triangholo per la podestà, adunque, è l'unità e, per la medesima ragione, diremo la prima piramide è unità; e 'l secondo triangholo è 3 el quale se al primo triangholo l'agugnerò, cioè chon unità, ne perverrà 4 che è la seconda piramide triangulare; anchora al 4 se s'agugne el 6, che è el terzo numero triangulare, ne perverrà 10 per la terza piramide triangulare; al quale 10 se s'agugne 10, che è lo quarto numero triangulare, ne perverrà 20 che è il quarto numero piramidale triangulare; e chosì quanti piramidali numeri vorrai, tanti n'arai se in detto modo e' numeri triangulari agugnerai. Et, acciò che chiaro se n'appia alchuno, qui di sotto ne scriverò alcuni. E' numeri di sopra sono triangulari e di sotto e' numeri piramidali triangulari. In questa chonguntione s'intende che lla basa sia triangolare et chontengha tante unità quanto è l'ultimo numero dell'aguntione; cioè per la quinta piramide sia la basa 15 et di poi si viene menomando insino che pervengha a unità.

¹⁴ Nel caso dei numeri piramidali a base quadrata la formula è: $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

¹⁵ Dalla segnatura del codice che lo contiene, conservato presso la Biblioteca Comunale di Siena.

1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364

Maestro Benedetto, *Codice L.IV.21.*

Per interpretare il documento

1. Spiega con le tue parole come costruire i vari numeri piramidali triangolari, eventualmente servendoti di un disegno.
2. Aggiungi alcuni numeri alle due successioni scritte sopra.

Le pirramide nate da' numeri quadrati sono l'aguntione de' detti numeri quadrati; chome sieno molti numeri quadrati, inchominciando a unità, scritti nel naturale ordine posti chome appare qui dallato. E' numeri di sopra sono numeri quadrati e quelli di sotto sono numeri pirramidali quadrati, e' quali numeri pirramidali quadrati venghono della aguntione de' numeri quadrati. E il primo quadrato allato è l'unità; alla quale se agugnerai el sechondo quadrato,

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
1	5	14	30	55	91	140	204	...		

sia fatto el sechondo numero piramidale che sia 5; al quale se agugnerai el terzo quadrato cioè 9, si à 14 per lo terzo piramidale numero nato de' quadrati; e chosi, agugnendo senpre, arai chonstituito un altro piramidale numero in sù quadrati. E questa pirramide s'intende che la sua basa sia quadrata et sia l'ultimo numero che s'agunse e chosi si dimiuischa infino che pervengha a unità.

Maestro Benedetto, *Codice L.IV.21.*

Per interpretare il documento

1. Spiega con le tue parole come costruire i vari numeri piramidali quadrati.
2. Aggiungi alcuni numeri alle due successioni scritte sopra.
3. Utilizzando i documenti sui numeri poligonalari riportati nella prima parte di questo capitolo, scrivi alcuni numeri piramidali a base pentagonale ed esagonale.

El numero chubo è quello che viene della multiplicatione dello lato del quadrato nel quadrato; chome 8 che viene della multiplicatione del 4, quadrato, in 2 ch'è lla sua faccia; o vero multiplicato uno lato del quadrato 3 volte, cioè 2 volte 2 volte 2. Ed è 8 el primo chubo quanto all'ufficio; e chosi 9, ch'è quadrato, multiplicato per lo suo lato fanno 27 che è chubo. E chosi 16 multiplicato per 4, che è sua faccia, fanno 64 che è chubo. E chosi



infiniti chubi arai creati, se infiniti ne vorrai. E tante unità à el chubo per lato quanto à prima quel numero quadrato del quale egli è creato; chome 4 che è quadrato à solamente 2 per lato, chosì 8 che è chubo à ancora 2 per lato; e chosì 9 che è quadrato à 3 per lato, chosì 27 che è chubo, nato del 9 multiplicato in 3, à 3 unità per faccia. E chosì 16 che è quadrato à 4 unità per lato e simile 64, che è il chubo nato del detto tetraghono, ha per faccia 4 unità. Qui chiamo e' lati faccie, e però unità anchora per forza diciamo essere cubo. Tucti e' quadrati anno per la detta superficie 4 angholi, e gli chubi anno per ciaschuno angholo 3 lati più 4 lati che sono 16 lati.

Adunque e' numeri chubi naschono posti per ordine, inchominciando a unità, l'ordinatione naturale e di sotto a ciachuno numero chollochare el suo quadrato; dove, volendo creare alchuno numero chubo, è di necessità multiplicare ciaschuno quadrato per la sua faccia et aremo criato el numero chubo. [...]

1	2	3	4	5	6	...
1	4	9	16	25	36	...
1	8	27	64	125	...	

Maestro Benedetto, *Codice L.IV.21*.

Per interpretare il documento

1. Aggiungi alcuni numeri alle tre serie di numeri sopra riportate.
2. Nell'Appendice al *Libro sui numeri poligonal* di Diofanto, Bachet de Méziriac fece notare la seguente caratteristica dei cubi: "Il primo cubo è costituito dall'unità; il secondo cubo è costituito dalla somma dei due dispari successivi; il terzo cubo è costituito dalla somma dei tre dispari successivi; e così di seguito all'infinito." Esplicita questa relazione per alcuni numeri cubi.



Capitolo 3
Temi di matematica moderna

La logica: scienza antica ma attuale

Una proposizione è una frase di cui si può dire se è vera o se è falsa. “Sta pioven-
do”, “ $3^2=6$ ”, “Il quadrato è un particolare rettangolo” sono proposizioni; “Arrivederci”,
“Apri la finestra!”, “Ti prego, dammi una mano!”, “ $7 \cdot 8$ ” non lo sono.

COSA SONO I CONNETTIVI LOGICI

Più proposizioni possono essere unite (connesse) per formarne di nuove utiliz-
zando delle particelle linguistiche, dette connettivi: *non, e, o, se... allora*. I connettivi
sono utilizzati in logica, in matematica, in informatica (vedi anche gli “operatori *boo-
leani*” degli informatici).

Qui riportiamo alcuni passi di autori vissuti nel II e III secolo d.C., anche se fu la scuo-
la megarico-stoica nel IV secolo a.C. che avviò lo studio dei connettivi in termini logici.

[La negazione]

Sono dette negative soltanto quelle proposizioni alle quali è prefissa la particella negativa.

Apuleio, *Περί ερμηνείας*, 267.

non - non p se e solo se¹ p .

Diogene Laerzio, *De cl. phil. vitis*, 69 sgg.

[L'implicazione filoniana]

Filone diceva che la [proposizione] connessa è vera quando non accade che essa co-
minci con il vero e finisca con il falso. Secondo lui vi sono quindi tre modi per ottenere
una [proposizione] connessa vera e uno solo per ottenerne una falsa. Infatti, [1] se co-
mincia con il vero e finisce con il vero, essa è vera, come ad esempio «se è giorno, c'è luce»;
[2] quando comincia con il falso e finisce con il falso, essa è vera, come ad esempio «se la
terra vola, la terra ha le ali»; [3] analogamente per quella che comincia con il falso e fini-
sce con il vero, come ad esempio «se la terra vola, la terra esiste». È falsa soltanto quando,
cominciando con il vero, finisce con il falso, come ad esempio «se è giorno, è notte»;
infatti, quando è giorno, la [proposizione] «è giorno» è vera, e questa era l'antecedente; e
la proposizione «è notte» è falsa, e questa era il conseguente.

Sesto Empirico, *Adversus Math.*, VIII, 115 sgg.

¹ “Se e solo se” va inteso come “equivalente a”.

[La disgiunzione² incompleta]

In alcune proposizioni, però, possono essere vere non soltanto una, ma anche più di una o tutte le componenti [...].

Galeno, *Inst.*, V, 11-12.

[La congiunzione]

Quello che i Greci chiamano “συμπελεγμενον”, noi lo diciamo *coniunctum* o *copulatum*. Esso è del tipo seguente: «Publio Scipione, figlio di Paolo, fu due volte console ed ebbe un trionfo e fu censore e fu collega nel censorato di Lucio Mummio». In ogni [proposizione] congiuntiva il tutto è detto falso nel caso in cui una [delle componenti] sia falsa, anche se le altre sono vere. Infatti, se aggiungessi a tutto quello che ho detto secondo verità di Publio Scipione: «e vinse Annibale in Africa», che è falso, allora l'intera congiuntiva che l'includa sarebbe falsa, perché questa è una aggiunta falsa e tutte vengono affermate contemporaneamente.

Aulo Gellio, *Noct. Att.*, XVI, 8.

Per interpretare il documento

1. “La doppia negazione è equivalente all'affermazione”. Individua nei documenti precedenti il passo che corrisponde a questa frase.
2. La proposizione “Se p allora q ”, dove p e q sono proposizioni, può essere vera in ben tre casi, a seconda se p , q sono vere o se sono false: individua nel documento i tre casi, ricercando anche gli esempi prodotti da Sesto Empirico. “Se p allora q ” è falsa in un caso: illustralo.
3. “ p o q o r ”: Galeno dice che è vera in più casi, falsa in uno solamente, a seconda che ciascuna delle componenti p , q , r sia vera oppure no (come quando, accingendosi a fare un giro in città, con del tempo a disposizione, si dicesse: “Vado in pasticceria o Vado a prendermi un paio di scarpe o Mi fermo un po' da Gigi”). Individua i casi in cui “ p o q o r ” secondo Galeno è vera.
4. Galeno riporta un inciso: “possono essere vere non soltanto una”. C'è un riferimento implicito al caso in cui si usasse il connettivo *o* nel senso di *aut*: “A pranzo mangerò carne o pesce” (è escluso che mangi sia carne che pesce ma uno dei due sì). Riassumi, quindi:

p è vera, q è vera, p aut q è

p è vera, q è falsa, p aut q è

p è falsa, q è vera, p aut q è

p è falsa, q è falsa, p aut q è

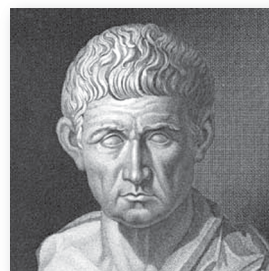
² Viene tradotta con il connettivo *o* cioè con il *vel* latino.

5. La *coniunzione* può venir tradotta con *e*. Trova nel testo l'interpretazione data da Aulo Gellio a ciascuna proposizione componente di "*p e q e r e s e t*": in quale caso questa proposizione composta sarebbe vera?
6. La congiunzione *e*, così come viene usata nella quotidianità, talvolta ha un significato diverso da quello che indica Aulo Gellio. Esamina le due affermazioni: a) "Prendo un caffè e esco"; b) "Esco e prendo un caffè". Sono equivalenti? Trova un altro esempio analogo, tratto dalla quotidianità.
7. Esamina le seguenti proposizioni: a) "Se 356 è multiplo di 4 allora 356 è multiplo di 2"; b) "Se il quadrato è un particolare rettangolo allora $5^0=1$ ". Perché sono entrambe vere, secondo quello che dice Sesto Empirico?
8. Al giorno d'oggi la logica matematica si serve di simboli specifici per indicare i diversi connettivi: ricercali su di un libro di testo scolastico. Approfondisci la tua ricerca recuperando sullo stesso libro anche le rispettive *tabelle* (o *tavole*) di verità.

L'ARTE DI... RAGIONARE

Vari sono gli schemi di inferenza (schemi di ragionamento): un classico *sillogismo* è "Tutti gli uomini sono mortali, Socrate è un uomo, quindi Socrate è mortale".

Aristotele ne ha fondato la teoria che i logici medievali hanno portato al massimo sviluppo.



Aristotele
(384 a.C. - 322 a.C.)

Se «*se p e q, allora r*»³ e «*se s, allora p*» sono valide, allora anche «*se s e q, allora r*» è valida.
 Se «*se p e q, allora r*» e «*se s, allora q*» sono valide, allora anche «*se p e s, allora r*» è valida.
 Se «*se p e q, allora r*» è valida, allora anche «*se q e p, allora r*» è valida.
 Se «*se p, allora q*» e «*se q, allora r*» sono valide, allora anche «*se p, allora r*» è valida.

Aristotele, *An. Pr.*, A4.

³ *p, q, r, s* indicano proposizioni.

Per interpretare il documento

1. Associa ciascuno dei due ragionamenti seguenti allo schema di Aristotele corrispondente:
 - a. “Se mi presti il tuo portatile e mi fai fare un giro in moto, allora ti aiuto a fare la relazione”, “se ti presto i miei pattini, allora mi presti il tuo portatile”, quindi “se ti presto i miei pattini e mi fai fare un giro in moto, allora ti aiuto a fare la relazione”.
 - b. “Se mi presti il tuo portatile, allora ti aiuto a fare la relazione”, “se ti aiuto a fare la relazione, allora avrai un bel voto”, quindi “se mi presti il tuo portatile, allora avrai un bel voto”.
2. Costruisci esempi opportuni per gli altri due schemi di inferenza, vale a dire per: “se «se p e q , allora r » e «se s , allora q » sono valide, allora anche «se p e s , allora r » è valida”;
“se «se p e q , allora r » è valida, allora anche «se q e p , allora r » è valida”.
3. Cerca su un testo di filosofia il termine *sillogismo*. Che cosa significa? Cerca i vari schemi di ragionamento, facendoti eventualmente aiutare dal tuo insegnante di filosofia.

LA MATEMATICA SI IMPADRONISCE DELLA LOGICA

Si dice che una scienza diventa ‘vera scienza’ quando incomincia ad usare strumenti matematici. Storicamente è successo con la fisica, la chimica, ma anche con l’indagine sociale, la biologia ecc. Il rapporto della matematica con la logica è stato, ed è, complesso. Anzitutto c’è stata la matematizzazione della logica: a cominciare da Leibniz (1646-1716) che ha dato l’idea, per proseguire con Boole (1815-1864) e altri, in logica si è cominciato a *calcolare*, più o meno come si fa in algebra. Poi i matematici hanno tentato di ricostruire tutta la matematica partendo dalla logica. Oggi la logica (*logica matematica*) è alla base degli studi sull’intelligenza artificiale.



Gottfried Wilhelm
von Leibniz
(1646-1716)

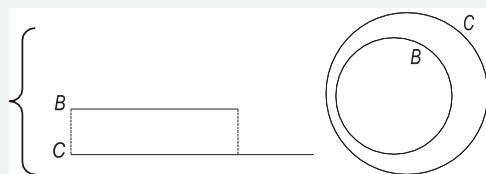
Il documento che segue mostra come Leibniz abbia incominciato ad usare rappresentazioni grafiche analoghe a quelli che oggi sono chiamati *diagrammi di Eulero-Venn*. Accanto ad essi compaiono altre rappresentazioni che utilizzano i segmenti ma illustrano gli stessi concetti.

Proposizione universale⁴ affermativa:

«Ogni B è C»

«Ogni uomo è animale»

rappresentazione grafica



la quale mostra che tutti gli uomini sono compresi entro tutti gli animali. Ma [...] non tutti gli animali sono contenuti entro tutti gli uomini.

Proposizione universale negativa:

«Nessun B è C»

«Nessun uomo è pietra»

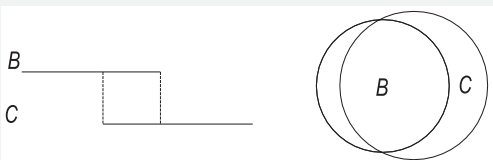


[...] nessun uomo è contenuto fra le pietre e nessuna pietra è contenuta fra gli uomini.

Proposizione particolare affermativa:

«Qualche B è C»

«Qualche uomo è sapiente»

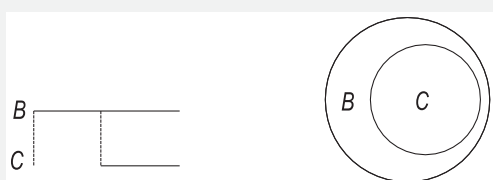


È chiaro dal disegno che alcuni uomini sono compresi fra i sapienti, e nello stesso tempo è evidente che alcuni sapienti sono compresi fra gli uomini.

Proposizione particolare negativa:

«Qualche B non è C»

«Qualche uomo non è contadino»



Non abbiamo prolungato la retta C per evitare che se ne inferisca [...] che «qualche contadino non è uomo» [...]

Gottfried Wilhelm Leibniz, *Opusc. et fragm. inédits*.

Per interpretare il documento

1. Inventa altri esempi di proposizioni universali e particolari per ciascun caso illustrato da Leibniz nel documento precedente.
2. Quali rappresentazioni di Leibniz assoceresti all'affermazione «Alcuni cittadini europei sono nati in America»?

⁴ «Universale» in quanto contiene il termine «ogni».

3. Quali rappresentazioni di Leibniz assoceresti all'affermazione "Non tutti gli elefanti vivono in Asia", utilizzando l'insieme dei viventi asiatici?
4. Quali dei diagrammi di Leibniz mostrano che può essere vero che "Qualche B non è C" e contemporaneamente che "Qualche C non è B"?
5. Ti dico: è vero che "Qualche B non è C" ma è falso che "Qualche C non è B". Quale conclusione che utilizzi il termine "ogni" potresti ricavare?
6. a) "Qualche divisore di 12 è divisore di 24"; b) "Qualche divisore di 12 è divisore di 20"; c) "Qualche divisore di 12 non è divisore di 20" sono proposizioni vere in matematica. Nel linguaggio quotidiano, il termine "qualche" ha un significato a volte diverso: analizza l'affermazione "Qualche studente del liceo scientifico è iscritto alle superiori"; la consideri vera o falsa? Esistono alunni dello scientifico non iscritti alle superiori?

1. - Lo scopo del presente trattato è quello di investigare le leggi fondamentali di quelle operazioni della mente mediante le quali si realizza il pensiero; di esprimere tali leggi nel linguaggio simbolico analogo ad un calcolo e su queste premesse di fondare la scienza della logica e di costruire il suo metodo; di fare di questo metodo della logica a sua volta la base per un metodo generale per le applicazioni della teoria matematica della probabilità; ed infine quello di raccogliere, dai vari elementi di verità emersi nel corso di queste indagini, qualche presunzione abbastanza probabile sulla natura e sulla costituzione della mente umana.

[...]

È una verità generalmente ammessa che il linguaggio sia uno strumento della ragione umana, e non soltanto un mezzo per esprimere il pensiero.

Il proposito di questo capitolo è quello di ricercare che cosa rende il linguaggio uno strumento così adatto per le più importanti facoltà intellettuali.

[...]

In queste analisi non sarà necessario prendere partito nella discussione, che data da lungo tempo tra i dotti, a proposito del famoso problema se il linguaggio debba essere considerato come un elemento *essenziale* per il ragionamento oppure se sia possibile ragionare senza di esso.

La mia ipotesi è che questo problema è al di fuori degli scopi del presente trattato e ciò per la seguente ragione: il compito della scienza è quello di ricercare delle leggi; e che sia che noi consideriamo i segni come dei rappresentanti delle cose e delle loro relazioni, sia che noi concepiamo i segni come rappresentanti dei concetti e delle operazioni dell'intelletto umano, quando noi studiamo le leggi dei segni noi stiamo studiando in effetti le leggi del ragionamento, così come esse si manifestano.

[...]

In tutto il presente trattato il termine «segno» sarà impiegato esclusivamente per indicare dei segni scritti. Le qualità fondamentali dei segni sono enumerate dalla seguente definizione:



«Un “segno” è un simbolo arbitrario, che ha una interpretazione fissata, e che può essere combinato con altri segni con certe leggi fissate, che dipendono dalla interpretazione dei segni stessi».

[...]

Se un aggettivo, come per es. «buono», è usato come un termine di descrizione, rappresentiamo con una lettera, per es. «y», tutte le cose alle quali si può applicare tale descrizione, cioè la classe di tutte le cose buone. Allora conveniamo che la combinazione «xy» rappresenti la classe di tutte le cose alle quali entrambe le descrizioni sono contemporaneamente applicabili. Così per es. se x da solo sta per «cosa bianca» ed y sta per «pecora», conveniamo che xy rappresenti «pecora bianca»; e di nuovo, se z sta per «cosa con le corna», allora xyz rappresenterà la classe delle pecore bianche dotate di corna, cioè la classe di quegli esseri ai quali sono contemporaneamente applicabili le descrizioni che competono ai termini «bianco», «dotato di corna» e «pecora».

[...]

$$xx=x$$

[...]

La legge espressa da questa equazione trova i suoi esempi nel linguaggio comune. Infatti il dire «buono buono» con relazione ad un determinato soggetto è un pleonismo inutile, e viene a dire la stessa cosa che «buono»; per esempio un uomo buono buono è lo stesso che un uomo buono.

Queste ripetizioni di parole sono spesso utilizzate per rinforzare un'idea o un'affermazione; ma questo effetto è puramente secondario e convenzionale e non è fondato sulle relazioni intrinseche del pensiero e del linguaggio.

[...]

Il simbolo «0» che viene usato in algebra soddisfa alla seguente legge formale

$$0y = 0$$

quale che sia il numero y . Se vogliamo che questa legge sia soddisfatta anche nel sistema di logica dobbiamo assegnare al simbolo «0» un significato tale che la classe $0y$ sia sempre identica con la classe «0», quale che sia la classe y .

In accordo con una definizione che è stata già data possiamo considerare il nulla come una classe. Infatti il nulla e l'universo sono i due limiti della possibile estensione di una classe, perché sono i due limiti di una interpretazione possibile di nomi generali, nessuno dei quali può essere applicato a meno individui di quanti appartengono alla classe «nulla» oppure a più individui di quanti appartengono alla classe «universo».

Ora, quale che sia la classe indicata con y , gli individui che sono comuni con questa classe e con la classe «nulla» sono tanti quanti quelli compresi nella classe «nulla», cioè nessuno.

Una breve riflessione ci porta a concludere che questa condizione è soddisfatta se 0 rappresenta il nulla.

[...]

$$1y=y$$

qualunque numero y rappresenti. E poiché si assume che quest'equazione formale sia ugualmente valida nel sistema istituito in questo lavoro, in cui 1 e y rappresentano classi,



è chiaro che il simbolo 1 deve rappresentare una classe tale che tutti gli individui che appartengono a una *qualsiasi classe* y , sono anche gli individui $1y$ comuni alla classe y e alla classe rappresentata da 1. Non è necessario un esame approfondito per vedere che la classe rappresentata da 1 dev'essere «l'universo».

George Boole, *Una ricerca sulle leggi del pensiero*.

Per interpretare il documento

1. Nel documento, qual è il ruolo del linguaggio per il ragionamento?
2. Attualmente, il termine “linguaggio” ha un significato più ampio di quello con cui lo intendeva Boole. Discuti questa affermazione.
3. Individua nel documento un esempio per interpretare la scrittura xy .
4. Cosa indicano 1 e 0 nel documento, e quindi in quella che oggi viene chiamata *algebra di Boole*?
5. Con riferimento al sistema di Boole, completa le seguenti eguaglianze:

$$yy = \dots \quad 01 = \dots \quad 1xy = \dots \quad 0xy = \dots$$

Giustifica le tue scelte.

6. “Bel bello” significa “tranquillamente”. Soffermati sulle affermazioni: a) “Se ne tornò bel bello dal parrucchiere” e b) “Se ne tornò bello dal parrucchiere”. Metti in evidenza perché le due affermazioni costituiscono un esempio contrario a quello che dice Boole.

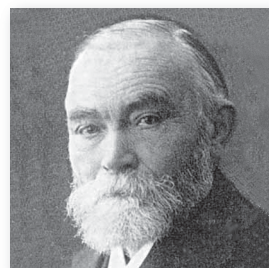
La logica per costruire i numeri

Fra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo vi fu il tentativo di ridurre la matematica alla logica: l'idea che la logica spiegasse nella maniera più piena la vera essenza della matematica animò l'opera di vari autori. Si costruì un nuovo simbolismo logico adatto allo scopo, che venne progressivamente modificato fino ad arrivare a quello che è oggi utilizzato anche nei tuoi libri di testo.

GOTTLÖB FREGE E BERTRAND RUSSELL

Gottlob Frege (1848-1925), logico e matematico tedesco, viene considerato l'ispiratore del tentativo di ricostruire tutta la matematica partendo dalla logica. Iniziò con l'aritmetica, ma subì un durissimo colpo quando un giovane logico inglese destinato ad un grande futuro, Bertrand Russell (1872-1970), in una lettera gli comunicò di aver scoperto delle contraddizioni (*antinomie*) che minavano le fondamenta della logica: l'edificio costruito pazientemente da Frege crollò.

Ripercorriamo le fasi essenziali della vicenda.



Gottlob Frege
(1848-1925)

74. Lo zero è il numero che spetta al concetto «disuguale da sé stesso»

Passeremo ora alla spiegazione dei singoli numeri. Poiché non v'è nulla che cada sotto il concetto «disuguale da sé stesso», posso dare la seguente definizione: «0 è il numero naturale che spetta al concetto “disuguale da sé stesso”». Mi si obietterà che in queste parole è contenuta una contraddizione perfettamente analoga a quelle, famose, del «ferro legnoso» e del «circolo quadrato». Rispondo che, a mio parere, anche queste ultime non sono così perfide come sogliono venir dipinte. Senza dubbio non riusciranno mai utili a nulla; ma neanche potranno recarci alcun danno, purché non si supponga che qualcosa cada sotto di esse; ed è certo che il semplice uso di tali concetti non implica affatto questa ipotesi.

[...]



76. Definizione dell'espressione

« N segue immediatamente a M nella successione dei numeri naturali». Voglio ora chiarire in quale relazione stanno fra loro due termini successivi della successione dei numeri naturali. A tale scopo basterà stabilire l'equivalenza reciproca delle due seguenti proposizioni:

« n segue immediatamente a m nella successione dei numeri naturali»

ed

«Esistono un concetto F e un oggetto x , che cade sotto F , per i quali valgono le seguenti proposizioni: n è il numero che spetta a F , e m invece è il numero che spetta al concetto “ciò che cade sotto F ma è diverso da x ”».

[...]

77. 1 è il numero che spetta al concetto «uguale a 0»

Passando ora al numero 1, dobbiamo in primo luogo mostrare che esiste qualcosa che segue immediatamente allo 0 nella successione dei numeri naturali.

Prendiamo pertanto in considerazione il concetto - o, se si preferisce, il predicato - «uguale a 0». È facile trovare un oggetto che cade sotto di esso: lo 0. Si vede poi subito che sotto il concetto «uguale a 0 ma diverso da 0» non cade alcun oggetto, sicché il numero che spetta a quest'ultimo concetto sarà proprio lo 0.

[...]

«Il numero che spetta al concetto “uguale a 0 ma diverso da 0” è lo 0»;

[...]

«1 è il numero naturale che spetta al concetto “uguale a 0”»,

[...]

«1 segue immediatamente a 0 nella successione dei numeri naturali».

Gottlob Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*.

Per interpretare il documento

1. Individua nel documento un concetto al quale spetta il numero 0.
2. Individua nel documento un concetto al quale spetta il numero 1.
3. Utilizza il concetto, riferito a te, “persone che abitano nel mio stesso appartamento”. Scrivi l'elenco (nomi propri) degli individui che cadono sotto questo concetto: indica con n il loro numero e consideralo il “numero che spetta” ad esso.
4. Scegli un individuo che cada ancora sotto il concetto “persone che abitano nel mio stesso appartamento”, chiamiamolo a . Quale numero naturale m spetta al concetto “persone che abitano nel mio stesso appartamento, diverse da a ”?
5. Confronta l'esempio utilizzato nei due punti precedenti con la definizione riguardante un numero che segue immediatamente un altro nella successione dei naturali e scrivi un tuo commento.
6. Ora scrivi alcuni esempi, inventati da te, di concetti sotto i quali non cade alcun oggetto, cioè di concetti a cui spetta lo 0.

7. Utilizzane ora uno per scrivere un concetto al quale si possa associare il numero 1.

Caro collega,

per un anno e mezzo mi sono cimentato con i suoi *Grundgesetze der Arithmetik*, ma soltanto adesso sono in grado di trovare il tempo per lo studio accurato che intendo fare della Sua opera. Mi trovo perfettamente d'accordo con Lei in tutti i punti essenziali, in particolare con il Suo rigetto di qualunque momento psicologico in logica [...]

C'è solo un punto dove ho incontrato una difficoltà.

Lettera di Russell a Frege del 16 giugno 1902.

(B) 1) La più antica antinomia della specie considerata è l'Epimenide. Epimenide il cretese diceva che tutti i cretesi sono bugiardi, e tutte le affermazioni fatte dai cretesi erano di sicuro bugie. La sua era una bugia?

La forma più semplice di questa antinomia è offerta dall'uomo che dice «sto mentendo»; se mente sta dicendo la verità, e viceversa.

[...]

4) Il numero delle sillabe dei nomi «italiani» degli interi finiti tende ad aumentare al crescere degli interi, e deve aumentare gradualmente all'infinito, poiché con un numero finito assegnato di sillabe si può formare solo un numero finito di nomi. Dunque i nomi di alcuni interi debbono consistere di almeno 25 sillabe e fra questi deve esistere un minimo. Quindi «il minimo intero non nominabile in meno di 25 sillabe» deve denotare un intero finito. [...] Ma «il minimo intero non nominabile in meno di venticinque sillabe» è esso stesso un nome che consiste di 24 sillabe; dunque il più piccolo intero non nominabile in meno di 25 sillabe può essere individuato con un nome di 24 sillabe, che è una contraddizione.

Bertrand Russell, *Mathematical Logic as based on the theory of Types*.

Per interpretare il documento

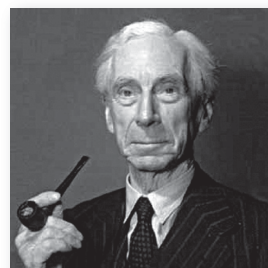
1. Esaminiamo l'antinomia del mentitore.

Se un uomo dice “sto mentendo”, supponi che quello che dice sia vero: allora è vero che sta mentendo e se mente dice il falso...

Se un uomo dice “sto mentendo”, supponi che quello che dice sia falso: allora (completa tu il ragionamento)

.....

Conta le sillabe della frase “il minimo intero non nominabile in meno di venticinque sillabe” ed illustra la contraddizione a questo proposito esposta da Russell.



Bertrand Russell
(1872-1970)

2. Nel 1908, Kurt Grelling riformulò il paradosso in altro modo nel quale è eliminato ogni riferimento alla teoria degli insiemi. Chiamiamo *autologico* un aggettivo se ha la proprietà da esso stesso descritta ed *eterologico* se non la ha. Ad esempio “corto” è autologico mentre “lungo” è eterologico. Allora l’aggettivo “eterologico” è autologico o eterologico?
3. Russell, all’inizio della sua lettera a Frege, parla di “rigetto di qualunque momento psicologico in logica”. La logica di cui trattano la matematica o la filosofia è nettamente distinta dalla psicologia? Discutine con i tuoi insegnanti.

Caro collega,
molte grazie per la sua interessante lettera del 16 giugno. Mi compiaccio che lei concordi con me su molti punti. [...] La sua scoperta della contraddizione mi ha causato la massima sorpresa e, direi quasi, costernazione, perché ha scosso le basi sulle quali intendvo costruire l’aritmetica. [...] Il secondo volume dei miei *Principi* sta per uscire. Dovrò certamente aggiungere un’appendice che tenga conto della sua scoperta. Se solo sapessi come!

Lettera di Frege a Russell del 22 giugno 1902.

Per interpretare il documento

1. «Le antinomie hanno minato l’idea che ogni proprietà (“concetto” o “predicato”) individua l’insieme degli oggetti che la soddisfano, scuotendo, così, le basi logiche su cui costruire l’aritmetica». Illustra quest’ultima affermazione ripercorrendo l’intera parte dedicata a Frege e Russell.

Misuriamo la casualità

Chi saranno stati i genitori del *calcolo delle probabilità*?

Pierre-Simon (Marquis de) Laplace (1749-1827) ha proposto il modo per calcolare la probabilità di un evento che usiamo ancora abitualmente: per questo motivo può essere considerato lui il padre del calcolo delle probabilità.

Il ruolo di nonni potrebbe allora spettare al filosofo, fisico, matematico Blaise Pascal (1623-1662) e al matematico, quasi per hobby, Pierre Fermat (1601-1665): c'è chi però insinua che siano loro i veri padri...

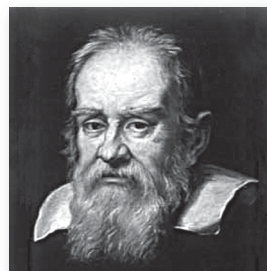
I bisnonni potrebbero essere vari “maestri d'abaco” italiani del XV secolo e: fra' Luca Pacioli, Gerolamo Cardano (1501-1576), Galileo Galilei (1564-1642).

Del secolo scorso ricordiamo Bruno de Finetti (1906-1985) e la sua concezione soggettivista della probabilità.

Numerosi figli, comunque, il calcolo delle probabilità continua ad averne ancora oggi, viste le sue numerose applicazioni nel campo dell'economia, delle assicurazioni, della biologia, della fisica ecc.

GALILEO E UN PROBLEMA SUL LANCIO DI TRE DADI

Dei gentiluomini fiorentini sottoposero a Galileo il quesito del perché fosse più facile ottenere il 10 e l'11, rispetto al 9 e al 12, nel gioco della zara. Il gioco della zara era molto diffuso nel Medioevo e nel Rinascimento. Consisteva nel puntare sulla somma dei numeri ottenuti lanciando tre dadi.



Galileo Galilei
(1564-1642)

Che nel giuoco dei dadi alcuni punti sieno più vantaggiosi di altri, vi ha la sua ragione assai manifesta, la quale è il poter quelli più facilmente e più frequentemente scoprirsi che questi, il che dipende dal potersi formare con più sorte di numeri: onde il 3 e il 18, come che in un sol modo si posson con tre numeri comporre, cioè questi con 6. 6. 6 e quello con 1. 1. 1, e non altrimenti, più difficili sono a scoprirsi che v. g. il 6 o il 7, li quali in più maniere si compongono, cioè il 6 con 1. 2. 3 e con 2. 2. 2 e con 1. 1. 4, ed il 7 con 1. 1. 5, 1. 2. 4, 1. 3. 3, 2. 2. 3. Tuttavia ancorché il 9 e il 12 in altrettante maniere si compongono in quante



il 10 e l'11, perloché d'egual uso dovriano esser reputati, si vede nondimeno che la lunga osservazione ha fatto dai giuocatori stimarsi più vantaggiosi il 10 e l'11 che il 9 e il 12.

[...]

Comincio a considerare come essendo un dado terminato da sei faccie, sopra ciascuna delle quali gettato, egli può indifferentemente fermarsi; sei vengono ad essere le loro scoperte e non più, l'una differente dall'altra. Ma se noi insieme col primo getteremo il secondo dado, che pure ha altre sei faccie, potremo fare 36 scoperte tra di loro differenti, poichè ogni faccia del primo dado può accoppiarsi con ciascuna del secondo, ed in conseguenza fare 6 scoperte diverse; onde è manifesto, tali combinazioni essere sei volte 6, cioè 36. E se noi aggiungiamo il terzo dado, perchè ciascuna delle sue faccie, che pur son sei, può accoppiarsi con ciascuna delle 36 scoperte delli altri due dadi, avremo le scoperte di tre dadi esser sei volte 36, cioè 216, tutte tra di loro differenti. Ma perchè i punti dei tiri di tre dadi non sono se non 16, cioè 3. 4. 5 sino a 18, tra i quali si hanno a compartire le dette 216 scoperte, è necessario che ad alcuni di essi ne tocchino molte; e se noi ritroveremo quante ne toccano per ciascheduno, avremo aperta la strada di scoprire quanto cerchiamo, e basterà fare tale investigazione dal 3 sino al 10, perchè quello che converrà a uno di questi numeri, converrà ancora al suo sossopra.

[...] per esempio, nella prima casella abbiamo il punto 10 e sotto di esso sei triplicità di numeri con i quali egli si può comporre,

1	10		9		8		7		6		5		4		3		
3																	
6																	
10	6 3 1	6	6 2 1	6	6 1 1	3	5 1 1	3	4 1 1	3	3 1 1	3	2 1 1	3	1 1 1	1	
15	6 2 2	3	5 3 1	6	5 2 1	6	4 2 1	6	3 2 1	6	2 2 1	3					
21	5 4 1	6	5 2 2	3	4 3 1	6	3 3 1	3	2 2 2	1							
25	5 3 2	6	4 4 1	3	4 2 2	3	3 2 2	3									
27	4 4 2	3	4 3 2	6	3 3 2	3											
108	4 3 3	3	3 3 3	1													
108																	
216		27		25		21		15		10		6		3		1	

che sono 6. 3. 1, 6. 2. 2, 5. 4. 1, 5. 3. 2, 4. 4. 2, 4. 3. 3. E perchè la prima triplicità 6. 3. 1 è composta di tre numeri diversi, può (come sopra si è dichiarato) essere fatta da 6 scoperte di dadi differenti; però⁵ accanto ad essa triplicità 6. 3. 1 si nota 6, ed essendo la seconda 6. 2. 2, composta di due numeri eguali e di un altro diverso, non può prodursi se non in 3 differenti scoperte, però se gli nota accanto 3; la terza triplicità 5. 4. 1, composta di tre numeri diversi, può farsi da 6 scoperte, onde si nota col numero 6, e così dell'altre tutte, e finalmente a piè della colonnetta de' numeri delle scoperte è raccolta la somma di tutte: dove si vede come il punto 10 può farsi da 27 scoperte di dadi differenti, ma il punto 9 da 25 solamente, e l'8 da 21, il 7 da 15, il 6 da 10, il 5 da 6, il 4 da 3 e finalmente il 3 da

⁵ Perciò.

1, le quali tutte sommate insieme ascendono al numero di 108. Ed essendo altrettante le scoperte de sossopri, cioè dei punti 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18 si raccoglie la somma di tutte le scoperte possibili a farsi colle faccie dei tre dadi, che sono 216. E da questa tavola potrà ognuno, che intenda il giuoco, andar puntualissimamente misurando tutti i vantaggi, per minimi che sieno, delle zare⁶, degl'incontri e di qualunque altra particolar regola che in esso giuoco si osserva.

Galileo Galilei, *Opere*, t. XIV.

Per interpretare il documento

1. Ricava dalla prima parte del documento e riformula il testo del problema relativo ai punteggi 9 e 12, 10 e 11 nel lancio di tre dadi.
2. Come giustifica Galileo il fatto che nel lancio di due dadi i casi possibili sono 36?
3. Come giustifica Galileo il fatto che nel lancio di tre dadi i casi possibili sono 216?
4. Quando una “triplicità” è formata da numeri tutti diversi, a quante “scoperte” dà luogo? E se la “triplicità” è costituita da due numeri uguali e uno diverso? E se i tre numeri sono uguali?
5. Costruisci la parte mancante della tabella, vale a dire quella dei “sossopri”, “cioè dei punti 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18”.
6. Ricava dalla tabella realizzata al punto precedente perché il “9 e il 12 in altrettante maniere si compongono in quante il 10 e l’11” e perché, tuttavia, questi ultimi siano più “vantaggiosi”.

Fai le tue ipotesi

1. I giocatori che hanno posto il problema a Galileo hanno rilevato “vantaggi”, per “minimi che sieno, delle zare”, hanno cioè rilevato la maggior probabilità di ottenere i punteggi 10 e 11 rispetto a 9 e 12. In base a quali elementi avranno fatto la loro scoperta?

⁶ Il VI canto del *Purgatorio* nella *Divina Commedia* di Dante inizia con:

Quando si parte il giuoco della zara

Colui che perde si riman dolente

Ripetendo le volte, e tristo impara.

Nella terzina di Dante, viene delineata la situazione del giocatore perdente che, allorquando gli altri hanno abbandonato il tavolo, rimane a ripetere, diremmo, i casi possibili e quelli favorevoli ai diversi punteggi.

SCAMBI EPISTOLARI

Sono rimaste nella storia della matematica le lettere che Fermat e Pascal si scambiarono durante il 1654: in esse, il calcolo delle probabilità cessa di essere semplicemente un aspetto del calcolo combinatorio.

Anche a Pascal, un accanito giocatore aveva sottoposto dei quesiti legati al gioco d'azzardo. Qui riportiamo il *problema delle parti* che era stato affrontato da altri matematici nei secoli precedenti, con risultati non soddisfacenti in quanto le soluzioni prodotte non erano esatte (diciamo il peccato ma non i peccatori, che comunque erano matematici di valore e i cui nomi li potete trovare alle pp. 349-50-1 di un libro che si trova anche in qualche biblioteca comunale, vale a dire: Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni).

Il *problema delle parti*, nella forma analizzata da Pascal nella lettera qui riportata, si può formulare così: “Due contendenti si affrontano in un gioco, nel quale hanno uguale abilità, mettendo in palio ciascuno 32 monete: si aggiudica il montepremi totale chi per primo consegue 3 vittorie. Per motivi misteriosi, però, devono interrompere il confronto e lasciarsi quando sono sul punteggio di 2 a 1. Come dovranno dividersi la posta in palio? e se fossero stati sul 2 a 0? e se fossero stati sull'1 a 0?”

Ecco, pressappoco, come faccio per sapere il valore di ciascuna partita, quando due giocatori giocano, per esempio, tre partite e ciascuno ha messo in gioco 32 monete: supponiamo che il primo ne abbia due e l'altro una; essi giocano adesso una partita della quale la sorte è tale che se la vince il primo, egli guadagna tutto il denaro che è in gioco, cioè 64 monete; se la vince l'altro, essi sono due a due e di conseguenza, se essi si vogliono separare, è necessario che ciascuno ritiri la sua posta, cioè ciascuno 32 monete. Considerate dunque, signore, che se il primo vince, gli toccano 64 [monete]; se egli perde gli toccano 32 [monete]. Dunque se essi vogliono arrischiare questa partita e separarsi senza giocarla, il primo deve dire: «Io sono sicuro di avere 32 monete, poiché la perdita stessa me le dà; ma per le altre 32, può essere che le avrò io, può essere che le avrete voi; il rischio è uguale; dividiamo dunque queste 32 monete a metà e datemi, oltre queste, le mie 32 che sono per me sicure». Egli avrà dunque 48 monete e l'altro 16.

Supponiamo adesso che il primo abbia due partite e l'altro nessuna, e che essi comincino a giocare una partita. La sorte di questa partita è tale che se la vince il primo egli prende tutto il denaro, 64 monete; se la vince l'altro, eccoci ricondotti al caso precedente, nel quale il primo avrà due partite e l'altro una.

Ora noi abbiamo già mostrato che in questo caso spettano, a quello che ha le due partite, 48 monete: dunque se essi non vogliono giocare questa partita, egli deve dire così: «Se io la vinco, guadagnerò tutto, che è 64; se la perdo mi apparterrà legittimamente 48: datemi dunque le 48 che mi sono certe nel caso che io perda e dividiamo le altre 16 a metà, perché c'è lo stesso rischio che le vinciate voi come che le vinca io». Così egli avrà 48 e 8, che sono 56 monete.



Supponiamo infine che il primo non abbia che una partita e l'altro nessuna. Voi vedete, signore, che se essi cominciano una nuova partita, la sorte è tale che, se il primo la vince, egli avrà appunto due partite e pertanto, per il caso precedente, gli apparterranno 56 [monete], se egli la perde, essi sono a pari: dunque gli appartengono 32 monete. Dunque egli deve dire: «Se non la volete giocare, datemi 32 monete, che mi sono sicure, e dividiamo il resto di 56 a metà. Da 56 togliete 32, resta 24; dividete 24 a metà, prendetene 12, ed io [ne prendo] 12, che con 32, fanno 44».

Ora, in questo modo, voi vedete mediante le semplici sottrazioni che, per la prima partita, gli appartengono 12 monete; per la seconda altre 12; e per l'ultima 8.

Lettera di Pascal a Fermat del 29 luglio 1654.

Per interpretare il documento

1. Punteggio 2 a 1: se il giocatore in vantaggio vincesse la partita successiva, conquisterebbe monete; se perdesse, il punteggio diventerebbe di parità e sarebbe giusto dividere le 64 monete in parti uguali: ciascuno.
La media fra 64 e 32 è
2. Punteggio 2 a 0: se il giocatore in vantaggio vincesse la partita successiva, conquisterebbe monete; se perdesse, il punteggio diventerebbe 2 a 1 (caso precedente) e gli spetterebbero monete.
Quindi la media fra 64 e 48 è
3. Punteggio 1 a 0: se il giocatore in vantaggio vincesse la partita successiva, conquisterebbe monete (caso precedente); se perdesse, il punteggio diventerebbe 1 a 1 e spetterebbero monete a testa.
Quindi la media fra 56 e 32 è
4. Ricava il numero di monete del giocatore in svantaggio, in ciascuno dei tre casi esaminati, sottraendo a 64 le vincite dell'avversario.
5. Per calcolare la media aritmetica di due numeri a e b ci sono più strategie, ad esempio: $(a+b):2$ o anche $a+(b-a):2$. Dopo aver mostrato l'equivalenza delle due espressioni, individua quale viene utilizzata da Pascal.

LA CONCEZIONE CLASSICA DELLA PROBABILITÀ

Fino agli inizi del XIX secolo il concetto di probabilità rimase ambiguo. A Laplace va il merito di averlo definito come rapporto fra il numero dei casi favorevoli a un determinato evento e il numero dei casi possibili.

Nel brano qui riportato, Laplace presenta un'introduzione divulgativa, per i non specialisti, al calcolo delle probabilità. Agli aspetti più strettamente matematici fa precedere considerazioni filosofiche.

Si potrebbe addirittura dire, a rigore, che quasi tutte le nostre conoscenze sono soltanto probabili; e anche nelle pochissime cose che noi possiamo conoscere con certezza, cioè nelle scienze matematiche, i principali mezzi per raggiungere la verità, cioè l'induzione e l'analogia, si fondano sulla probabilità; quindi l'intero sistema delle conoscenze umane si fonda sulla teoria che esponiamo in questo saggio.

[...]

Una intelligenza che in un determinato istante conoscesse tutte le forze che animano la natura, e la posizione relativa degli esseri che la compongono, se (questa intelligenza) fosse talmente potente da poter analizzare tutti questi dati, allora abbraccerebbe con una stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e quelli dell'atomo più leggero; nulla sarebbe incerto per questa intelligenza ed il futuro sarebbe a lei presente così come il passato⁷.

Lo spirito umano ci offre una pallida idea di una intelligenza di questo tipo con la perfezione che ha saputo dare alle leggi della astronomia. Le sue scoperte nel campo della meccanica e della geometria, insieme a quelle sulla gravitazione universale, gli hanno permesso di comprendere sotto le stesse espressioni matematiche gli stati passati e futuri del sistema dell'universo.

[...]

Tutti gli sforzi nella ricerca della verità tendono ad avvicinare incessantemente lo spirito umano alla comprensione di ciò che concepiamo, ma da cui resterà sempre infinitamente distante.

[...]

Ora la regolarità che l'astronomia ci mostra nei movimenti delle comete ha luogo certamente in ogni altro fenomeno.

Infatti la curva descritta da una molecola di aria o di un vapore è regolata in modo altrettanto certo delle orbite dei pianeti; la sola differenza tra i due fenomeni è quella che vi è messa dalla nostra ignoranza.

La probabilità ha relazione da una parte con questa ignoranza e dall'altra parte con le nostre conoscenze.

[...]

Il rapporto del numero dei casi favorevoli a quello di tutti gli eventi possibili è la misura di questa probabilità; essa pertanto non è che una frazione il cui numeratore è il numero degli eventi favorevoli, e il denominatore è il numero di tutti gli eventi possibili.

La nozione che abbiamo dato di probabilità suppone che se si fanno crescere nello stesso rapporto i numeri degli eventi possibili e quello degli eventi favorevoli la probabilità rimanga la stessa.



⁷ Laplace fa intendere che le leggi ferree della natura non lasciano spazio alla libertà degli esseri viventi.

Per convincersi di questo si pensi a due urne A e B, la prima delle quali contenga quattro palline bianche e due nere, la seconda due bianche e una nera. Si può immaginare che le due palline nere della prima siano attaccate da un filo, che si rompe quando si estrae una pallina; e la stessa cosa si può pensare a coppie delle quattro bianche. Ora tutti gli eventi che conducono alla estrazione di una pallina nera sono costituiti dall'unico evento, rappresentato dal sistema nero.

Pensiamo ora che i fili non si rompano quando si estrae una pallina; è chiaro che il numero degli eventi possibili non cambierà così come non cambierà il numero dei casi favorevoli; soltanto, in questo caso, si estrarranno dall'urna due palline alla volta; ma la probabilità di estrarre una pallina nera sarà sempre la stessa.

Ma allora si ricade nel caso dell'urna B, con la sola differenza che le tre palline di quest'ultima siano sostituite da tre sistemi di coppie di palline, unite tra loro in modo inscindibile.

Quando tutti i casi possibili sono anche favorevoli ad un certo evento, la probabilità di questo si cambia in certezza, e la sua espressione diventa uguale ad 1.

[...]

Si cercano nelle estrazioni passate della lotteria francese i numeri usciti più frequentemente per formare delle combinazioni sulle quali si crede di poter scommettere con vantaggio.

Ma, dato il modo in cui si rimescolano i numeri prima di ogni estrazione, il passato non deve avere alcuna influenza sull'avvenire.

Il fatto che certi numeri siano sorteggiati più frequentemente di certi altri dipende solo dalle anomalie del caso; ho fatto dei calcoli in vari casi e ho trovato che queste anomalie erano comprese sempre nei limiti consentiti dalla ipotesi non inverosimile di una uguale probabilità di sorteggio di ogni numero.

[...]

Dei diversi modi di avvicinarsi alla certezza

[...]

L'induzione sa scoprire i principi generali delle scienze, ma non basta per stabilirli in modo rigoroso. Occorre sempre confermarli con dimostrazioni, oppure con esperienze decisive; perché la storia della scienza ci mostra che l'induzione ha condotto talvolta a risultati inesatti.

Citerò come esempio un teorema sui numeri primi dovuto a Fermat: questo grande matematico, che aveva profondamente meditato sulla loro teoria, cercava una formula che esprimesse dei numeri primi, dando direttamente un numero primo più grande di quale si voglia numero assegnabile.

L'induzione lo condusse a pensare che il 2, elevato ad un esponente che fosse a sua volta una potenza di 2, addizionato alla unità, desse sempre un numero primo. Così si ha:

$$2^2+1=5$$

$$2^{2^2}+1=17$$



Egli trovò che la cosa era ancora vera per la ottava potenza e per la sedicesima potenza di due, aumentata della unità.

Questa induzione, confortata da numerose considerazioni di aritmetica, gli fece pensare che il risultato fosse generale. Tuttavia egli confessa di non essere mai riuscito a dimostrare tale risultato. Infatti Euler stesso riconobbe che la proprietà non era vera per la trentaduesima potenza del 2, che, aumentata di 1, dà 4 294 967 297, numero che è divisibile per 641.

Pierre-Simon Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*.

Per interpretare il documento

1. Limitatezza della conoscenza e calcolo delle probabilità: individua in quale relazione li colloca Laplace.
2. Se il “numero dei casi favorevoli” è n e “quello di tutti gli eventi possibili” è m , descrivi con una formula la definizione di probabilità data da Laplace.
3. Scrivi un tuo parere in merito alla giustificazione della definizione di probabilità esposta da Laplace: l’argomentazione ti sembra convincente? Quali argomenti terrestri più efficaci?
4. Qual è l’opinione di Laplace su chi vuole fare previsioni riguardo alla lotteria francese?
5. L’induzione e la matematica: descrivi l’esempio riportato nel documento.
6. Certezza e matematica: è cambiata la tua opinione dopo la lettura del brano di Laplace?
7. Come si conciliano i due aspetti apparentemente contraddittori, vale a dire concezione deterministica e teoria della probabilità, in Laplace?



Pierre-Simon Laplace
(1749-1827)

ALTRE CONCEZIONI DI PROBABILITÀ

La concezione *frequentista* deriva dall’idea che la probabilità vada determinata con riferimento esclusivo all’esperienza, rifiutando ogni assunzione a priori, al contrario di quello che era orientato a fare Laplace. Da John Venn (1834-1923) - quello dei diagrammi...- in poi, questo orientamento trovò applicazione in particolare nelle scienze sperimentali. La probabilità di un evento è il limite della frequenza relativa, con la quale esso si verifica, al crescere indefinito del numero di prove. Il brano che riportiamo è dovuto al matematico austriaco Richard von Mises (1883-1953).

La concezione *soggettivista* è stata diffusa dall’italiano Bruno de Finetti ed il documento che riportiamo ne introduce alcuni aspetti essenziali.

Ogni branca delle scienze esatte è la descrizione idealizzata, semplificata, logicamente costruita, di un certo settore del mondo osservabile. La geometria si occupa di linee, superfici, etc., cioè delle nozioni per le quali si danno definizioni in termini matematici, ma che al tempo stesso riflettono osservazioni reali. L'oggetto matematizzato del calcolo delle probabilità è formato da *sequenze infinite di esperienze uniformi* [...] sequenze nelle quali il limite della frequenza relativa di ciascun risultato individuale esiste. Se tra gli N primi elementi della sequenza il risultato A si ripete N_1 volte, supponiamo che il limite ∞

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_1}{N} = p_1$$

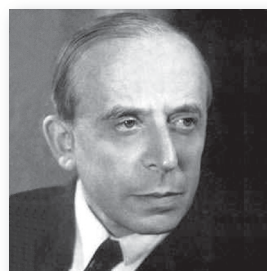
esista e lo chiamiamo la chance (o la probabilità, vedere sopra) di A in questa sequenza. [...]

Il fatto che conta, è che ogni enunciato del calcolo delle probabilità è un enunciato concernente sequenze infinite che ammettono i limiti di frequenza. La probabilità che Omero fosse un personaggio del IX sec. a.C., autore dell'*Iliade* e dell'*Odissea*, non ha relazione alcuna col calcolo delle probabilità, in ogni caso non più di quanto la «forza» della legge, o la «forza» di una convinzione hanno a che fare con la nozione di forza in meccanica razionale.

Richard von Mises, *Sur les fondements du calcul des probabilités*, pp.1-2.

Per interpretare il documento

1. Soffermati sul fatto che l'oggetto del calcolo delle probabilità, secondo l'autore, è costituito da "*sequenze infinite*" e individua dove e come von Mises vi fa riferimento.
2. In quale delle due seguenti sequenze si può parlare di "*esperienze uniformi*"?
 - a. Estrazione ripetuta di una pallina da un'urna contenente due palline nere e due verdi ad occhi bendati.
 - b. Estrazione ripetuta di una pallina da un'urna contenente due palline nere e due verdi, a volte usando la benda, a volte senza benda.
3. Come si determina, utilizzando la definizione di Von Mises, la probabilità di ottenere testa nel lancio di una moneta?
4. Descrivi una situazione concreta nella quale si utilizza un approccio frequentista per esprimere un giudizio di probabilità.
5. Rifletti riferendoti alle ultime righe del documento: di quali eventi non si può calcolare la probabilità? Fai qualche esempio e discutilo con i tuoi amici.
6. "*Sequenze infinite*" non sono praticamente realizzabili e quindi, con una scelta "soggettiva", bisogna decidere quando interrompere le "esperienze": parti da questa affermazione per stabilire un collegamento fra la concezione di Von Mises e la successiva di de Finetti.



Richard von Mises
(1883-1953)

Di molte asserzioni, o proposizioni, spesso non sappiamo dire se sono «vere» o «false» (ad es. per quanto riguarda tutti gli eventi futuri), ma soltanto se sono più o meno *verosimili* o *probabili*. Anche qui si presentano le due alternative: di concepire tale valutazione di probabilità come avente un senso obbiettivo, o come avente semplicemente un senso soggettivo. Quasi sempre si cerca, anche con grandi sforzi, di persuadere o di persuadersi dell'esistenza di un significato obbiettivo; tutti questi sforzi ebbero però sempre un esito poco soddisfacente, tanto vero che nessuna definizione o concezione di probabilità ha mai saputo imporsi o affermarsi.

Il calcolo delle probabilità è la logica del probabile. Come la logica formale insegna a dedurre la verità o falsità di certe conseguenze dalla verità o falsità di certe premesse, così il calcolo delle probabilità insegna a dedurre la maggiore o minore verosimiglianza o probabilità di certe premesse. Per chi attribuisca alla probabilità un significato obbiettivo, il calcolo delle probabilità dovrebbe avere un significato obbiettivo, i suoi teoremi esprimere delle proprietà che nel campo del reale risultano soddisfatte. Ma è inutile fare simili ipotesi. Basta limitarsi alla concezione soggettiva, considerare cioè la probabilità come il grado di fiducia sentito da un dato individuo nell'avverarsi di un dato evento, e si può dimostrare che i noti teoremi nel calcolo delle probabilità sono condizioni necessarie e sufficienti perché le opinioni di un determinato individuo non siano intrinsecamente contraddittorie e incoerenti.

Bruno de Finetti, *Fondamenti logici del ragionamento probabilistico*.

Per interpretare il documento

1. Quali sono le obiezioni che de Finetti muove alle altre concezioni della probabilità?
2. Eneuclea la concezione soggettiva della probabilità.
3. Soggettività in matematica: esprimi un commento anche riferendoti alla tua personale esperienza scolastica.



Bruno de Finetti
(1906-1985)

Infinito

Fonte di paradossi, l'infinito è stato “domato” dai matematici negli ultimi secoli ma, com'è lecito aspettarsi, è ancora fonte di quesiti che animano la ricerca scientifica.

Nella piccola rassegna di documenti che proponiamo, vengono esaminate alcune delle riflessioni che l'infinito (l'infinitamente grande, l'infinitamente piccolo) ha fatto nascere. Si tratterà di ripensare a situazioni ed oggetti matematici a te noti da molto tempo, analizzandoli da nuovi punti di vista.

CORRIDORI, FRECCIE, LEPRI, TARTARUGHE, ...

Riportiamo anzitutto un brano di Aristotele nel quale egli descrive il paradosso di Zenone riguardante il movimento, uno di quelli che “mettono di cattivo umore chi tenta di risolverli”.

[...] il cosiddetto Achille: questo intende provare che il più lento, correndo, non sarà mai sorpassato dal più veloce: infatti necessariamente l'inseguitore dovrebbe giungere prima là donde il fuggitivo è balzato in avanti; sicché necessariamente il più lento conserva una certa precedenza. Questo ragionamento è appunto quello della dicotomia⁸ ma ne differisce per il fatto che non divide in due anche la grandezza successivamente assunta. La conclusione di tale ragionamento è che il più lento non viene raggiunto; ma a questa conclusione si arriva mediante lo stesso procedimento fatto nella dicotomia (infatti la conclusione di entrambi i ragionamenti è che non si può giungere al limite, dal momento che la grandezza è divisa in un certo modo: ma nel secondo ragionamento si aggiunge il fatto che neppure l'eroe che è stato altamente celebrato come il più veloce, riesce a raggiungere nell'inseguimento la cosa più lenta); sicché necessariamente anche la soluzione sarà la medesima.

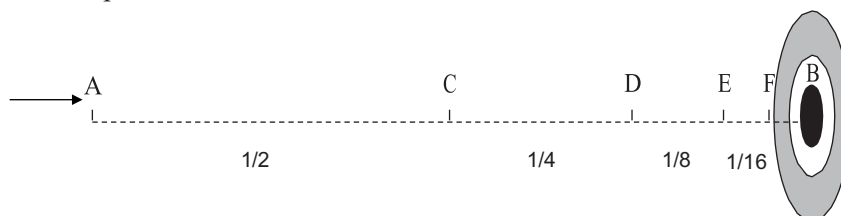
Ma, in realtà, è falso ritenere che ciò che precede non viene raggiunto; ma tuttavia esso viene raggiunto, purché si ammetta che venga percorsa una distanza finita.

Aristotele, *La fisica*, libro VI (Z), 9, 239 b, trad. di A. Russo, Edizioni Laterza, Bari, 1968.

⁸ Si tratta del *paradosso della freccia*, vedi *Per interpretare il documento*.

Per interpretare il documento

1. Cerca su di un libro di filosofia il paradosso di Achille e della Tartaruga.
2. Il paradosso della *dicotomia* o della *freccia* si può illustrare come segue. Secondo Zenone, il movimento è legato all'apparenza e non può esistere, come mostrano ragionamenti quali il seguente: per raggiungere il punto B, la freccia scagliata dalla posizione A deve prima raggiungere il punto C, a metà fra A e B, poi D, a metà fra C e B, poi E,...



Individua nel documento quale argomentazione riporta Aristotele per confutare la tesi di Zenone. Perché la somma di infiniti termini $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ dà un risultato finito?

3. Senza farti mettere di cattivo umore, esprimi il tuo parere in merito a come tu risolveresti il paradosso di Zenone, eventualmente richiamando quanto dice Aristotele.

QUANDO IL TUTTO NON È MAGGIORE DELLA PARTE

Il paradosso aritmetico di Galileo e la proposizione di J. Farey aiuteranno ad interpretare la definizione di insieme infinito contenuta nel documento di Dedekind riportato più avanti. John Farey (1766-1826) era di professione geologo.

[...] Converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri⁹ poiché tanti sono quanti le lor radici, e radici son tutti i numeri; e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser assai più che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati. E pur tuttavia si va la moltitudine de i quadrati sempre con maggior proporzione diminuendo, quanto a maggior numeri si trapassa [...].

Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, 1638, p. 43.

Per interpretare il documento

1. Individua nel documento di Galileo quali passi suggeriscono che: a) ciascun numero naturale è radice quadrata di un altro numero naturale; b) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,

⁹ Numeri naturali.

8, **9**, 10, 11, ...: i numeri in grassetto (i quadrati) sono meno di quelli che non sono in grassetto; c) da 1 a 100 ci sono più quadrati perfetti che da 101 a 200.

2. Completa la tabella seguente e realizza un grafico:

	Da 1 a 100	Da 101 a 200	Da 201 a 300	Da 301 a 400	...
Quanti quadrati perfetti ci sono					

[...] i numeri razionali (positivi) sono numerabili [...]

$1/1; 1/2; 2/1; 1/3; 2/2; 3/1; 1/4; 2/3; 3/2; 4/1; \dots$

John Farey, On a curious property of vulgar fractions,
Philosophical Magazine, 47, 1816, pp. 385-86.

Per interpretare il documento

1. Ecco come ‘contare’ i numeri razionali positivi, cioè come mostrare che sono “numerabili”:

1/1	1/2	2/1	1/3	2/2	3/1	1/4	2/3	3/2	4/1	1/5	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...

Prosegui nell’elenco dei numeri frazionari aggiungendo gli altri che hanno 6 come somma di numeratore e denominatore.

Elimina le ‘ripetizioni’ (i termini equivalenti: $1/1=2/2$, ... $1/2=2/4$, ...) e rifai la tabella.

2. Realizza un nuovo elenco per mostrare che i numeri interi (positivi, nulli, negativi) sono numerabili.
3. Realizza un nuovo elenco per mostrare che sono numerabili anche i numeri razionali (positivi, nulli, negativi).

L’INFINITO, FONTE DI ALTRI PARADOSSI

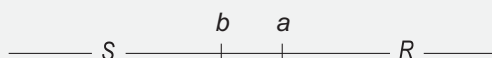
Già gli esempi precedenti mostrano come per ‘domare’ l’infinito sia necessario appianare situazioni apparentemente contraddittorie. Ai paradossi dell’infinito, Bolzano ha dedicato una sua opera: da essa è tratto il documento seguente.

Bernhard Bolzano (1781-1848) nacque e visse a Praga, fu teologo e matematico.



Bernhard Bolzano
(1781-1848)

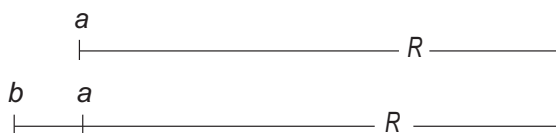
[...] non tutti gli insiemi infiniti possono essere considerati uguali tra loro *per quel che riguarda la loro molteplicità*; al contrario, molti di essi sono *più grandi* (o *più piccoli*) di un altro, nel senso di includere quest'altro come parte di se stessi (o viceversa di essere essi stessi solo una parte di quest'altro). Molti considerano anche questa affermazione come *paradossale*. In effetti, tutti coloro che definiscono l'infinito come qualcosa non suscettibile di ulteriore aumento debbono trovare non soltanto paradossale, ma addirittura *contraddittoria*, l'idea di un infinito che sia più grande di un altro. Noi però abbiamo testé visto che questa opinione poggia su un concetto di infinito che non è in accordo con l'uso linguistico del termine. La nostra definizione, che concorda non solo con l'uso linguistico, ma anche con gli scopi della scienza, non induce alcuno a ritenere contraddittorio, o anche solo sorprendente, che un insieme infinito sia maggiore di un altro. Per chi può non essere evidente, per esempio, che la lunghezza della retta che si prolunghi illimitatamente nella direzione aR è infinita? Che invece la retta bR , che dal punto b prosegue nella stessa direzione, sia da dirsi maggiore di aR della porzione ba ? E la retta che prosegue illimitatamente tanto dalla parte aR quanto da quella aS sia da dirsi maggiore di una quantità che è essa stessa infinita? E così via.



Bernhard Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, nn. 19, 20.

Per interpretare il documento

1. Bolzano suggerisce che, dato un insieme infinito, è possibile trovarne uno più grande: individua le argomentazioni da lui prodotte a sostegno di questa considerazione.
2. Una semiretta è un insieme infinito di punti. Prova a giustificare questa affermazione utilizzando la definizione di insieme infinito fornita da Dedekind (vedi oltre; pensa alla retta dei numeri reali e al punto x della semiretta aR fai corrispondere $x-(a-b)$ sulla semiretta $bR...$).

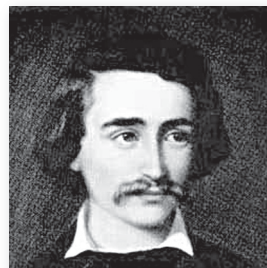


3. Dunque per Dedekind la semiretta bR è “simile” alla semiretta aR e cioè non si può dire che contenga ‘più punti’... Cantor (vedi oltre) ci spiegherà come trovare due insiemi veramente uno ‘più grande’ dell’altro. Rifletti allora sull’effettivo significato delle osservazioni di Bolzano...

SISTEMIAMO LE CONOSCENZE

L'esposizione sistematica dell'opera da cui è tratto il documento che segue indica che nella seconda parte del Diciannovesimo secolo si era giunti a padroneggiare molti dei concetti che creavano sconcerto nei decenni precedenti. Ripetiamo però che per la comprensione di questo è importante ricordare le situazioni esposte negli altri documenti.

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) nacque a Brunswick. Ha fornito basilari contributi all'analisi ed è annoverato fra i fondatori dell'algebra moderna.



J. W. Richard Dedekind
(1831-1916)

§ 5. Il *finito* e l'*infinito*

64. Definizione. Un sistema¹⁰ S si dice *infinito* se è simile a una sua parte propria¹¹ [...]; nel caso contrario S si dice un sistema *finito*.

65. Teorema. Ogni sistema che consiste di un unico elemento è finito.

Dimostrazione. Infatti un tale sistema non possiede alcuna parte propria.

66. Teorema. Esistono sistemi infiniti.

Dimostrazione. Il mondo dei miei pensieri, cioè la totalità S di tutte le cose che possono essere oggetto del mio pensiero, è infinito. Difatti, se s indica un elemento di S , il pensiero s' che s può essere oggetto del mio pensiero è esso stesso un elemento di S . [...]

Richard Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, n. 5.

Per interpretare il documento

1. Nella definizione di Dedekind, “simile” sta per “in corrispondenza biunivoca”. Ad esempio, l'insieme dei numeri naturali è infinito perché è simile alla sua parte propria rappresentata dai quadrati perfetti. Utilizzando la spiegazione di Galileo, illustra questa corrispondenza biunivoca (dopo avere eventualmente ricercato sul libro di testo la definizione di corrispondenza biunivoca).
2. Indica le due parti di un insieme costituito da un unico elemento: hai trovato parti proprie?
3. s' è il pensiero che s può essere oggetto del mio pensiero,
 s'' è il pensiero che s' può essere oggetto del mio pensiero,
 s''' è il pensiero che s'' può essere oggetto del mio pensiero, ecc.

¹⁰ Insieme.

¹¹ Propria, che cioè non coincide con l'intero insieme né con l'insieme vuoto.

L'insieme $\{s, s', s'', s''', \dots\}$ è infinito: costruisci una corrispondenza biunivoca che lo dimostri.

4. Una corrispondenza associa al numero naturale n il numero $2n+1$ (che non può che essere dispari...). Mostra che la corrispondenza così descritta, fra gli insiemi dei numeri naturali e dei numeri dispari, è biunivoca.
5. Costruisci una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri naturali e la sua parte propria rappresentata dai numeri pari.
6. Scegli altri insiemi infiniti, individua una loro parte propria tale da poter costruire una corrispondenza biunivoca.
7. Esiste una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei numeri naturali e quello dei numeri naturali compresi fra 1 e 10?

§ 3

La continuità della retta

Ora è della massima importanza il fatto che esistono sulla retta L infiniti punti i quali non corrispondono a nessun numero razionale. Se un punto p corrisponde a un numero razionale a , allora la lunghezza op è notoriamente commensurabile con la unità di lunghezza prescelta nella costruzione, vale a dire esiste una terza lunghezza, la cosiddetta misura comune, di cui quelle due siano multiple intere. Ma già i Greci antichi sapevano e hanno dimostrato che esistono lunghezze incommensurabili con una data lunghezza unitaria, per es., la diagonale di un quadrato il cui lato si assuma per unità di lunghezza¹². Se si porta una tale lunghezza sulla retta a partire dal punto o , allora il punto estremo che si ottiene non corrisponde a nessun numero razionale. Siccome inoltre si può dimostrare facilmente che esistono infinite lunghezze incommensurabili con la data lunghezza unitaria, possiamo affermare che la retta L è infinitamente più ricca di punti che non il campo razionale R di numeri¹³. Quindi i numeri razionali non bastano per poter seguire aritmeticamente tutti i fenomeni sulla retta, e appare perciò indispensabile raffinare sostanzialmente lo strumento R , creando numeri nuovi, di guisa che il campo dei numeri acquisiti sia altrettanto completo o, diciamo subito, altrettanto continuo, quanto lo è la retta.

[...]

§ 4

La creazione dei numeri irrazionali

[...] abbiamo rilevato che ogni numero razionale a determina una ripartizione¹⁴ del sistema R in due classi A_1, A_2 di tale natura che ogni numero a_1 della prima classe A_1 è minore di ogni numero a_2 della seconda classe A_2 ; il numero a stesso è o il numero massimo della prima classe, o il numero minimo della seconda. Ora, noi chiameremo *sezione* e indicheremo

¹² Vedi il documento sulla radice quadrata di 2, riportato nella parte dedicata alla geometria.

¹³ Per indicare l'insieme dei numeri razionali, attualmente si preferisce usare il simbolo $\mathbb{Q}$.

¹⁴ L'unione di A_1 e A_2 deve dare l'insieme $\mathbb{Q}$.

col simbolo (A_1, A_2) ogni ripartizione del sistema R in due classi A_1, A_2 che goda soltanto di questa proprietà caratteristica che ogni numero della classe A_1 , sia minore di ogni numero della classe A_2 . Possiamo dire allora che ogni numero razionale a determina una sezione o piuttosto due sezioni, le quali però noi non considereremo come essenzialmente distinte. Questa sezione gode *inoltre* della proprietà ulteriore, che o tra i numeri della prima classe esiste un numero massimo, o tra i numeri della seconda classe esiste un numero minimo. E inversamente, se una sezione gode di quest'ultima proprietà, allora essa è prodotta da questo numero razionale massimo o minimo.

Ma è facile provare l'esistenza di infinite sezioni non prodotte da nessun numero razionale. [...]

Nel fatto che non tutte le sezioni sono prodotte da numeri razionali consiste l'incompletezza o la discontinuità del campo R di tutti i numeri razionali.

Orbene, ogni volta che è data una sezione (A_1, A_2) che non sia prodotta da nessun numero razionale, noi *creiamo* un nuovo numero, un numero *irrazionale* α , che noi consideriamo come completamente definito da questa sezione; noi diremo che il numero α corrisponde a questa sezione e che esso la produce. Adesso dunque ad ogni sezione corrisponde uno ed uno solo numero determinato, razionale o irrazionale, e noi considereremo come distinti due numeri, quando e solo quando essi corrispondono a due sezioni sostanzialmente distinte.

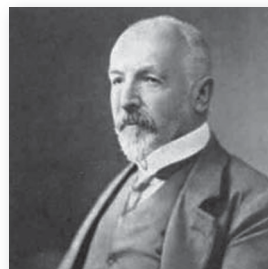
Richard Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*.

Per interpretare il documento

1. Come si può determinare una misura che sia comune ad un numero razionale e all'unità? Esempio: una misura comune a $3/4$ e 1 è $1/4$ perché (completa)
 $1/4 \cdot \square = 3/4$ e $1/4 \cdot \square = 1$; "misura comune" potrebbe essere anche $1/8$ perché ...
2. Scegli coppie di numeri razionali e determina una, come dice Dedekind, "misura comune" ai due numeri.
3. "[...] esistono infinite lunghezze incommensurabili con la data lunghezza unitaria": come $\sqrt[n]{n}$, se $n \in \mathbf{N}$ e $n \neq m^2 \forall m \in \mathbf{N}$. Interpreta quest'ultima scrittura simbolica utilizzando opportuni esempi numerici.
4. $\sqrt{2}$ è incommensurabile con l'unità e così pure π : anche $k \cdot \sqrt{2}$ con k intero non nullo lo è. Scrivi altri esempi di numeri irrazionali, ricorrendo anche ad una ricerca sul libro di testo o su altre fonti.
5. Cos'è una "sezione" nell'insieme dei numeri razionali?
6. In che senso un numero razionale determina due "sezioni" nell'insieme dei numeri razionali che però non vanno considerate "essenzialmente distinte"?
7. Considera i numeri razionali maggiori di $\sqrt{2}$ ed i numeri razionali minori di $\sqrt{2}$: rifletti se il numero irrazionale $\sqrt{2}$ produce una "sezione".
8. Riferendoti al documento, indica se un numero irrazionale può determinare due "sezioni" non "essenzialmente distinte".

Il paradiso di Cantor

Georg Cantor (1845-1918), nato a Pietroburgo da padre tedesco, è stato il paladino dell'*infinito attuale*. Ci ha abituati a pensare all'infinito come a un numero. Ci ha insegnato che non c'è una sola specie di infinito ma che - incredibile! - un infinito può essere più grande di un altro. Per seguirlo nei suoi ragionamenti bisogna svincolarsi della nostra ristretta realtà terrena... ma forse neanche tanto.



Georg Cantor
(1845-1918)

I NUMERI REALI SONO DI PIÙ DEI NATURALI

Ogni numero *reale* ha una rappresentazione decimale: periodica (incluso il periodo 0) per i numeri razionali, non periodica per gli *irrazionali*; Ad esempio: 0,200000000...; 9,0312121212...; 1,414213562...; 3,141592653... (i puntini ci indicano che si tratta di infinite cifre). Cantor si sofferma su “elementi” che, come i numeri reali, dipendono da infinite “coordinate”.

(D) Siano m e w due caratteri qualsiasi distinti; consideriamo allora un aggregato di elementi $E=(x_1, x_2, \dots, x_v, \dots)$, che dipendono da infinite coordinate $x_1, x_2, \dots, x_v, \dots$, dove ciascuna di queste coordinate è m o w . Sia M la totalità di tutti gli elementi E .

Sono elementi di M - per esempio - i tre seguenti:

$E'=(m, m, m, \dots)$

$E''=(w, w, w, \dots)$

$E'''=(m, w, m, w, \dots)$.

Asserisco ora che una tale varietà¹⁵ non ha la potenza della serie $1, 2, 3, \dots, v, \dots$

Ciò risulta dalla seguente proposizione:

sia $E_1, E_2, \dots, E_v, \dots$ una qualsiasi serie semplicemente infinita¹⁶ di elementi della varietà M ; allora esiste sempre un elemento E_0 di M , che non coincide con nessun E_v .

Per dimostrarlo si ponga



¹⁵ M .

¹⁶ Numerabile, infinita come sono infiniti i numeri naturali.

$$E_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,v}, \dots)$$

$$E_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,v}, \dots)$$

...

$$E_\mu = (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \dots, a_{\mu,v}, \dots)$$

...

Qui gli $a_{\mu,v}$ sono in maniera determinata m o w . Si definisca ora una serie $b_1, b_2, b_v, \dots$, tale che b_v sia ancora uguale ad m o w e differisca da $a_{v,v}$. Allora se $a_{v,v} = m$, $b_v = w$, se $a_{v,v} = w$, $b_v = m$.

Consideriamo allora l'elemento

$$E_0 = (b_1, b_2, b_3, \dots)$$

di M ; si vede senz'altro che l'uguaglianza $E_0 = E_\mu$ non può essere soddisfatta per nessun valore positivo di μ , perché altrimenti per il μ considerato e per tutti i valori interi di v $b_v = a_{\mu,v}$. Allora, in particolare, $b_\mu = a_{\mu,\mu}$, che è escluso dalla definizione di b_v . Da questa proposizione segue immediatamente che la totalità di tutti gli elementi di M non si lascia portare nella forma di una serie $E_1, E_2, \dots, E_v, \dots$, perché altrimenti si presenterebbe la contraddizione che una cosa E_0 sarebbe sia elemento di M che non elemento di M ¹⁷.

Questa dimostrazione appare degna di nota [...]

Georg Cantor, *Über eine elementare Frage Mannigh.*

Per interpretare il documento

1. Per ogni punto della colonna di sinistra, nei casi in cui compaiono simboli letterali scrivi nella colonna centrale degli esempi di numeri in base due ottenuti sostituendo i valori 0 o 1; scrivi a destra la corrispondente citazione che ricavi dal documento di Cantor.
- 2.

- Esprimiamo ciascun numero reale (non solo i numeri interi o i decimali periodici...) in base due, cioè usando solo le cifre 0 e 1¹⁸. - Sono numeri reali*, ad esempio: 0,0000... 1,11111... 0,101010101... - L'insieme dei numeri reali* comprende tutti e soli i numeri scritti nel modo ora illustrato.		
--	--	--



¹⁷ E_0 sarebbe elemento di M perché scritto con i caratteri w e m ; non sarebbe elemento di M se si suppone (per assurdo) che M si lasci scrivere “nella forma di una serie $E_1, E_2, \dots, E_v, \dots$ ”

¹⁸ Ci limiteremo a considerare numeri reali con parte intera uguale a 0 oppure a 1 e perciò in questa attività accanto al termine “reali” metteremo “*”.

- Prendiamo $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots, r_j, \dots$ numeri reali* (numerati con i numeri naturali). Allora troverò sempre un numero reale r diverso da ciascuno degli r_j: $r_1 = a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1j}, \dots$ $r_2 = a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2j}, \dots$ $\dots$ $r_j = a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, \dots, a_{jj}, \dots$ $\dots$ dove gli a_{ij} sono 0 o 1. - Costruisco r in questo modo: se $r = b_1, b_2, b_3, \dots, b_j, \dots$ scelgo $b_1 \neq a_{11}$ (quindi se $a_{11} = 0$, scelgo $b_1 = 1$ o viceversa); scelgo $b_2 \neq a_{22}$; $b_3 \neq a_{33}$ e così via. - Se r coincidesse con uno degli r_j, diciamo ad esempio con r_3, allora, in particolare, a_{33} sarebbe uguale a b_3 ma ciò non è possibile per come abbiamo scelto b_3. - Se pensiamo alla "totalità di tutti" i numeri reali* e rifacciamo il ragionamento, capiamo che essi non si possono scrivere in un elenco $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots, r_j, \dots$		
---	--	--

- Qual è la parte intera dei numeri reali da 0 a 1 escluso (qual è, cioè, la loro prima cifra)? Quindi, la dimostrazione riportata nella prima colonna della tabella in realtà si riferiva ai numeri compresi in quale intervallo reale?
- Giustifica l'ovvia conclusione che i numeri reali (proprio tutti gli elementi dell'insieme $\mathbf{R}$) non sono numerabili.

CANTOR, SECONDO HILBERT

A pochi anni dalla morte di Cantor, David Hilbert (1862-1943) pubblica un articolo, del quale riportiamo una parte, in cui illustra alcune implicazioni del nuovo approccio all'infinito introdotto da Cantor. Si può così comprendere come questi abbia fornito un contributo al pensiero matematico la cui importanza va ben oltre i confini della disciplina.



David Hilbert
(1862-1943)

Delineeremo in breve la nuova concezione dell'infinito di Cantor [...] in analisi abbiamo a che fare solo con gli infinitamente piccoli e con gli infinitamente grandi - nel concetto di limite - come qualcosa di nascente, in divenire, in costruzione cioè, come si dice, con gli *infiniti potenziali*. Ma l'infinito non è questo. Lo capiamo quando, ad esempio, consideriamo la totalità dei numeri 1, 2, 3, 4,... come una unità determinata o vediamo i punti di un segmento come una totalità compiuta di oggetti. Questo tipo di infinito viene identificato come *infinito attuale*.

[...]

Cantor descrisse in modo esauriente il concetto di infinito attuale. Prendiamo i due esempi di infinito ricordati poc'anzi:

1. 1, 2, 3, 4, ...;
2. I punti del segmento da 0 a 1 vale a dire la totalità dei numeri reali da 0 e 1.

Considerati dal punto di vista della numerosità forniscono risultati un tempo ritenuti sorprendenti, che però oggi ogni matematico accetta. Consideriamo l'insieme di tutti i numeri razionali, quindi di tutte le frazioni $1/2$, $1/3$, $2/3$, $1/4$, ..., $3/7$, ... e si nota che questo insieme non è più grande dell'insieme dei numeri interi: si è soliti dire che i numeri razionali possono essere numerati o che sono numerabili.

[...]

Con il nostro secondo esempio si verifica una situazione analoga; contro ogni aspettativa, anche l'insieme di tutti i punti di un quadrato o di un cubo, dal punto di vista della numerosità, non è più grande dell'insieme dei punti da 0 a 1 [...]. Ad un primo esame sembra che dal punto di vista della numerosità ci sia un solo tipo di infinito. Invece no, gli insiemi dei nostri esempi 1. e 2. non sono, come si dice, «equipotenti»; inoltre l'insieme 2. non è numerabile ma è più grande dell'insieme 1. Qui sta la peculiarità del cambiamento introdotto da Cantor nell'edificazione del pensiero [Ideenbildungen]. I punti del segmento non possono essere numerati con 1, 2, 3, ...! Se accettiamo l'infinito attuale, non ci limitiamo a questo solito tipo di numerazione [...].

D. Hilbert, Über das Unendliche, *Mathematische Annalen*, 1926, n. 95, pp.167-8-9.

Per interpretare il documento

1. Individua nel testo un esempio di “*infinito potenziale*” e uno di “*infinito attuale*”.
2. Individua nel testo due coppie di insiemi “equipotenti”.
3. “Ad un primo esame sembra che dal punto di vista della numerosità ci sia un solo tipo di infinito. Invece no, gli insiemi dei nostri esempi 1. e 2. non sono, come si dice, «equipotenti»”, afferma Hilbert. Confronta questa citazione con il precedente documento tratto dall'opera di Cantor.

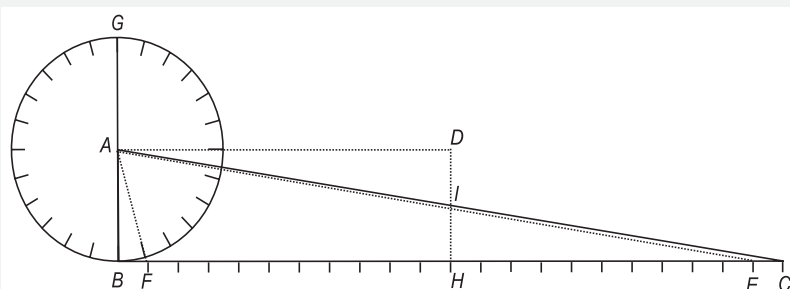
Infinitesimi: radici antiche

Vogliamo qui riprendere l'orientamento degli storici che ritengono che le premesse al calcolo differenziale di Leibniz e Newton siano da ricercare nell'opera di Archimede (metodo di *esustione*) e nei lavori di vari matematici del Cinque-Seicento come Stevin, Kepler, Galileo, Cavalieri, Torricelli...

IL CERCHIO

Johann Kepler (Keplero) (1571-1630) oltre che per i suoi studi di astronomia, è noto per la sua opera di matematico. Si occupò dei solidi di rotazione giungendo, con il proprio metodo, sia a ridimostrare proposizioni note fin dall'antichità che a fornire risultati originali. Ebbe un intenso scambio di lettere con Galileo.

(A) La circonferenza del cerchio BG ha tante parti quanti sono i suoi punti, cioè infiniti; ognuno di essi può essere considerato come la base di un triangolo isoscele di lati AB ,



in modo che nell'area del cerchio c'è un numero infinito di triangoli, tutti col vertice nel centro A . Distendiamo ora la circonferenza del cerchio BG sulla linea BC uguale ad essa e immaginiamo quindi che le basi di questi infiniti triangoli o settori circolari siano poste sulla retta BC una dopo l'altra. Sia BF una di queste basi e sia CE un'altra uguale ad essa e congiungiamo i punti F, E, C con A . Dal momento che ci sono tanti triangoli ABF, AEC sulla linea BC quanti sono i settori nell'area del cerchio, che le basi BF, EC sono uguali e che tutti i triangoli hanno l'altezza BA in comune (che è anche quella dei settori), i triangoli EAC, BAF saranno equivalenti tra loro e equivalenti a uno dei settori del cerchio. Siccome tutti hanno la base su BC , il triangolo BAC , che consiste di tutti quei



triangoli, sarà uguale a tutti i settori del cerchio e quindi uguale all'area del cerchio che consiste di essi. Questo è equivalente alla conclusione [...] di Archimede.

J. Kepler, *Nova stereometria doliorum*, teorema II.

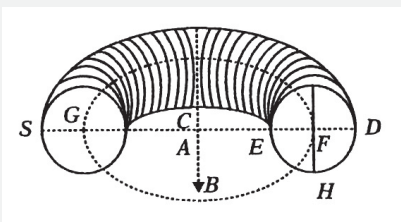
Per interpretare il documento

1. Leggi le affermazioni seguenti:
 - a. un cerchio può essere diviso in infiniti triangoli isosceli;
 - b. trasformiamo il cerchio in un triangolo;
 - c. i triangoli che hanno le basi sulla retta BC (da ABF fino ad AEC) sono equivalenti perché hanno le basi uguali e così pure le altezze.

Cerca le frasi di Kepler che illustrano ciascuna delle affermazioni precedenti.
2. Ricava dal documento una regola per calcolare l'area del cerchio, immaginando di conoscere la lunghezza del raggio (dopo averci pensato, se ti serve puoi arrivare alla risposta anche leggendo la domanda seguente).
3. Se non l'hai fatto al punto precedente, ecco come trovare l'area del cerchio, se il suo raggio è r , seguendo il ragionamento di Kepler:
 - a. esprimi la lunghezza di BC usando il simbolismo letterale e ricordando che la lunghezza della circonferenza si trova moltiplicando per π il doppio del raggio (diametro);
 - b. esprimi l'area del triangolo ABC ;
 - c. l'area del cerchio è uguale a quella del triangolo...

IL TORO

(B) Ogni anello con una sezione circolare o ellittica è uguale a un cilindro la cui altezza è uguale alla lunghezza della circonferenza descritta dal centro della figura ruotante e la cui base è uguale alla sezione dell'anello. Intendo con sezione quella che forma un piano passante per il centro dello spazio anulare e perpendicolare alla superficie dell'anello. La dimostrazione di questo teorema [...] può essere ottenuta con gli stessi elementi con i quali Archimede stabilì i principi della stereometria.



Infatti, se tagliamo l'intero anello GCD dal suo centro A in un numero infinito di dischi ED sottilissimi, ognuno di essi sarà tanto più sottile verso il centro A quanto la sua parte E è vicina più ad A di quanto non lo sia F e la retta per F perpendicolare ad ED nel piano secante, e sarà



tanto più spesso verso l'esterno D ; invero nei detti estremi, cioè D e E , considerati insieme, assume il doppio dello spessore, che ha nel mezzo dei dischi.

Questo ragionamento non sarebbe valido se le parti dei dischi ED al di qua e al di là della circonferenza FG e delle rette perpendicolari per F e G non fossero uguali e ugualmente poste.

Johann Kepler, *Nova stereometria doliorum*, teorema XVII.

Per interpretare il documento

1. Dice Kepler che ogni “anello” (modernamente lo chiamiamo “toro”) è uguale (sarebbe meglio dire “equivalente”) ad un cilindro... Descrivi questo cilindro utilizzando la spiegazione di Kepler.
2. Descrivi come vengono ottenuti i “dischi sottilissimi” che formano il toro.
3. Quali caratteristiche dei “dischi” vengono messe in evidenza da Kepler?
4. Un toro nel quale i “dischi” avessero la forma che vedi nella figura seguente sarebbe equivalente al cilindro ottenuto come nella descrizione di Kepler? Rispondi con riferimento all'osservazione contenuta nelle ultime righe del documento.



GLI INDIVISIBILI

Bonaventura Cavalieri (1598-1647), ecclesiastico milanese, fu allievo di Galileo. Fra l'altro, introdusse per primo i logaritmi in Italia. Nel 1635 venne pubblicata la sua *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* nella quale è spiegato il metodo degli indivisibili che l'autore racconta di aver ricavato dallo studio sia dei classici che di alcuni matematici a lui contemporanei, come Kepler.



Bonaventura Cavalieri
(1598-1647)

Meditando dunque un giorno sulla generazione dei solidi, che sono generati da una rivoluzione intorno a un asse, e confrontando il rapporto delle figure piane generatrici con quello dei solidi generati, mi stupivo in verità moltissimo del fatto che le figure generate tralignassero a tal punto dalla condizione dei propri genitori, da mostrar di seguire un rapporto completamente diverso dal loro. Per esempio un cilindro, che sia ottenuto insieme ad un cono, della stessa base, per rotazione attorno a un medesimo asse, è il



triplo di esso, mentre tuttavia nasce per rivoluzione da un parallelogramma doppio del triangolo che genera il detto cono. [...] Si può trovare la stessa verità anche in figure piane generate dalla rotazione di segmenti rettilinei intorno a un punto, quali sono i cerchi. Si suppongano infatti dati parecchi cerchi concentrici, aventi i raggi proporzionali ai numeri interi successivi a partire dall'unità; i cerchi stessi non confermeranno la medesima proporzione dei raggi, ma staranno tra di loro come i quadrati dei raggi. [...] Ma, dopo avere considerato la cosa un poco più profondamente, pervenni finalmente a questa opinione, e precisamente che per la nostra faccenda dovessero prendersi piani non intersecantisi tra di loro, ma paralleli. In questo modo, infatti, investigati moltissimi casi, in tutti trovai perfetta corrispondenza tanto tra il rapporto dei corpi e quello delle loro sezioni piane, quanto tra il rapporto dei piani e quello delle loro linee [...]. Avendo dunque considerato il cilindro e il cono già detti, secati non più per l'asse, ma parallelamente alla base, trovai che hanno rapporto uguale a quello del cilindro al cono quei [piani] che chiamo nel libro II «tutti i piani» del cono, con riferimento la base comune (e precisamente l'insieme dei cerchi che, all'interno del cono e del cilindro, si possono immaginare in certo qual modo come tracce lasciate dal piano che scorre da una base alla base opposta sempre ad essa parallelamente). Stimai perciò metodo ottimo per investigare la misura delle figure [quello di] indagare prima i rapporti delle linee in luogo di quello dei piani, e i rapporti dei piani in luogo di quello dei solidi, per procurarmi [poi] subito la misura delle figure stesse.

Bonaventura Cavalieri, *Geometria indivisibilibus quadam ratione promota*, prefazione.

Teorema I. Proposizione I

Figure piane quali si vogliano, collocate tra le medesime parallele, nelle quali - condotte linee rette qualunque equidistanti alle parallele in questione - le porzioni intercette di una qualsivoglia di dette rette sono uguali, sono del pari uguali tra di loro. E figure solide quali si vogliano collocate tra i medesimi piani paralleli, nelle quali - condotti piani qualunque equidistanti a quei piani paralleli - le figure piane generate nei solidi stessi da uno qualsivoglia dei piani condotti sono uguali, saranno del pari uguali tra di loro. [...]

Bonaventura Cavalieri, *Geometria indivisibilibus quadam ratione promota*, libro VII.

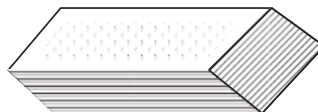
Per interpretare il documento

1. Sintetizza l'osservazione di Cavalieri contenuta nella prefazione, riferita a due solidi di rotazione e riguardante il rapporto fra le figure piane che li generano e quello fra i solidi medesimi.
2. Se a è il rapporto fra i raggi di due cerchi, qual è il rapporto fra le loro aree?
3. L'ultimo documento (tratto dal libro VII) richiama il contenuto della parte conclusiva del documento precedente (tratto dalla prefazione) essenzialmente per quanto riguarda l'idea di utilizzare "piani non intersecantisi tra di loro, ma paralleli" per poi confrontare figure solide... rifletti su questo legame fra le due parti del documento. Riferendosi invece alle figure piane ("piani"), cosa afferma Cavalieri nella prefazione a proposito del "rapporto dei piani e quello delle loro linee"?

4. Un mazzo di carte può essere ‘ben impilato’, così...:



...oppure no, ma il volume si mantiene costante...:



Stabilisci un collegamento fra questo semplice ‘esperimento’ e il contenuto del “**Teorema I. Proposizione I**”.

5. Associa alle figure le parti corrispondenti dell’ultimo documento di Cavalieri (oggi noto anche come *Principio di Cavalieri*).

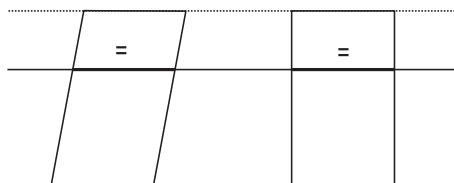


Figura 1

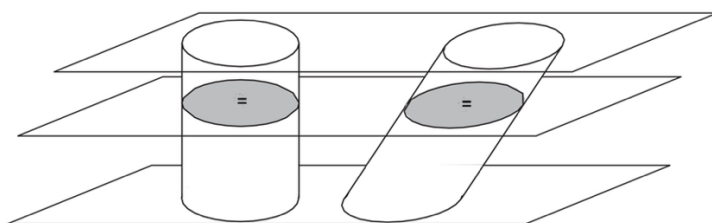
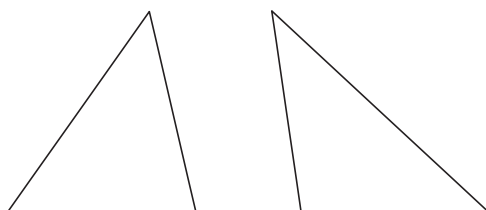
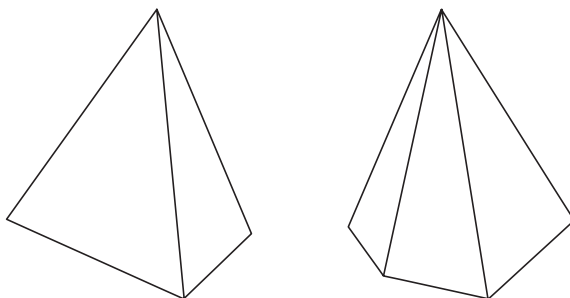


Figura 2

6. Utilizzando l’idea contenuta nel “**Teorema I. Proposizione I**”, spiega perché i due triangoli seguenti (aventi basi uguali ed altezze uguali) sono “uguali” (equivalenti).



7. In base al Principio di Cavalieri, come è possibile spiegare perché piramidi aventi basi equivalenti ed altezze uguali sono equivalenti? Cosa è necessario sapere a proposito delle “figure piane” (sezioni)?



8. In base al Principio di Cavalieri, spiega perché:
- prismi aventi equivalenti le basi ed uguali le altezze sono equivalenti;
 - un cilindro ed un prisma aventi equivalenti le basi ed uguali le altezze sono equivalenti;
 - un cono e una piramide aventi equivalenti le basi ed uguali le altezze sono equivalenti.
9. Aiutandoti con il disegno, mostra esempi di coppie di figure piane equivalenti, alle quali però non si può applicare il Principio di Cavalieri.
10. Ripeti l'esercizio precedente con figure solide.

Limiti, derivate, integrali

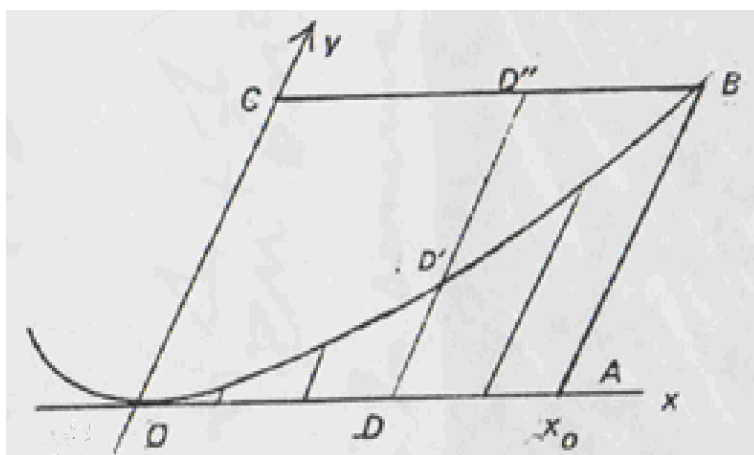
Fra i temi della matematica moderna, quello del calcolo infinitesimale è forse il più fecondo. Straordinaria è la portata delle sue applicazioni in fisica, statistica, tecnologia...

Assieme a Gottfried Wilhelm von Leibniz, Isaac Newton (1642-1727) è considerato il fondatore del calcolo infinitesimale. In effetti i due matematici (chiamiamoli così, ma non dimentichiamo che il loro oggetto di studio è andato ben oltre la matematica) sono stati protagonisti di una vicenda straordinaria: sono arrivati alle stesse conoscenze pur operando l'uno in Germania, l'altro in Inghilterra. Anche per questo viene da dire che ciò che loro hanno scritto 'era nell'aria' e non hanno fatto altro che organizzarlo e renderlo coerente.

LINEE E INTEGRALI

Nel percorso che vogliamo seguire, questa attività può essere considerata un collegamento fra le pagine precedenti e quanto ci diranno i "grandi artefici" Leibniz e Newton nelle pagine successive.

Consideriamo la parabola $y=ax^2$ e vediamo come il matematico e fisico francese Gilles Personnes de Roberval (1602-1675) riuscì a determinare l'area della superficie OAB , in figura, facendo riferimento a un numero finito n di segmenti (la figura riporta il caso in cui $n=5$).

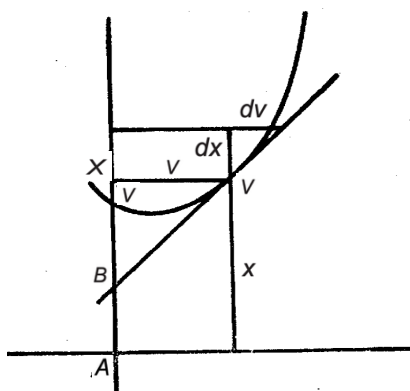


Anzitutto divise l'intervallo $[0, x_0]$ in n parti uguali di lunghezza $h=x_0/n$ e considerò nei punti di divisione le corrispondenti ordinate. L'idea è quella di esprimere l'area della superficie OAB rispetto a quella di $OABC$ ma facendo riferimento a un numero finito di segmenti; usiamo il termine “area” ma in realtà si tratta di segmenti che tenderanno a riempire le superfici attraverso quello che noi chiameremmo “passaggio al limite”: fenomenale questo ragionamento, anche se qualcuno degli studenti più diligenti potrà considerarlo controintuitivo o addirittura ingiustificato!

Per interpretare il documento

1. Esprimi, in funzione di h , le ascisse dei punti di divisione.
2. Scrivi la somma delle ordinate riferite alla parabola, considerate nei punti di divisione.
3. Riferiamoci ora al parallelogramma $OABC$. Esprimi la somma delle lunghezze dei segmenti DD'' e mostra che essa è uguale ad an^3h^2 .
4. Determina il rapporto fra la somma ricavata al precedente punto 2) e quella ricavata al punto 3); considerando che $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = n^3/3 + n^2/2 + n/6$, mostra che esso è uguale a $1/3 + (1/2n + 1/6n^2)$.
5. Roberval concluse che “per n infinito” l'area della superficie OAB è uguale a $1/3$ dell'area di $OABC$: giustifica questa conclusione.

LEIBNIZ: “DIFFERENTIAE” O INCREMENTI INFINITESIMI

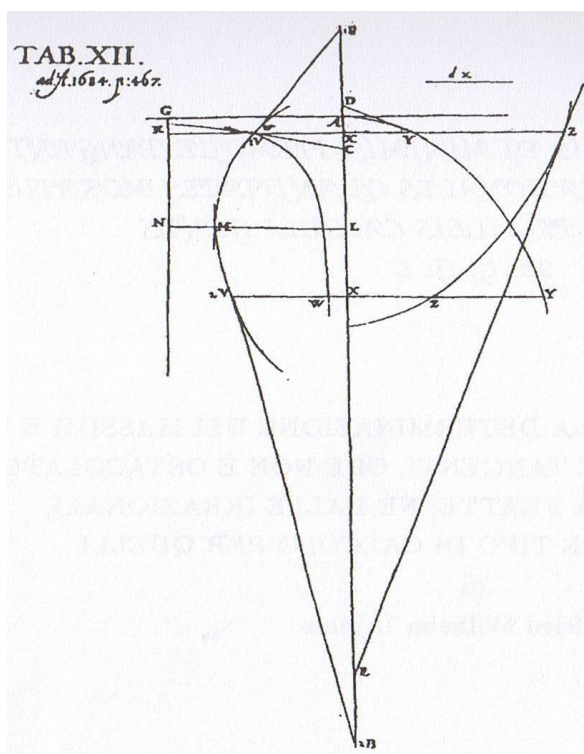


Ora un segmento preso ad arbitrio sia detto dx ed un segmento che sta a dx come v (o w , o y , o z) sta a BX (o CX , o DX , o EX) sia detto dv (o dw , o dy , o dz) ossia differenza delle stesse v (o delle stesse w , o y , o z).

Gottfried Wilhelm Leibniz, *Nova methodus pro maximis et minimis*.

Per interpretare il documento

1. Traduci in proporzione le prime righe della citazione.
2. Analizza la figura e illustra come questa proporzione si giustifica geometricamente.



[...] le regole del calcolo saranno queste.

Sia a una quantità data costante, sarà:

$$da=0 \text{ e } dax=adx$$

[...]

Addizione e sottrazione: se si ha

$$z-y+w+x=v$$

sarà

$$d(z-y+w+x)=dv=dz-dy+dw+dx$$

Moltiplicazione:

$$dxv=x dv+v dx.$$

Leibniz, *Nova methodus pro maximis et minimis*.

Per interpretare il documento

1. Ricava la regola $dax=adx$ utilizzando qualcuna delle altre regole.
2. Applica la regola della moltiplicazione nel caso di x^2 .
3. Considera che uno dei modi di indicare la derivata di una funzione $y=f(x)$ è $\frac{dy}{dx}$.

Rifletti sulla definizione di derivata e, riferendoti anche con un particolare che appare nella figura precedente, esprimi un tuo ragionamento sul significato di questa scrittura simbolica.

NEWTON: GRANDEZZE E MOTI CONTINUI

Considero in questo lavoro le grandezze matematiche non come costituite di parti piccole a piacere ma come generate da un moto continuo.

Le linee vengono descritte non come addizioni di parti, ma per moto continuo di punti; le superfici per moto continuo di linee; i solidi per moto di superfici; gli angoli per rotazione dei loro lati; i tempi per flusso continuo e così in altri casi analoghi.

Queste generazioni hanno veramente luogo in natura, e si osservano ogni giorno nel movimento dei corpi. In questo modo gli antichi indicarono le generazioni del rettangolo come descritto da un segmento mobile perpendicolare ad un segmento fisso.

Considerando dunque che quantità generate, crescendo in tempi uguali, riescono maggiori o minori secondo la velocità maggiore o minore con cui crescono, ho cercato un metodo per determinare le grandezze dalle velocità dei moti o degli incrementi con cui si generano; chiamando *flussioni*¹⁹ queste velocità di accrescimento, e *fluenti*²⁰ le quantità generate, giunsi a poco a poco negli anni 1665 e 1666 al metodo delle flussioni del quale qui faccio uso nella quadratura delle curve²¹.



Isaac Newton
(1642-1727)

¹⁹ Derivate.

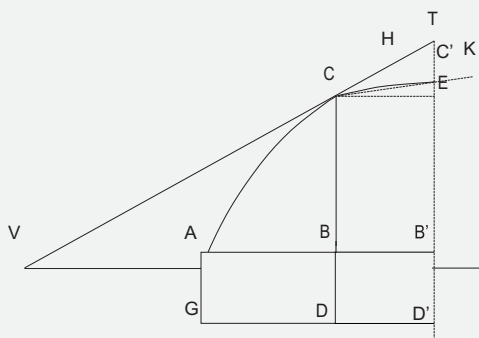
²⁰ Funzioni.

²¹ Con “quadratura”, modernamente si intende la ricerca dell’area compresa fra una curva e una retta.

Le flussioni si possono considerare con approssimazione arbitrariamente grande come gli incrementi delle fluenti, generati durante intervalli uguali di tempo piccoli a piacere; in modo più preciso sono direttamente proporzionali agli incrementi istantanei delle fluenti, e si possono poi rappresentare mediante linee qualsiasi ad esse proporzionali.

Così, per esempio, l'area del triangolo mistilineo ABC e l'area del rettangolo ABDG, siano generate dal moto uniforme delle ordinate BC e BD che avanzano sulla base AB; allora le flussioni di queste aree staranno fra loro come le ordinate BC e BD che le generano; perché quelle ordinate stanno fra loro come gli incrementi istantanei delle aree.

Avanzi l'ordinata BC dalla sua posizione ad un'altra qualsiasi B'C'.



Si completi il parallelogramma BCEB' e si conduca la retta VT tangente alla curva in C, che incontri i prolungamenti di B'C' e BA rispettivamente nei punti T e V. E gli incrementi ora ottenuti dell'ascissa AB, dell'ordinata BC e della curva ACC' saranno rispettivamente BB', EC', e l'arco CC'. E direttamente proporzionali a questi incrementi istantanei sono i lati del triangolo CET; e perciò le flussioni delle stesse AB, BC e AC sono rispettivamente proporzionali ai lati di quel triangolo CET: CE, ET, TC, e si possono rappresentare mediante quegli stessi lati, o ciò che fa lo stesso mediante i lati del triangolo simile al primo VBC.

Si ricade negli stessi risultati se si trovano le flussioni applicando il metodo delle ultime ragioni²² di grandezze evanescenti²³. Si conduca la retta CC' e la si prolunghi sino a un punto K . Ritorni l'ordinata $B'C'$ nella sua posizione primitiva BC e venendo a coincidere i punti C e C' , la retta CK coinciderà con la tangente CH , e il triangolo evanescente CEC' nell'ultima sua forma diventerà simile al triangolo CET , ed i suoi lati evanescenti CE , $C'E$, $C'C$, saranno infine proporzionali ai lati dell'altro triangolo CET : CE , ET , TC , e perciò saranno proporzionali a tali segmenti anche le flussioni delle linee AB , BC , CA . Se i punti C e C' distano di un intervallo comunque piccolo, la retta CK divergerà di un piccolo angolo dalla tangente CH . Perché la retta CK coincida con la tangente CH e si trovino le ragioni ultime delle linee CE , EC' , $C'C$, devono sovrapporsi e coincidere i punti C e C' . Gli errori, anche minimi, in matematica non sono da trascurarsi.

Isaac Newton, *Tractatus de quadratura curvarum*, Introduzione, 1704.

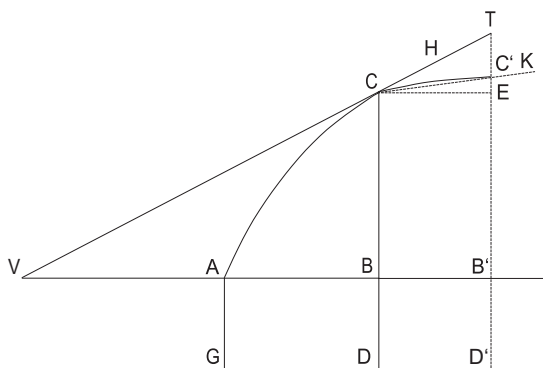
Per interpretare il documento

1. Fai un confronto fra i ragionamenti che trovi nei documenti di Newton, di Cavalieri e di Roberval, mettendo in evidenza anzitutto le analogie e poi le differenze che più ti colpiscono.

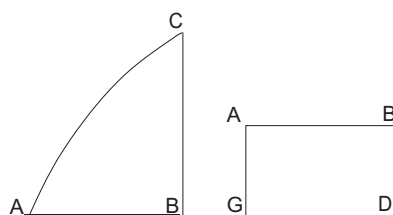
²² “Ragione” sta per “rapporto o quoziente”.

²³ “Ultime ragioni di grandezze evanescenti”, cioè “limiti di rapporti di funzioni che tendono a zero”.

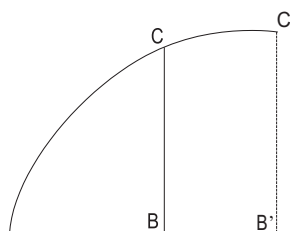
2. Vediamo qui di seguito come Newton utilizza la figura presente nel testo e riprodotta qui:



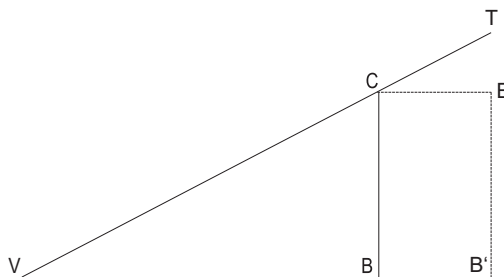
“l’area del triangolo mistilineo ABC e l’area del rettangolo ABDG, siano generate dal moto uniforme delle ordinate BC e BD che avanzano sulla base AB.”



“Avanzi l’ordinata BC dalla sua posizione ad un’altra qualsiasi B’C’ ”.



“Si completi il parallelogramma BCEB’ e si conduca la retta VT tangente alla curva in C [...]”.

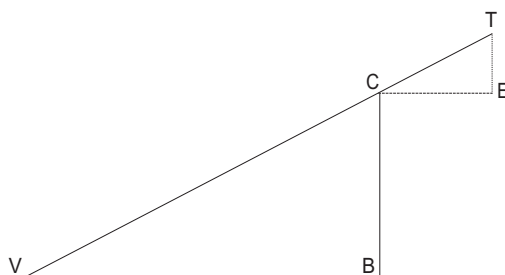


“gli incrementi ora ottenuti dell’ascissa AB, dell’ordinata BC e della curva ACC’ saranno rispettivamente BB’, EC’, e l’arco CC’ [...]”

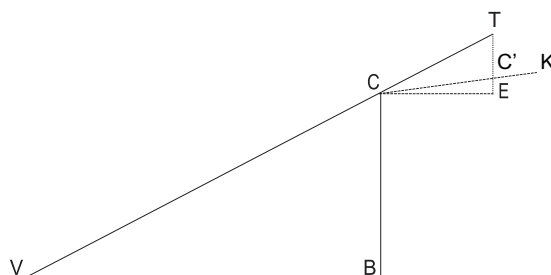
B _____ B’

C _____ C’
E

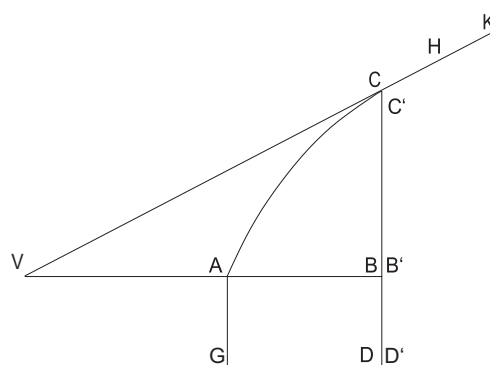
“E direttamente proporzionali a questi incrementi istantanei sono i lati del triangolo CET; e perciò le flussioni delle stesse AB, BC e AC sono rispettivamente proporzionali ai lati di quel triangolo CET: CE, ET, TC, e si possono rappresentare mediante quegli stessi lati, o ciò che fa lo stesso mediante i lati del triangolo simile al primo VBC”.



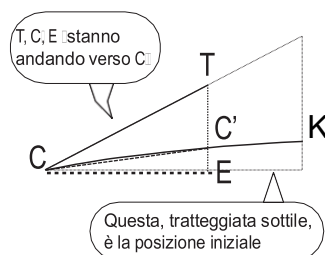
“Si conduca la retta CC’ e la si prolunghi sino a un punto K”.



“Ritorni l’ordinata B’C’ nella sua posizione primitiva BC e venendo a coincidere i punti C e C’, la retta CK coinciderà con la tangente CH [...]”

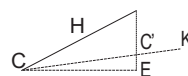


“e il triangolo evanescente CEC’ nell’ultima sua forma diventerà simile al triangolo CET, ed i suoi lati evanescenti CE, EC’, C’C, saranno infine proporzionali ai lati dell’altro triangolo CET: CE, ET, TC”.



“e perciò saranno proporzionali a tali segmenti anche le flussioni delle linee AB, BC, CA”²⁴.

“Se i punti C e C’ distano di un intervallo comunque piccolo, la retta CK divergerà di un piccolo angolo dalla tangente CH. Perché la retta CK coincida con la tangente CH e si trovino le ragioni ultime delle linee CE, EC’, C’C, devono sovrapporsi e coincidere i punti C e C’ ”.



3. Integrale - derivata: ricerca sul libro di testo la formulazione moderna di questo legame.
4. Rivedi il brano ed in esso evidenzia i passi nei quali Newton affronta i seguenti temi:
 - a. derivata dell’area sottesa al grafico della funzione e funzione stessa;
 - b. derivata in un punto e pendenza del grafico;
 - c. “ultime ragioni di grandezze evanescenti” e metodo delle “flussioni”.

Si obietta che non esiste l’ultimo rapporto di quantità evanescenti²⁵, in quanto esso, prima che le quantità siano svanite, non è l’ultimo e allorché sono svanite non c’è affatto. Ma con lo stesso ragionamento si può giustamente sostenere che non esiste la velocità ultima di un corpo che giunga in un certo luogo, dove il moto finisce. La velocità, infatti, prima che un corpo giunga nel luogo non è l’ultima, e quando vi giunge non c’è. La risposta è facile: per velocità ultima si intende quella con la quale il corpo si muove, non prima di giungere al luogo ultimo nel quale il moto cessa, né dopo, ma proprio nel momento in cui vi giunge; ossia quella stessa velocità con la quale il corpo giunge al luogo ultimo e con la quale il moto cessa. Similmente, per ultime ragioni delle quantità evanescenti si deve intendere il rapporto delle quantità non prima di diventare nulle e non dopo, ma quello col quale si annullano.

²⁴ Newton ripete quanto scritto sopra e illustrato nella quartultima delle figure precedenti.

²⁵ Vedi nota precedente: “ultime ragioni di quantità evanescenti” equivale a “limiti di rapporti di funzioni che tendono a zero”.

[...]

Le ultime ragioni con cui quelle quantità si annullano non sono in realtà le ragioni delle ultime quantità, ma i limiti ai quali le ragioni delle quantità decrescenti si avvicinano sempre, illimitatamente, e ai quali si possono avvicinare per più di qualunque differenza data, e che, però, non possono mai superare, né toccare prima che le quantità siano diminuite all'infinito. [...] Nel seguito, dunque, allorché per essere capito facilmente, menzionerò le quantità minime o evanescenti o ultime, non bisognerà supporre che si tratti di quantità di determinata grandezza, ma bisognerà pensare sempre a quantità che diminuiscono illimitatamente.

Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, libro I, sezione I.

Per interpretare il documento

1. Riper corri quest'ultimo documento di Newton ricercando il significato delle seguenti espressioni (parole chiave): “quantità decrescenti”, “ultimo rapporto”, “velocità”, “luogo ultimo”, “limiti”.
2. Esamina il seguente esempio di rapporto di funzioni che tendono a zero, soffermati sulla tabella di dati ed esamina:
 - a. le “quantità decrescenti”;
 - b. il limite della “ragione [o rapporto]”;
 - c. i valori delle “quantità decrescenti” quando la “differenza” fra il limite e la “ragione” è minore di 10^{-3} .

x	Log x	x-1	Log x / (x-1)	
1,5	0,17609126	0,5	0,352182518	1
1,25	0,09691001	0,25	0,387640052	2
1,125	0,05115252	0,125	0,40922018	3
1,0625	0,02632894	0,0625	0,42126302	4
1,03125	0,01336396	0,03125	0,42764677	5
1,015625	0,00673338	0,015625	0,43093649	6
1,0078125	0,00337974	0,0078125	0,432606803	7
1,00390625	0,00169316	0,00390625	0,433448453	8
1,001953125	0,0008474	0,00195313	0,433870918	9
1,000976563	0,00042391	0,00097656	0,434082562	10
1,000488281	0,00021201	0,00048828	0,434188487	11
1,000244141	0,00010602	0,00024414	0,434241476	12
1,00012207	5,3011E-05	0,00012207	0,434267977	13
1,000061035	2,6506E-05	6,1035E-05	0,434281229	14
1,000030518	1,3253E-05	3,0518E-05	0,434287855	15
1,000015259	6,6268E-06	1,5259E-05	0,434291169	16
1,000007629	3,3134E-06	7,6294E-06	0,434292825	17
1,000003815	1,6567E-06	3,8147E-06	0,434293654	18
1,000001907	8,2835E-07	1,9073E-06	0,434294068	19
1,000000954	4,1418E-07	9,5367E-07	0,434294275	20
1,000000477	2,0709E-07	4,7684E-07	0,434294378	21
1,000000238	1,0354E-07	2,3842E-07	0,43429443	22
1,000000119	5,1772E-08	1,1921E-07	0,434294456	23
1,00000006	2,5886E-08	5,9605E-08	0,434294469	24
1,00000003	1,2943E-08	2,9802E-08	0,434294475	25
1,000000015	6,4715E-09	1,4901E-08	0,434294479	26
1,000000007	3,2357E-09	7,4506E-09	0,43429448	27

3. Nel primo documento (ricavato dal *Tractatus*) Newton scrive: “Le flussioni si possono rappresentare con approssimazione arbitrariamente grande come gli incrementi delle fluenti, generati durante intervalli uguali di tempo piccoli a piacere”. Recupera dal tuo libro di testo la definizione di derivata come limite del rapporto di certe grandezze e stabilisci un confronto con quanto Newton dice nella citazione testé riproposta e nell’ultimo documento.

UN LIMITE NOTEVOLE

Per mostrare “che $\frac{(x+1)^m}{x^m}$ ha l'unità come suo limite quando x viene

aumentato senza limite”, il matematico inglese Augustus De Morgan (1806-1871) nella sua opera introduttiva al calcolo differenziale e integrale utilizza l'uguaglianza:

$$\frac{(x+1)^m}{x^m} = 1 + \frac{mx^{m-1} + \text{etc.}}{x^m}$$

Per interpretare il documento

1. Giustifica l'uguaglianza.
2. Giustifica, inoltre, la seguente affermazione di De Morgan: “Il numeratore di quest'ultima frazione diminuisce indefinitamente se comparato con il suo denominatore” (mostrando, con ciò, che il valore del limite citato all'inizio di questo esercizio è proprio 1).

Non ci fermiamo qui... e la storia continua...

Pochi matematici hanno lasciato il segno nella storia come Pierre de Fermat.

Fermat lesse l'*Aritmetica* di Diofanto (che contiene l'intera conoscenza sui numeri delle scuole di Pitagora e di Euclide). Il problema 8 dell'*Aritmetica* dice: "Dividere un quadrato in due quadrati". Diofanto fornisce l'esempio:

$$\left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{256}{25} + \frac{144}{25} = \frac{400}{25} = 16$$

dunque è possibile dividere il numero quadrato 16 in altri due quadrati razionali. In margine a questo problema, Fermat scrisse una nota...

Cubem autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere.

Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi, hanc marginis exiguitas non caperet.

È impossibile dividere un cubo in due cubi, o una quarta potenza in due quarte potenze o, in generale, nessun numero che sia potenza di grado superiore al secondo in due altre potenze dello stesso grado.

Dispongo di una dimostrazione veramente mirabile che non può essere contenuta nel margine troppo stretto della pagina.

La "mirabile dimostrazione" di Fermat non è mai stata ritrovata...

Fermat scrisse molte affermazioni senza dimostrazione a margine dell'*Aritmetica*, e con il passare del tempo tutte vennero dimostrate, tranne quella sopra riportata che fu denominata *Ultimo teorema di Fermat*.

Moltissimi matematici si sono cimentati nella dimostrazione di questo teorema, per secoli, riuscendo al massimo a dimostrarne solo alcuni casi particolari. Si distinsero:

- Eulero, che dimostrò il caso per $n=3$ e $n=4$ e scoprì che bastava dimostrare il teorema per n numero primo;
- Sophie Germain (1776-1831), che fornì un metodo per dimostrare il teorema per ogni numero primo p tale che $2p+1$ sia ancora un primo (metodo che usarono contemporaneamente e in autonomia anche Dirichlet e Legendre per dimostrare il caso $p=5$, e Lamè per il caso $p=7$).

Nel 1994 Andrew Wiles fornì la dimostrazione (130 pagine!) riunendo molte scoperte sulla teoria dei numeri del 20° secolo.

Così ora possiamo affermare con certezza che $x^n + y^n = z^n$ per $n > 2$ non ha soluzioni intere (che non siano banali).

Scorrendo le tavole dei numeri primi, si nota che ci sono varie coppie di *primi gemelli*, cioè che differiscono di 2: ad esempio 3 e 5, 5 e 7, 9 e 11...

I primi gemelli sono infiniti? A questa domanda la ricerca non ha ancora dato una risposta.

Nel 1742 il matematico Christian Goldbach descrisse in una lettera a Eulero la sua celebre congettura: “Ogni numero pari maggiore di 2 è la somma di due numeri primi”. In effetti: $4=2+2$, $6=3+3$, $8=5+3$...

A distanza di oltre due secoli e mezzo ci si chiede ancora se la congettura di Goldbach sia vera in generale oppure no.

Esistono dei numeri naturali molto speciali, come il 6: prendiamo i suoi divisori, vale a dire 1, 2, 3 e 6. Scartiamo quest'ultimo e facciamo la somma degli altri: $1+2+3$ è proprio uguale a 6. In effetti i numeri di questo tipo sono ‘molto rari’: il successivo è 28, poi bisogna arrivare a 496 e poi a 8128 (noti già ai Greci). Oggi se ne conoscono alcune decine.

Un numero che, come i precedenti, si può ottenere come somma di tutti i suoi divisori, tranne ovviamente il numero stesso, viene chiamato *perfetto*.

Ma esistono numeri perfetti dispari? Questo è ancora un problema aperto...

La storia della matematica ha... un grande futuro davanti a sé.

