

FARE MATEMATICA CON I DOCUMENTI STORICI

Percorsi didattici per la scuola primaria
e secondaria di primo e secondo grado

a cura di Adriano Demattè
presentazione di Fulvia Furinghetti

VOLUME PER L'INSEGNANTE

FARE MATEMATICA CON I DOCUMENTI STORICI

Percorsi didattici per la scuola primaria
e secondaria di primo e secondo grado

a cura di Adriano Demattè
presentazione di Fulvia Furinghetti

VOLUME PER L'INSEGNANTE

IPRASE

**Istituto provinciale per la ricerca
e la sperimentazione educativa**

via Tartarotti 15 – 38068 Rovereto (TN) - C.F. 96023310228

tel. 0461 494500 – fax 0461 499266

iprase@iprase.tn.it - iprase@pec.provincia.tn.it - www.iprase.tn.it

Comitato tecnico-scientifico

Angelo Paletta (Presidente)

Gabriella Agrusti

Matteo Lancini

Roberto Ricci

Alessandro Rosina

Francesca Mussino

Giuseppe Rizza

Direttore

Luciano Covi

© Editore Provincia autonoma di Trento – IPRASE

Tutti i diritti riservati

Prima pubblicazione: giugno 2006

Seconda pubblicazione riveduta e integrata: ottobre 2025

Stampa: Centro Duplicazioni della Provincia Autonoma di Trento

ISBN 978-88-7702-554-8

Il volume è disponibile all'indirizzo www.iprase.tn.it
alla voce risorse> pubblicazioni>volumi scientifici

Hanno contribuito alla realizzazione del volume:

Daniela Bresciani, Maria Vittoria Cicinelli, Adriano De-
mattè, Paola Depedri, Luca Giovannini, Maria Paola Villi

Si ringrazia Mirko Maracci per i suggerimenti e le osservazioni

In copertina: personaggio che conta sull'abaco,
particolare da un bassorilievo romano del primo secolo d.C.
(Roma, Musei Capitolini)

IPRASE per l'ambiente



Questo prodotto è composto da materiale che proviene da foreste ben gestite certificate FSC®, da materiali riciclati e da altre fonti controllate.

INDICE

Presentazione	7
<i>Fulvia Furinghetti</i>	
Ritorno alle radici	7
Esempi di utilizzo del materiale	12
Che cosa il libro può dare ai lettori/utilizzatori	14
Che cosa i lettori/utilizzatori possono dare in cambio	15
Introduzione	19
Motivazioni didattiche	20
Scelta dei documenti	21
Il volume per gli studenti: precisazioni didattiche	22
Il volume per gli insegnanti	22
Parte prima PER LA SCUOLA PRIMARIA	
Una proposta da <i>LARTE DE LABBACHO</i>	
Introduzione	24
Una selezione di brani per la scuola primaria	25
Concetti e termini presentati nel testo	25
Laboratori per la scuola primaria da <i>Larte de Labbacho</i>	37
Proposte per i laboratori	38
Parte seconda PER LA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO E SECONDO GRADO	
Il volume per gli alunni <i>FARE MATEMATICA CON I DOCUMENTI STORICI</i>	
CAPITOLO 1 - DALL'ARITMETICA ALL'ALGEBRA	
Sistemi di numerazione	47
Egizi	47
Babilonesi	48
Greci	48
Romani	48
Maya	49
Finalmente gli Indiani!	49
Chi ha inventato il sistema binario?	50
Operazioni con i numeri naturali	51
Fra Medioevo e Rinascimento	51
Non solo numeri naturali	52
Frazioni in Egitto: l'occhio del dio Horus	53
Come indicavano le frazioni in Egitto	53

I numeri decimali e gli Arabi	53
I numeri decimali in Europa	54
Il triangolo aritmetico	54
Cinesi, arabi, europei...	54
Problemi curiosi	55
Risolviamo assieme	55
Altri problemi: il testo	57
Altri problemi: le soluzioni	57
Numeri “falsi”	58
Nell'Italia del 500	58
Una donna alle prese con la matematica	58
Dalle parole ai simboli	59
Un grande matematico arabo	59
Diofanto, uno che ha lasciato il segno	60
Tutte equazioni	60
Una “ricetta” per risolvere un'equazione	60
La scienza del calcolo letterale	60
Filosofo, fisico e... matematico	61
Problemi ed equazioni	62
Problemi di primo e secondo grado	62
Bombelli e il numero i	63
Sarà un numero?	63
Logaritmi	65
Un'idea antica	66
Una risposta autorevole!	67
E inoltre... evoluzione dei simboli (per l'aritmetica e l'algebra)	68

CAPITOLO 2 - I VOLTI DELLA GEOMETRIA

Aritmo-geometria: i numeri figurati	69
Numeri poligonali	69
Terne pitagoriche	71
Modi ingegnosi per ricavare terne pitagoriche	75
Teorema di Pitagora	76
A spasso per la storia: i lati e i quadrati...	76
... un problema nel Rinascimento...	76
... problemi ed equazioni	76
Punti lontani	78
Di torri ed altri edifici	78
Come scavare un tunnel e non sbucare nel punto sbagliato	79
$\sqrt{2}$	80
Come avranno fatto?	81
π	81
Quale sarà il valore vero?	82

Archimede	83
Una raffica di proposizioni	83
L'area del cerchio e il metodo di <i>esaustione</i>	83
Coordinate... cartesiane?	84
Nel 1300	84
Uno dei padri	84
La geometria, di Euclide e non	85
Un'introduzione, autorevole ma...	85
Gli <i>Elementi</i> : quasi una Bibbia	85
Due millenni dopo	86
Trigonometria	86
Da un manuale del 500	87
Cos'è la topologia	87
Una nuova geometria	88
Il problema dei ponti di Königsberg	88
Il ragionamento di Eulero	88
In più... numeri solidi	89

CAPITOLO 3 - TEMI DI MATEMATICA MODERNA

La logica: scienza antica ma attuale	90
Cosa sono i connettivi logici	90
L'arte di... ragionare	90
La matematica si impadronisce della logica	91
La logica per costruire i numeri	92
Gottlob Frege e Bertrand Russell	92
Misuriamo la casualità	93
Galileo e un problema sul lancio di tre dadi	94
Scambi epistolari	95
La concezione classica della probabilità	95
Altre concezioni di probabilità	96
Infinito	97
Corridori, frecce, lepri, tartarughe,...	97
Quando il tutto non è maggiore della parte	98
L'infinito, fonte di altri paradossi	98
Sistemiamo le conoscenze	98
Il paradiso di Cantor	100
I numeri reali sono di più dei naturali	100
Cantor, secondo Hilbert	100
Infinitesimi: radici antiche	101
Il cerchio	101
Il toro	101

Gli indivisibili	101
Limiti, derivate, integrali	103
Linee e integrali	103
Leibniz: “differentiae” o incrementi infinitesimi	103
Newton: grandezze e moti continui	104
Un limite notevole	105
Non ci fermiamo qui... e la storia continua...	106
Bibliografia ragionata	107

Presentazione

Fulvia Furinghetti, Università di Genova

RITORNO ALLE RADICI

Il desiderio di trovare modi più efficaci di insegnare matematica ha portato a considerare ambienti “speciali” in cui fare matematica. Un esempio di ambiente speciale può essere un software di geometria dinamica. La discussione in classe, l’esplorazione, il lavoro collaborativo sono altri ambienti speciali che possono cambiare l’ecologia della classe. L’ambiente speciale proposto in questo libro è la storia della matematica.

Perché la storia della matematica? Molte volte mi è stato chiesto di rispondere a questa domanda. Mi fa piacere pensare che, qualche volta almeno, la mia risposta sia stata convincente ed abbia stimolato un nuovo percorso didattico o anche soltanto un nuovo modo di guardare la matematica. È la prima volta, però, che rispondo avendo in mano la prova concreta che davvero la mia fiducia nell’artefatto storia come strumento per insegnare e imparare la matematica può essere condivisa. La prova concreta di cui parlo sono le pagine del libro che sto presentando. Si tratta di un’antologia di brani di storia della matematica di diverse epoche (dai Babilonesi in avanti) corredati da opportune attività didattiche e didascalie esplicative. Nasce dal lavoro appassionato degli insegnanti di matematica Daniela Bresciani, Maria Vittoria Cicinelli, Paola Depedri, Luca Giovannini, Maria Paola Villi, coordinati da Adriano Demattè, e si basa su alcune loro convinzioni di fondo che condivido e che cerco di esplicitare e discutere nel seguito. Queste convinzioni riguardano il rapporto tra la storia della matematica e la didattica della matematica.

Il problema è molto antico. Nell’introduzione del suo libro *Éléments* Alexis-Claude Clairaut scrive (1771, pp. 2-7):

Prevenuto da questa idea, mi son io proposto di trovare quel che può aver dato origine alla Geometria; ed ho procurato di spiegarne i principj col metodo più naturale, siccome quello, che supponevo essere stato de’ primi inventori; [...]. La misura de’ terreni mi è paruta la più propria ad aver dovuto far nascere le prime proposizioni della Geometria; [...]. Comunque sia, mi è sembrato molto più a proposito di occupare continuamente i miei lettori a risolvere problemi; [...].

La prima edizione di questo trattato era apparsa nel 1741 a Parigi. Già allora si pensava alla storia come a un espediente didattico. Nell’Ottocento questo orientamento si delineò ancor più chiaramente. Da una parte, nella ricerca matematica il

motto di Abel «Impara dai maestri!» esprimeva efficacemente l'esigenza di scavalcare le degenerazioni accademiche degli epigoni di una teoria per andare direttamente ai padri delle idee portanti di questa teoria. Dall'altra, i sistemi di istruzione nazionale stavano formandosi nelle nazioni ormai costituite in senso moderno. I problemi di istruzione erano affrontati da punti di vista (sociale, psicologico, filosofico, pedagogico) che facevano emergere i problemi dell'insegnamento matematico, sia nella formazione degli insegnanti che nella pratica in classe.

All'inizio di uno dei primi trattati moderni di storia della matematica, (Cajori, 1896, p. V), troviamo questo passo:

«L'educazione del bambino deve avvenire in accordo con l'educazione dell'umanità come avvenuta storicamente; o, in altre parole, la genesi della conoscenza nell'individuo deve seguire lo stesso corso della genesi della conoscenza nella razza. Pensiamo che la società debba l'enunciazione di questa dottrina a Comte - una dottrina che possiamo accettare senza sottoscrivere la sua teoria sulla genesi della conoscenza, sia nelle cause che nell'ordine». [Questa è una citazione presa dal filosofo britannico Herbert Spencer]. *Se questo principio, sostenuto anche da Pestalozzi e Froebel, è giusto, allora sembrerebbe che la conoscenza della storia di una scienza debba essere un efficace rimedio nell'insegnare questa scienza. Sia che questa teoria sia vera, sia che sia falsa, certamente l'esperienza di molti docenti conferma l'importanza della storia della matematica nell'insegnamento.*

Questo passo contiene affermazioni che attualmente sono discusse («la genesi della conoscenza nell'individuo deve seguire lo stesso corso della genesi della conoscenza nella razza») poiché mettono in ombra l'importanza del contesto nella costruzione della conoscenza, ma il suo nucleo è tuttora da molti condiviso («l'importanza della storia della matematica nell'insegnamento»). Vediamo su che cosa si fonda questa affermazione.

In primo luogo, prendo dal capitolo 9 del libro (Fauvel and van Maanen, 2000) *History in mathematics education: the ICMI Study* (p. 292) la descrizione di tre funzioni che alcuni ricercatori in storia e didattica hanno attribuito alla storia, *spaesamento*, *riposizionamento* e *immersione culturale*. Integrare la storia della matematica sostituisce l'usuale con qualcosa di diverso e rende ciò che è familiare ignoto (*spaesamento*). Questo porta a guardare il paesaggio in cui ci troviamo (la matematica) in un modo nuovo, a studiarlo per ambientarci e a coglierne aspetti che prima ci sfuggivano (*riposizionamento*). Inoltre, la storia sposta l'attenzione dal prodotto di un certo processo storico che ha portato a quel prodotto al processo stesso. Ciò ci spinge a vedere la matematica nel contesto tecnologico, scientifico, sociale di un certo periodo (*immersione culturale*). Un caso in cui tutto questo si può verificare è quello della risoluzione di problemi tratti da antichi manuali: si veda, ad esempio, (Demattè and Furinghetti, 2022).

L'aspetto dell'immersione culturale riguarda la visione globale della matematica vista come un'impresa culturale dell'uomo e si collega al problema di rendere "umanistica" la matematica. Metto la parola umanistica tra virgolette per lasciare al lettore la possibilità di dare ad essa il proprio personale significato. Non voglio entrare nella diatriba tra le due culture (umanistica e non), anche perché penso che l'aggettivo *umanistico* non abbia un contrario quando si parla di cultura. Ogni avventura che gli uomini hanno condiviso nella storia (artistica, letteraria, tecnologica, ...) è parte della cultura umanistica e la matematica è tra queste avventure.

Come gli studenti partecipano a questa avventura? Per molti la risposta è quella che vale anche per le altre condivisioni di avventure che si propongono a scuola: con indifferenza, se non fastidio. Per altri i sentimenti suscitati sono di timore, apprensione, rifiuto. Prima che il lettore, che si presume insegnante di matematica, preso da sconforto e da dubbi sull'utilità della sua azione didattica cessi la lettura, osserviamo che ci sono anche studenti che associano alla matematica sentimenti di piacere. Il piacere può semplicemente derivare da un fattore affettivo (legato alla persona): le prestazioni matematiche danno accesso alla verifica del successo più facilmente delle prestazioni in altre discipline (quando un tema di italiano è - prescindendo da ogni dubbio e da un arbitrio di giudizio - un bel tema?). Ma altri sono sensibili a un certo aspetto estetico della matematica (l'armonia, la pulizia del ragionamento, ...): il loro piacere viene non solo dalla conferma delle loro capacità, ma anche dal loro rapporto con la matematica.

Tornando al nostro libro mi sembra che esso possa effettivamente contribuire all'immersione culturale per mezzo dell'impatto immediato, quasi brutale, che esso offre con il passato, mettendo lo studente davanti al linguaggio e allo stile delle fonti originali, seppure opportunamente scelte, seppure accompagnate da didascalie. Per uno studente l'esperienza di leggere un originale di matematica è nuova e può veramente costituire un'immersione culturale in altri modi di pensare e di comunicare. Fa parte dell'immersione culturale anche il contatto fisico col documento antico. Pochi eletti possono prendere in mano un'opera originale del passato, ma i siti della rete permettono un contatto visivo seppur virtuale. Questa consultazione "senza polvere" di opere antiche permette di vedere la bellezza delle scritture, delle impaginazioni e delle figure decorative (si veda quella riportata al termine di questa presentazione) e anche di studiare come le figure matematiche mutino la loro funzione nel tempo.

Quello che, in teoria, potrebbe essere un ostacolo (la comprensione del testo) diventa non solo uno strumento per riflettere sull'evoluzione della lingua, ma uno strumento per interpretare il problema. È noto che la lettura dell'enunciato è il punto cruciale nel processo risolutivo. Acutamente Radford (1996) ha messo in luce la differenza tra il capire un enunciato "testualmente" e capirlo "logicamente". Entrano in gioco molti fattori, incluso, come ricorda Burton (1988), la difficoltà di leggere nella sua interezza una frase ritenendo tutte le informazioni in essa contenute. La lettura

di un linguaggio insolito diretta la riflessione sul significato, e la difficoltà linguistica è ripagata dall'arricchimento nella comprensione matematica.

Dunque, la storia della matematica, come usata in questo libro, è una porta (forse solo uno spiraglio) per entrare nelle civiltà del passato e vederne alcuni aspetti: la lingua, gli interessi culturali, certi elementi della quotidianità. Di conseguenza, emergono spunti che possono favorire un lavoro comune con gli insegnanti delle altre materie. Anzi fare la storia della matematica con questo uso delle fonti fa intravedere aspetti che nella storia in generale non sono messi in evidenza, quali il carattere ipotetico della conoscenza storica, il valore dell'interpretazione e della produzione di congetture e, in ultima istanza, le difficoltà del mestiere di storico.

Siamo consapevoli che anche attraverso fonti mediate si possono sfruttare certe potenzialità della storia per l'immersione culturale e per la costruzione dei concetti, ma nell'approccio del libro si è assunto come scontato il fatto che usare la storia vuol dire usare fonti originali. Ciò è tanto più importante quando passiamo a considerare i fenomeni dello *spaesamento* e del *riposizionamento*. Questi fenomeni riguardano in particolare soggetti che possono essere considerati esperti in matematica (insegnanti in formazione e in servizio, studenti del sorso di laurea in matematica), ma hanno bisogno di porre in discussione le loro certezze per mettersi dalla parte degli studenti e rivivere loro stessi in prima persona il processo di costruzione degli oggetti matematici.

Perché il nuovo paesaggio favorisce questa rivisitazione? Per rispondere dobbiamo riflettere sulla natura degli oggetti matematici dal punto di vista cognitivo. Ci aiuta in questo la teoria sviluppata da David Tall e dai suoi colleghi e da loro applicata soprattutto allo studio dell'uso del calcolatore nell'insegnamento dell'analisi. In (Gray and Tall, 2001) sono considerati differenti tipi di oggetti matematici:

- gli oggetti *percettivi*, per esempio quelli della geometria e i grafici, che partono dalla fisicità dei sensi e si evolvono in immagini mentali più astratte attraverso il linguaggio;
- i procetti simbolici, cioè la triade costituita da concetti manipolabili, processi su di essi e i simboli che fanno da perno;
- i concetti assiomatici, tipici del pensiero matematico avanzato dove si usano gli assiomi verbali/simbolici per costruire una teoria.

La parola percettivo (traduzione dell'inglese *embodied* che alla lettera sarebbe incarnato, incorporato) è usata da Tall in un senso leggermente diverso da quello degli autori che hanno elaborato la teoria dell'*embodied cognition*, come in (Lakoff and Núñez, 2000). Essa è riferita al pensiero che è costruito sulla percezione sensoriale in opposizione a ciò che si fonda sull'operare simbolico e sulla deduzione logica. Secondo Tall i tre differenti tipi di oggetti sono collegati a tre mondi di rappresentazione (percettivo, simbolico-procettuale, formale-assiomatico). A loro volta questi mondi sono da Tall messi in relazione con i modi di rappresentazione mentale di Bruner

(*enactive* che possiamo tradurre con chinestetico, iconico, simbolico). A scuola, gli oggetti matematici sono usualmente presentati lavorando nel secondo o nel terzo mondo. Il magma di regole, manipolazione, formalismi, processi e concetti nasconde le radici cognitive dei concetti. Una radice cognitiva per Tall è un concetto che:

- è un nucleo di conoscenza significativa all'inizio di un cammino didattico
- permette uno sviluppo iniziale attraverso una strategia cognitiva di espansione piuttosto che ricostruzione;
- contiene la possibilità di conservare significato in sviluppi successivi;
- è abbastanza solido da rimanere utile negli sviluppi via via più sofisticati.

Lo spaesamento e il riposizionamento promossi dalla storia promuovono un processo in cui lentamente affiorano le radici cognitive, proprio perché si retrocede allo stadio dei sensi. Allora per l'insegnante che sta progettando una strategia per introdurre un concetto, il trovarsi in un nuovo paesaggio e guardarlo con occhi nuovi aiuta l'individuazione delle radici cognitive intorno a cui lavorerà in classe. Lo studente a sua volta si troverà in un ambiente in cui verrà opportunamente guidato dall'insegnante e sarà nella condizione di costruire i concetti matematici.

Questa idea dell'accompagnare lo studente in quella che, usando la terminologia di Freudenthal (1973), possiamo chiamare «reinvenzione guidata» è supportata dall'opinione di un famoso psicologo, Richard Skemp, che, nell'introduzione al suo libro *Psychology of learning mathematics* (1971, Penguin), scrive che un approccio puramente logico dà solo «il prodotto finale della scoperta matematica [...] e non riesce a generare nel discente quei processi con cui sono fatte le scoperte matematiche. Insegna il pensiero, non il pensare matematico»

ESEMPI DI UTILIZZO DEL MATERIALE

Prendo da *Fare matematica con i documenti storici*, volume per gli alunni, due esempi di diversa natura che spiegano il punto di vista esposto sopra.

Esempio 1

Consideriamo il problema 47 nel *Trattato d'Aritmetica* di Paolo Dell'Abbaco:
Un signore à un suo fante e mandalo nel giardino per 7 mele e dice: tu troverrai 3 portinai che ciaschuno ti dirà: io voglio la metà di tutte e due più di quelle che tti rimangono dopo la divixione. Adomando quante che ne cholxe di prima volendo che ne gli rimanexxe sette.

Questo problema è stato proposto a Giulia, studentessa del primo anno di liceo scientifico che non aveva ancora fatto l'algebra alle superiori, ma aveva qualche vago ricordo di cose dette alle medie. Il suo osservatore, che era una studentessa della Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario dell'Università di Genova, ha fatto un dettagliato resoconto dei suoi passi risolutivi in (De Francisci, 2005). Ne riporto i punti significativi con l'avvertenza che l'espressione AIUTO vuol dire che in quel momento è intervenuto l'osservatore con suggerimenti:

- Giulia ha un momento di sorpresa alla lettura del testo per gli errori grammaticali e l'oscurità di alcune parole (AIUTO).
- Legge attentamente il testo e ne fa una buona parafrasi.
- Disegna tre omini che portano ognuno $x/2 + 2$ mele.
- Riflette sull'inadeguatezza dei simboli.
- Fa un tentativo numerico (50 mele). Fallimento.
- Passa a una scrittura con incognite e equazioni che porta a un sistema.
- Giulia non ha fatto i sistemi e si blocca.
- Sa risolvere l'ultima equazione e parte da quella (AIUTO).
- Risolve usando in maniera semi intuitiva le proprietà delle equazioni.
- Si ferma e poi passa a lavorare allo stesso modo sulla precedente e poi sulla precedente (AIUTO).
- Trova 84 mele, ma sente il bisogno di controllare sul suo iniziale sistema che le cose funzionino.

Giulia ci fa riflettere su temi legati all'utilizzo della storia della matematica in classe e ci porta a rivedere certe posizioni. In prima istanza il suo percorso sembra

simile a quello seguito nella storia della matematica: nel risolvere questo problema algebrico espresso a parole, Giulia parte dal noto (il numero-tentativo 50) per andare all'ignoto, si pone, cioè, in un quadro aritmetico. L'insuccesso la stimola a passare al paradigma algebrico tramite equazioni e introduzione di simboli per le incognite. In questo passaggio, il procedimento aritmetico basato sui numeri le serve da modello per scrivere le equazioni. Per risolvere, usa la manipolazione algebrica con disinvoltura, senza fastidio perché la percepisce funzionale alla risoluzione del problema. In questa fase ha applicato spontaneamente il procedimento per analisi, prima prendendo come incognita il numero delle mele di partenza e, successivamente, il numero delle mele rimaste. Nel fare questo riecheggia l'analiticità operativa che Radford (1995) attribuisce a Diofanto. Alla fine, la verifica numerica si configura come il processo di sintesi che si contrappone all'analisi. Però non siamo in presenza di un ripercorrere passivo del processo storico come sembra adombrato in (Harper, 1987), bensì abbiamo una reinvenzione guidata, in cui il contesto e l'azione didattica dell'insegnante giocano un ruolo fondamentale nella zona di sviluppo prossimale dello studente (Vygotskij, 1992).

Esempio 2

Consideriamo il brano di Isaac Newton (*Tractatus de quadratura curvarum*) riportato nel libro:

Considero in questo lavoro le grandezze matematiche non come costituite di parti piccole a piacere ma come generate da un moto continuo.

Le linee vengono descritte non come addizioni di parti, ma per moto continuo di punti; le superfici per moto continuo di linee; i solidi per moto di superfici; gli angoli per rotazione dei loro lati; i tempi per flusso continuo e così in altri casi analoghi.

Queste generazioni hanno veramente luogo in natura, e si osservano ogni giorno nel movimento dei corpi. In questo modo gli antichi indicarono le generazioni del rettangolo come descritto da un segmento mobile perpendicolare ad un segmento fisso. [...]

Questo brano evidenzia, pur con tutte le difficoltà interpretative e con le dovute riserve, il fatto che l'approccio newtoniano fa ricorso al percettivo/corporale collegato al moto e alla geometria euclidea. Se leggiamo i lavori di Tall con il calcolatore sull'introduzione all'analisi nella scuola secondaria vediamo nello spirito una somiglianza sorprendente (ovviamente nelle sue linee generali). Riportiamo alcuni passi che illustrano questo parallelismo da (Tall, 1985):

Il computer offre una risorsa nelle lezioni di matematica inimmaginabile fino a poco tempo fa. Permette un approccio cognitivo all'analisi senza i prerequisiti dei processi di limite, corde che si avvicinano alle tangenti e così via, basato sul

semplice fatto che la derivata è non solo il gradiente della tangente, è il gradiente del grafico stesso. (p. 51)

[...]

La grande maggioranza degli studenti non prosegue nello studio dell'analisi matematica formale e sicuramente trarrà vantaggio da una sensibilità per le idee geometriche di incremento. (p. 52)

Il punto di vista di Tall ruota intorno al significato che lui dà alla parola cognitivo (dal latino *cognoscere*). Quello che lui chiama approccio cognitivo include «conoscere» e «capire», si appoggia all'intuizione (intesa in senso psicologico come afferibile con immediatezza e non in senso matematico come contrario a rigoroso). A sua volta questo approccio è ispirato alla dualità discussa da Skemp tra capire strumentale (capire che si fa così) e capire relazionale (capire perché si fa così).

CHE COSA IL LIBRO PUÒ DARE AI LETTORI/UTILIZZATORI

I francesi chiamano *livre de chevet* un libro particolarmente amato, cioè quel libro che si è già ripetutamente letto, ma che si tiene sul comodino per prenderlo in mano ogni tanto. Mi sembra che questo libro si possa vedere come un *livre de chevet* dell'insegnante che lo prenderà in mano ogni tanto, quando vuol introdurre un argomento, quando vuol tornare su un argomento, quando vuol mettersi in un paesaggio nuovo e esplorare i concetti da un altro punto di vista, quando vuol pensare intorno alla matematica. Ma la filosofia di fondo del libro, lo spirito dell'approccio didattico, sarà un filo rosso nello stile di insegnamento.

Il motto scelto dagli autori per questo lavoro («Un documento storico in più, un esercizio ripetitivo in meno») mi sembra azzeccato. Forse direi anche «Un documento storico in più, un insegnante gratificato in più» perché penso che uscire dalla gabbia dell'abitudine aiuti l'insegnante a vivere meglio la sua professione.

Tecnicamente i commenti che accompagnano i brani storici sono concepiti in modo da guidare lo studente nei punti cruciali. L'uso di questi aiuti, che si configurano come una impalcatura, dipende dal livello scolastico in cui si propongono i materiali storici e dalle finalità specifiche dell'insegnante. Se si può e si vuole investire più tempo e energie penso che si possa anche tentare di mettere lo studente davanti al documento storico senza l'impalcatura dei commenti. L'impalcatura sarà costituita dal lavoro di gruppo e dalla discussione che ne segue con l'orchestrazione dell'insegnante. Ho sperimentato questo modo di procedere con studenti adulti, con adulti con scarsa preparazione matematica e con giovani studenti. Mi ha colpito la varietà delle soluzioni proposte e il modo con cui i soggetti si sono avvicinati a queste soluzioni. E mi ha fatto riflettere sul modo di presentare certi fatti in classe. Quest'ultimo elemento (la riflessione sui modi di insegnare) è senz'altro utile all'insegnante che

voglia ogni tanto guardare al suo lavoro da fuori.

Ognuna delle situazioni presentate nella nostra antologia contiene, in forma più o meno accentuata, le radici cognitive di un concetto (di equazione, di algoritmo, di derivata,...).

Dunque, la storia in questo libro si configura come un mezzo per lavorare sulle radici cognitive della matematica, cioè su quei nuclei di conoscenza intorno ai quali per espansione costruiremo in classe i concetti. Il puntare sul ritorno alle radici cognitive giustifica, anzi rende essenziale, l'uso delle fonti originali. Nelle fonti mediate le radici possono essere già coperte da sovrastrutture che ne nascondono le potenzialità cognitive. Spesso discutendo sull'uso delle fonti originali si è sottolineato la difficoltà di accesso per un insegnante. Gli autori del libro, con tenacia e iniziativa, hanno dimostrato che il problema può essere parzialmente superato. Spero quindi che, se è vero che «picciol favilla gran fiamma seconda», editori e storici professionisti forniscano materiali agli insegnanti volenterosi per farsi la loro personale antologia.

CHE COSA I LETTORI/UTILIZZATORI POSSONO DARE IN CAMBIO

Ci aspettiamo commenti, critiche, segnalazioni di errori o inopportunità. Ci aspettiamo resoconti di esperienze e suggerimenti per il futuro. Ci aspettiamo segnalazioni per il reperimento di fonti nuove. E infine, per chi come Adriano Demattè ha creduto nel progetto e ha molto lavorato per realizzarlo, incoraggiamenti e applausi, applausi, applausi,...

BIBLIOGRAFIA

- Bartolini G.** (2005), *Germi di pensiero infinitesimale*, Tesi di Laurea, Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova
- Burton M.B.** (1988), A linguistic basis for students difficulties with algebra, *For the learning of mathematics*, v. 8, n. 1, 2-7
- Cajori F.** (1896), *A history of elementary mathematics with hints on methods of teaching*, Macmillan, London-New York
- Clairaut A.-C.** (1771), *Elementi di geometria*, V. Monaldini, Roma, (II edizione italiana)
- De Francisci S.** (2005), *Prova d'esame del corso di Didattica della Matematica 1* (II parte), SSIS dell'Università di Genova
- Demattè A. and Furinghetti F.** (2022). Today's students engaging with abacus problems. *ZDM – Mathematics Education*, 54, 1521–1536.
- Fauvel J. and Van Maanen J.** (editors) (2000), *History in mathematics education: The ICMI Study*, Kluwer, Dordrecht-Boston-London
- Freudenthal H.** (1973), *Mathematics as an educational task*, D. Reidel, Dordrecht
- Gray E. and Tall D.** (2001), Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics, in M. van den Heuvel- Panhuizen (editor), *Proceedings of PME 25*, v. 3, 65-72
- Harper E.** (1987), Gost of Diophantus, *Educational Studies in Mathematics*, v. 18, 75-90
- Lakoff G. and Núñez R.E.** (2000), *Where mathematics come from*, Basic Books, New York, ed. italiana, *Da dove viene la matematica*, Bollati, Boringhieri, Torino, 2005
- Radford L.** (1995), L'émergence et le développement conceptuel de l'algèbre, in IREM de Montpellier (editor), *First European summer university proceedings* Montpellier, 1993, 69-83
- Radford L.** (1996), La résolution des problèmes: comprendre puis résoudre, *Bulletin AMQ*, v. XXXVI, n. 3, 19-30
- Skemp R.R.** (1971), *The Psychology of Learning Mathematics*, Penguin Books, Harmondsworth (UK)
- Tall D.** (1985), Understanding the calculus, *Mathematics Teaching*, n. 110, 49-53
- Vygotskij L.S.** (1992), *Pensiero e linguaggio*, edizione critica di L. Mecacci, Laterza, Bari



Pagina iniziale da *Breve compendio d'operazioni geometriche da farsi colla sola riga, e compasso "esposto"* dal can. Angelo Capelli, Venezia 1760 ("presso" Antonio Mora).

Introduzione

Quello che vogliamo discutere è un itinerario *dentro* la Storia della matematica, non un lavoro *sulla* Storia della matematica. Ciò che proponiamo e illustriamo è una piccola antologia di documenti da utilizzare a scuola, in certo modo come si utilizza un'antologia di testi letterari.

Un documento matematico può essere un brano in cui prevale il linguaggio naturale o, al contrario, è preminente il simbolismo; può anche essere uno schema, un diagramma, un disegno.

Chiunque studi letteratura può capitare che entri *naturalmente* in contatto con i testi, con le opere (di narrativa, poesia ecc.) dell'autore che sta studiando e non senta l'esigenza di fare riferimento all'apparato critico-interpretativo che, eventualmente, accompagna i testi presi in esame; al massimo, per autori stranieri, utilizzerà traduzioni nella propria lingua.

Possiamo leggere Saffo, Montale, Zola anche senza conoscere la poesia greca classica, l'ermetismo, il naturalismo francese; possiamo dunque fare a meno di un manuale di letteratura. Di più: anche nel caso in cui cominciassimo con quest'ultimo, prima o poi, *necessariamente*, approderemo ai testi degli autori considerati.

Tutto ciò succede in ambito scolastico, fin dalla scuola elementare e media; basti pensare a come sono strutturate le antologie: insieme a quadri introduttivi, note ecc., ci sono i testi che i ragazzi leggono, spesso senza conoscere la vita dell'autore o il contesto storico-letterario in cui sono stati elaborati.

Con quanto appena detto, abbiamo voluto enfatizzare l'importanza di leggere direttamente le opere originali. Siamo tuttavia consapevoli che conoscere il contesto di vita degli autori, la collocazione nella storia della scienza, la riflessione che sulle opere è stata fatta negli anni successivi alla loro realizzazione siano un valore aggiunto, addirittura indispensabile per l'interpretazione degli originali senza la violenza di riferirli unicamente al modo di fare matematica del giorno d'oggi o addirittura alla nostra sensibilità personale.

L'approccio alle discipline scientifiche si verifica quasi esclusivamente attraverso i manuali, e questo accade oggi in particolare per la matematica. Ciò può essere giustificato da considerazioni didattiche, ma non dovrebbe precludere totalmente la possibilità di accostarsi alle fonti originali, in situazioni opportune.

G. Hardy (1877-1947), in *Apologia di un matematico*, racconta come la lettura del *Cours d'Analyse* di Camille Jordan abbia condizionato la sua vita di giovane studente, cambiando radicalmente il punto di vista sulla matematica che aveva avuto fino a quel momento e iniziandolo alla sua futura carriera di matematico.

Indagare il come e il perché nella scuola sia avvenuta la progressiva 'separazione'

dalle fonti significherebbe addentrarsi in una discussione di natura storico-epistemologica che esula dai nostri scopi¹. In questa sede ci pare importante sottolineare l'esistenza di questo fatto che, anche se per certi aspetti può essere considerato inevitabile, ha implicazioni didattiche che riteniamo negative.

MOTIVAZIONI DIDATTICHE

Uno degli obiettivi di quest'antologia è dunque quello di creare, anzitutto negli insegnanti, curiosità per la (ri)scoperta delle fonti matematiche.

Poiché i testi proposti appartengono a periodi storici diversi, possono fornire alcune 'linee evolutive' dei concetti matematici presi in esame. È possibile allora constatare che alcuni li studiamo, in certo modo, come venivano studiati 2000 anni fa; altri invece oggi sono affrontati da punti di vista differenti o vengono presentati con un altro linguaggio. Così si può ben dire, sovvertendo il principale dei luoghi comuni sulla matematica, che "la matematica è (anche) opinione!"

Dal punto di vista didattico, riteniamo che sia più produttivo lavorare sui documenti anziché su narrazioni della storia della matematica perché un documento riporta sì un contenuto matematico ma ha anche comunque un 'alone storico'. Può far trasparire, infatti, elementi legati alla quotidianità del periodo da cui il documento proviene (pensiamo ai riferimenti presenti nei problemi medioevali e rinascimentali: allevamento, prodotti agricoli, unità monetarie ecc.) o stili letterari diversi (in particolare se in lingua italiana e riportati senza adattamenti).

Soffermiamoci un attimo sul modo in cui i nostri alunni sono chiamati ad affrontare la matematica: soprattutto attraverso l'applicazione di algoritmi, mentre è carente la riflessione sulla costruzione degli oggetti matematici, l'individuazione di strutture e la creazione di connessioni che arricchiscano di significati ciò con cui sanno operare. Questo approccio lascia tracce nell'immagine della matematica elaborata dagli studenti, che poi ritroviamo in loro come cittadini. All'analisi, alla revisione critica, alla ricerca di collegamenti dovrebbe essere improntata tutta la formazione, primaria e secondaria.

È nelle discipline umanistiche che la collocazione storica viene affrontata con maggiore sistematicità. La storia della matematica può essere una risorsa per condurre la matematica fuori dallo stretto ambito della disciplina, per ricercare connessioni e collegamenti con altri contesti disciplinari, per determinare un suo cambiamento d'immagine presso gli studenti, per metterne in evidenza l'origine da un contesto socioculturale. Potrebbe anche suggerire all'insegnante scelte didattiche per ridimensionare la trattazione di certi aspetti tecnici, gravosi ma scarsamente utili.

¹ Un punto di vista è possibile trovarlo in T. Khun, *La struttura delle rivoluzioni scientifiche*, trad. it., Einaudi, 1999.

Il lavoro su un documento storico consente di perseguire finalità disciplinari relative al consolidamento di conoscenze e abilità. Lavorare in contesti diversi da quelli del tradizionale esercizio/problema scolastico, utilizzare vari tipi di linguaggio ed affrontare ambiti di applicazione nuovi consente di stimolare gli allievi ad un uso più motivato dei concetti.

I nostri alunni hanno difficoltà a comprendere le spiegazioni del loro libro di matematica quando esso non è calibrato sulle loro effettive competenze linguistiche. Nel volume *Fare matematica con i documenti storici*, la presenza delle attività guidate che seguono ciascun documento li aiuta nella comprensione del testo, mettendo a fuoco i punti centrali e indirizzando la loro riflessione. Così, in questo lavoro guidato di analisi del testo storico possiamo anche vedere delle potenzialità formative per gli alunni rispetto all'utilizzo consapevole del manuale di matematica.

SCELTA DEI DOCUMENTI

I documenti presentati provengono dalle opere ritenute storicamente più rilevanti, mettendo in luce il contributo di autori famosi, sia dalle opere di autori minori o addirittura ignoti ma comunque emblematici di un momento storico. La scelta ha tenuto conto della loro attinenza ai temi trattati in classe e previsti nelle indicazioni ministeriali. Alcuni forniscono spunti e materiale per specifici approfondimenti e/o completano dal punto di vista concettuale alcuni temi tradizionali. Tutti i documenti sono stati selezionati con un'attenzione alla loro accessibilità da parte degli alunni, relativamente alle conoscenze che, in base alla nostra esperienza di insegnanti, abbiamo ritenuto possano essere in loro possesso, cosicché sia possibile sfruttarne le potenzialità didattiche.

I documenti sono presentati nella versione originale, alcuni direttamente dalle edizioni storiche. Gli adattamenti sono dunque minimi e consistono, per la maggior parte dei casi, nella loro trascrizione con caratteri tipografici diversi rispetto alle edizioni originali. I documenti scritti in greco, latino, francese, tedesco ecc. sono quasi sempre riportati nella traduzione italiana. Talvolta, la loro interpretazione è supportata da nostre note a piè di pagina.

IL VOLUME PER GLI STUDENTI *FARE MATEMATICA CON I DOCUMENTI STORICI*: PRECISAZIONI DIDATTICHE

Ogni documento è accompagnato da alcune **attività didattiche** mirate a facilitare l'approccio al documento stesso.

Sono riportate sotto la voce **Per interpretare il documento**. Si tratta di semplici attività finalizzate alla puntualizzazione degli aspetti essenziali, integrate da altre per il consolidamento delle abilità matematiche attraverso il richiamo di conoscenze precedenti e attraverso applicazioni concepite secondo le modalità suggerite nel brano storico. Talora, è presente la voce **Fai le tue ipotesi** dove l'alunno viene invitato a esplicitare interpretazioni personali sull'inquadramento storico di fatti e circostanze: vengono suggerite riflessioni che danno priorità all'innescio di una *mentalità congetturale*, anche a scapito della veridicità delle conclusioni (pure un'interpretazione in chiave *pseudostorica* di fatti matematici può aiutare lo studente a richiamare conoscenze disciplinari precedenti e a stabilire collegamenti con fatti storici a lui noti). Nelle attività di **Per interpretare il documento** sono anzitutto presentate quelle che fanno riferimento diretto al documento (utilizzo degli stessi esempi numerici, commento di frasi, riproposizione in forma di schema delle diverse parti ecc.). Di seguito, ne vengono in qualche caso riportate altre che si basano su esempi differenti. Molte attività possono trovare completamente attraverso l'utilizzo del libro di testo in adozione.

IL VOLUME PER GLI INSEGNANTI

Il presente volume per gli insegnanti offre alcune novità rispetto all'edizione del 2006. La più rilevante riguarda l'introduzione della Prima parte dedicata a una proposta per la scuola primaria. Si tratta di una raccolta di idee per attività di aritmetica ricavate dall'opera di fine Quattrocento nota come *Aritmetica di Treviso*, ovvero *L'arte de L'abbacho*. La raccolta era stata pubblicata da Iprase nel 2006 come fascicolo curato da Maria Paola Villi e Adriano Demattè.

La Prima parte dedicata, appunto, alla scuola primaria ha un'impostazione diversa rispetto alla Parte successiva. Infatti, riporta anche i documenti originali, mentre nel caso della scuola secondaria sono riportati nel volume per gli alunni. Sia per gli insegnanti della scuola primaria che della scuola secondaria sono illustrati gli aspetti didattici e le motivazioni che caratterizzano la proposta. La diversità fra scuola primaria e secondaria ha una motivazione legata al tipo di materiale che compone il volume per gli alunni della secondaria che, pensiamo, abbia un'impostazione non adatta agli alunni della primaria. Riteniamo che nella primaria sia opportuno che l'insegnante sviluppi le attività con alunni, scegliendo l'impostazione che ritiene più

opportuna, preferibilmente sottolineando la prospettiva interdisciplinare e gli aspetti laboratoriali.

La Seconda parte per la scuola secondaria fa riferimento dettagliato a ciascuna delle attività riportate nel volume per gli alunni *Fare matematica con i documenti storici*. Vengono esposte alcune puntualizzazioni di carattere storico che riprendono quelle presentate come introduzione dei documenti. Ci si sofferma su alcune considerazioni didattiche evidenziando, fra l'altro, se le attività sono indicate per la secondaria di primo o di secondo grado. Viene fornita la risoluzione dei quesiti destinati agli alunni nei casi in cui essa non sia già presente nei documenti. In qualche caso sono suggeriti degli approfondimenti che l'insegnante potrà utilizzare per ulteriori attività in classe. Sono infine indicate le fonti dalle quali i documenti sono stati tratti.

La *Bibliografia ragionata* che conclude il volume offre una breve presentazione di ciascuno dei sussidi utilizzati per la realizzazione dell'opera e di altri che riteniamo particolarmente significativi. In internet si potrà accedere a migliaia di siti (soprattutto in lingua inglese) che offrono materiali riguardanti la storia della matematica, utili per il lavoro in classe.

Uno slogan: Un documento storico in più, un esercizio ripetitivo in meno.

PARTE PRIMA PER LA SCUOLA PRIMARIA **Una proposta da *Larte de labbacho***

Introduzione

Nell'insegnamento della storia, le fonti originali sono generalmente riconosciute come un valido sussidio. Meno usuale è il loro utilizzo nell'insegnamento della matematica. Vale la pena utilizzarli, cioè, possono aiutare l'alunno ad imparare meglio la disciplina? La risposta è sì: vale la pena utilizzarli proprio perché gli possono offrire spunti e materiali per affinare il pensiero razionale, per calcolare, per misurare, ... e, naturalmente, per cogliere la matematica nel contesto in cui è nata e nel quale ha avuto le sue più significative applicazioni.

Non è facile trovare in letteratura il resoconto di attività per la scuola primaria realizzate in classe. Traendo spunto da una fonte storica del XV secolo, un'opera realizzata appena fuori dai confini del Trentino, proponiamo agli insegnanti un itinerario di attività laboratoriali. Si tratta dell'ampliamento di un'esperienza riguardante le antiche tecniche di calcolo già svolta in classe. Attraverso alcuni brani tratti dalla fonte storica, vengono messi a fuoco vari concetti che riteniamo fondamentali nella preparazione degli alunni per il loro percorso nella scuola dell'obbligo.

La stesura della proposta ha comportato la lettura integrale dell'originale e l'individuazione delle parti attinenti ai temi trattati nella scuola primaria. L'intera opera è scaricabile gratuitamente dal sito <http://www.filippin.it/morin/>. Gli insegnanti curiosi di conoscerne direttamente il contenuto possono cimentarsi nella lettura, senza però farsi scoraggiare dai caratteri utilizzati nella stampa, in qualche caso diversi da quelli moderni. Possono avvalersi della trascrizione di alcune parti, corredate da brevi commenti, qui riportate. Le successive proposte per i laboratori sono spunti da ampliare in vista del lavoro in classe. Iprase è interessato ad avere notizia delle esperienze svolte, per conservarne memoria come testimonianze preziose per l'attuale ricerca riguardante l'utilizzo delle fonti originali nell'educazione matematica.

Larte de labbacho è il primo testo di matematica stampato. Pubblicato nel 1478 a Treviso, è opera di un anonimo autore, forse un ecclesiastico. È un trattato di aritmetica che ricalca il più famoso *Liber abbaci* di Leonardo Pisano, detto Fibonacci, del 1202. L'autore spiega che realizza quest'opera perché sollecitato da alcuni amici che praticavano la *merchadantia* e che sentivano l'esigenza di affinare le proprie competenze in campo aritmetico.

All'epoca, nella Provincia Trevigiana, che apparteneva alla Repubblica di Venezia, erano molto fiorenti il commercio e l'arte della stampa. Nell'opera vengono

proposti i contenuti specifici dell'aritmetica utili per le attività commerciali: numerazione posizionale con l'utilizzo delle cifre indo-arabiche, frazioni, operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, conversioni tra unità monetarie e di misura, problemi applicativi.

UNA SELEZIONE DI BRANI PER LA SCUOLA PRIMARIA

Di seguito riportiamo la traslitterazione di una selezione di brani tratti direttamente dal testo originale; alcuni di essi vengono presentati anche con a fronte le copie riprodotte dall'edizione del 1478.

Gli adattamenti rispetto all'originale riguardano la sostituzione dei termini di derivazione dialettale, o di quelli oggi non più in uso; di alcuni, che sono invece mantenuti, vengono forniti gli specifici chiarimenti. Si è operata anche la semplificazione dei periodi più involuti. Delle parti utilizzate, però, si è voluto mantenere intatto il ragionamento matematico, che presenta aspetti molto interessanti per la didattica nella scuola primaria.

CONCETTI E TERMINI PRESENTATI NEL TESTO

- **Cifra**

Figura¹

¹ L'autore usa il termine “figura” per indicare anche il numero di una cifra, non solo la cifra.

- **Numero**

Numero è una moltitudine aggregata, formata da molte unità: almeno 2 che è il numero minore che si trova.

- **Unità**

È quella cosa che è detta una. [...] Non è detto numero ma principio dei numeri.

- **Esistono numeri di tre ordini diversi**

Il primo si chiama numero semplice. L'altro numero articulo. Il terzo si chiama numero composito o misto.

Corrispondono rispettivamente ai numeri naturali minori di 10 e maggiori di 1, al 10 e ai suoi multipli, ai numeri che hanno...

valore maggiore di 10 ma non possono essere divisi per 10 in parti uguali senza resto, come 11, 12 o 13.

- Zero

La decima figura cioè 0 si chiama cifra ovvero nulla cioè figura di niente perché niente leva ma aiuta le altre figure a crescere il loro valore.

i	fa	1	fa	i
i	fa	2	fa	2
9	fa	3	fa	3
i	fa	4	fa	4
i	fa	5	fa	5
i	fa	6	fa	6
i	fa	7	fa	7
i	fa	8	fa	8
i	fa	9	fa	9
i	fa	0	fa	0
1	fa	10	fa	10
2	fa	10	fa	20
3	fa	10	fa	30
4	fa	10	fa	40
5	fa	10	fa	50
6	fa	10	fa	60
7	fa	10	fa	70
8	fa	10	fa	80
9	fa	10	fa	90
0	fa	10	fa	0
1	fa	100	fa	100
2	fa	100	fa	200
3	fa	100	fa	300
4	fa	100	fa	400
5	fa	100	fa	500
6	fa	100	fa	600
7	fa	100	fa	700
8	fa	100	fa	800
9	fa	100	fa	900
0	fa	100	fa	0

Unità	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
decina										
centenario										
Milaio										
decena di miliaio										
centenario di miliaio										
Milione										
decena di milione										
centenario di milione										
milaio de milione										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
0										

Prendi dunque ciascuna figura nel suo luogo², moltiplicala per il suo luogo e nascerà il suo valore.

² Posizione: unità, decine, centinaia, migliaia, ...

- Operazioni (atti): addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione

Jongere ha per suo articulo	et.	longere ha per suo articulo	et
Lauare ha per suo articulo	de.	Cavare ha per suo articulo	de
Moltiplicare ha per suo articulo	fia.	Moltiplicare ha per suo articulo	fia
Partire ha per suo articulo	in.	Partire ha per articulo	in

Per ogni operazione sono necessari almeno due numeri. Con gli stessi numeri, operazioni diverse daranno risultati diversi, tranne che sommando 2 con 2 e moltiplicando 2 e 2.

Jonge:vi	3	et	9	fa	i 2	longe di	3	et	9	fa	12
Laua:vi	3	de	9	resta	6	Cava di	3	de	9	resta	6
Moltiplica:di	3	fia	9	fa	27	Moltiplica di	3	fia	9	fa	27
Parti:vi	3	in	9	intra	3	Parti di	3	in	9	intra	3

[...] si deve aggiungere il minore al maggiore: è più conveniente che fare il contrario. Se si farà al contrario nascerà sempre una medesima cosa. Come a dire: 2 e 8 fa 10 e 8 e 2 similmente fa 10.

- Addizione

Presi due numeri, si addizionano le figure che stanno nello stesso luogo.

Se tu vuoi aggiungere un numero ad un altro scrivi quello maggiore sopra e il minore sotto mettendo le figure nel loro giusto luogo cioè le unità con le unità, le decine con le decine, le centinaia con le centinaia ecc. Sempre devi cominciare dalle figure che hanno un valore minore.³ Quindi, se tu volessi aggiungere 38 a 59 metti i tuoi numeri sotto questa forma

$$\begin{array}{r} 59 \\ 38 \\ \hline 97 \end{array}$$

³ Le unità

Somma

Farai così dicendo 8 e 9 fa 17, scrivi 7 sotto le unità, tieni 1 perché quando nasceranno più figure in un luogo scrivi quella di minor valore e l'altra (o le altre) la porterai al luogo seguente [...] porta dunque quell'1 che hai tenuto e aggiungilo al 3 dicendo: 1 e 3 fa 4 e 5 fa 9. Metti quel 9 sotto le decine ed è fatta.

Per fare la prova, uno dei due addendi va levato dalla somma ottenuta, perché la sottrazione è la prova dell'addizione e viceversa. L'autore rinvia questa prova a dopo che avrà insegnato la sottrazione. Intanto propone la "prova del nove":

sappi che devi sommare le figure di ciascun addendo come se fossero unità, senza mai menzionare il 9 né lo 0 perché ogni 9 ed ogni 0 sono nulla. E ogni volta che questa somma raggiungerà o passerà il 9 sottrai 9 e tieni il resto, guardando se la somma delle cifre degli addendi e quella delle cifre del risultato sono uguali. Volendo provare la somma soprascritta, scrivila così:

$$\begin{array}{r} 59 \\ 38 \\ \hline \text{Somma} \quad 97 \mid 7 \end{array}$$

Per la prova del 9, si considera prima 59, poi 38, infine 97. Si trascurano i 9. Quando la somma delle cifre supera 9, si sottrae 9 e si prosegue con le addizioni...

5 e 3 fa 8 e 8 fa 16, leva 9 e rimane 7. Scrivi il 7 a fianco del risultato. Poi guarda se anche la somma delle cifre del risultato dà 7. E in effetti si ottiene 7.

[...]

Se avessi da sommare 816 con 1916, scrivi i numeri così:

[...]

$$\begin{array}{r} 1916 \\ 816 \\ \hline 2732 \mid 5 \end{array}$$

Per la prova del 9, si considera prima 1916, poi 816, infine 2732. Si trascurano i 9. Quando la somma delle cifre raggiunge o supera 9, si sottrae 9 e si prosegue con le addizioni...

[...] 1 e 1 fa 2 e 6 fa 8 e 8 fa 16, leva 9, rimane 7. Poi di 7 e 1 fa 8 e 6 fa 14, leva 9, rimane 5. Scrivi 5 sotto. Poi [...] 2 e 7 fa 9 che è 0, poi 3 e 2 fa 5, sicché sta bene.

• Sottrazione

Tu lettore, capito l'atto del sommare, stai bene attento all'atto del sottrarre. Quindi dico che la sottrazione non è altro che da due numeri trovare quanto resta dal minore al maggiore affinché si possa conoscere quel resto. Esempio: leva 3 da 9, resta 6. Nella sottrazione sono necessari due numeri: il numero da cui si sottrae e quello che viene sottratto. Il numero da cui si sottrae deve essere scritto sopra, il numero che viene sottratto, sotto, le decine sotto le decine e così per ordine. ►

[...]

Se devi sottrarre 348 da 452 metti in questa forma:

$$\begin{array}{r} 452 \\ - 348 \\ \hline 104 \end{array}$$

Il resto

[...]

8 da 2 non si può sottrarre ma 2 forma⁴ 10; questo 2 lo devi aggiungere all'altro 2 che è sopra l'8 dicendo 2 e 2 fa 4 e questo scrivilo sotto l'8 come resto, con la condizione che alla cifra vicina all'8 devi aggiungere 1 e così diventerà 5. Poi dirai: 5 meno 5 dà 0 che scriverai sotto. Poi sottrai 3 da 4, resta 1 e scrivilo sotto il 3 ed è fatta e avrai come resto 104.

Per provare se è corretta, aggiungi il numero sottratto al resto, se otterrai il numero da cui hai sottratto sarà giusta e scrivi così:

4	5	2	2
3	4	8	6
1	0	4	5
4	5	2	

Per la prova del 9, si addizionano prima le cifre di 452... poi quelle di 348... infine quelle di 104...

⁴ Un “2” che sommato ad 8 dà 10.

Come prova, nell'ultima riga si è ottenuto 452, risultato dell'addizione del resto con 348.

Voglio che tu capisca come potrai provare la soprascritta operazione con la prova del 9. Somma le cifre del numero maggiore come se fossero unità dicendo: 4 e 5 fa 9, che è come 0, ti resta il 2 e scrivilo accanto. Poi somma le cifre di 348 sempre come fossero unità dicendo: 3 e 4 fa 7 e 8 fa 15; leva 9, rimane 6 e scrivilo accanto. Poi leva quel 6 da 2 e non si può.

A 6 manca 3 per avere 9 (9 è il “rezimento” cioè ciò che “regge” la prova).

Aggiungi 3 a 2 che farà 5 e questo 5 è la prova principale e scrivilo fuori dalla riga. Poi guarda se la prova del resto viene ad esser 5 dicendo 1 e 4 fa 5. Sicuramente l'addizione è corretta.

• Moltiplicazione

Spiegato il terzo atto, cioè la sottrazione, affronta, o lettore, il quarto atto cioè la moltiplicazione. Per comprenderlo devi sapere che moltiplicare un numero per se stesso o per un altro numero non è altro che, dati due numeri, trovarne un terzo che contiene uno dei due numeri tante volte quante sono le unità dell'altro. Esempio 2 per 4 fa 8; ecco che 8 contiene in sé tanti 4 quante unità sono nel 2, il quale ha 2 unità. Dunque 8 contiene il 4 due volte. Così pure l'8 contiene tante volte il 2 quante unità sono nel 4, il quale è formato da quattro unità. Dunque l'8 contiene il 2 quattro volte. Intendi bene che nella moltiplicazione sono principalmente necessari due numeri cioè il moltiplicatore e il numero che deve essere moltiplicato, e anche il moltiplicatore si può scambiare con il numero che dev'essere moltiplicato, e così il contrario rimanendo sempre la medesima cosa, tuttavia l'uso e la pratica comandano che il numero minore deve essere preso come moltiplicatore e non il maggiore perché dovremmo dire 2 per 4 fa 8 e non 4 per 2 fa 8, benché si ottenga lo stesso risultato⁵. Ci sono tre modi per moltiplicare cioè per colonna, per crocetta e per scacchiera. Prima però impara a mente le moltiplicazioni qui indicate senza le quali nessuno può affrontare questo atto, cioè il moltiplicare. Impara, dunque:

2	fa	2	fa	4
2	fa	3	fa	6
2	fa	4	fa	8
2	fa	5	fa	10
2	fa	6	fa	12
2	fa	7	fa	14
2	fa	8	fa	16
2	fa	9	fa	18
2	fa	0	fa	0
3	fa	3	fa	9
3	fa	4	fa	12
3	fa	5	fa	15
3	fa	6	fa	18
3	fa	7	fa	21
3	fa	8	fa	24
3	fa	9	fa	27
3	fa	0	fa	0
4	fa	4	fa	16
4	fa	5	fa	20
4	fa	6	fa	24
4	fa	7	fa	28
4	fa	8	fa	32
4	fa	9	fa	36
4	fa	0	fa	0
5	fa	5	fa	25
5	fa	6	fa	30
5	fa	7	fa	35
5	fa	8	fa	40
5	fa	9	fa	45
5	fa	0	fa	0
6	fa	6	fa	36
6	fa	7	fa	42
6	fa	8	fa	48
6	fa	9	fa	54
6	fa	0	fa	0
7	fa	7	fa	49
7	fa	8	fa	56
7	fa	9	fa	63
7	fa	0	fa	0
8	fa	8	fa	64
8	fa	9	fa	72
8	fa	0	fa	0
9	fa	9	fa	81
9	fa	0	fa	0

⁵ Vale, quindi, la proprietà commutativa.

L'autore riporta poi le tavole di conversione da "spiccioli" a "lire, a "soldi", a "ducati grossi", a "oro", a "carati"

Lo scolaro con ardimento può cominciare a moltiplicare per colonna che si utilizza quando il moltiplicatore è un numero semplice e il numero che dev'essere moltiplicato è almeno di due cifre.

[...]

Se qualcuno ti domandasse quanto fa 8 per 9279 fai così. Moltiplica 9 per 9 che fa 72, scrivi 2 e tieni il 7, poi di 7 per 8 fa 56, e 7 che hai tenuto fa 63. Scrivi 3 e tieni 6, poi dirai 2 per 8 fa 16 e 6 che hai tenuto fa 22. Scrivi 2 e tieni 2, poi moltiplica 8 per 9 che fa 72 e 2 che hai tenuto fa 74, scrivi prima 4 e poi 7 verso sinistra e ammonta a 74232.

Se volessi controllare il calcolo sopra descritto con la prova del 9, somma tutte le cifre del moltiplicatore e quelle del numero che dev'essere moltiplicato, senza mai menzionare 9 né 0 perché ogni 9 è 0 e ogni 0 è 0 e ogni volta che la somma raggiungerà o passerà il 9, togli 9 e tieni il resto. Sicché volendo far la prova della moltiplicazione per colonna, scrivila così:

$$\begin{array}{r}
 9 \quad 2 \quad 7 \quad 9 \quad 0 \\
 8 \quad 8 \\
 \hline
 7 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 0
 \end{array}$$

Per la prova del 9, si fa la somma delle cifre di 9279 e, operando come nei casi precedenti, si ottiene 0...

[...]

Somma 2 e 7 che fa 9 cioè 0 [...] e scrivilo a fianco. [...] Scrivi 8. Poi moltiplica [...] 8 per 0 fa 0.

Poi somma le cifre del prodotto e controlla se danno 0.

Si può provare questa moltiplicazione per colonna con maggiore sicurezza: si dividerà 74232 per 8 e si otterrà 9279 o si dividerà 74232 per 9279 e farà 8 ma non posso dirti come, finché non saprai dividere perché il dividere prova il moltiplicare e il moltiplicare prova il dividere.

[...]

Capito il primo modo di moltiplicare, cioè per colonna, affronta diligentemente il secondo modo cioè il moltiplicare per crocetta semplice che si usa quando si ha da moltiplicare un numero di due cifre per un altro numero di due cifre come 12 per 12.

[...]

Se qualcuno ti domandasse quanto fa 12 per 13, fa così: moltiplica 2 per 3 che fa 6, scrivi quel 6 sotto i numeri e non tener niente perché altro non c'è. Poi moltiplica in croce dicendo 1 per 3 fa 3 e 1 per 2 fa 2. Somma 2 e 3 che fa 5, scrivi quel 5 sotto le decine, poi moltiplica 1 per 1 che fa 1, poi scrivi quell'1 a sinistra del 5. Farà 156.

Se volessi fare la prova del 9, scrivi la crocetta così:

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 3 \quad | \quad 4 \\
 1 \quad 2 \quad | \quad 3 \\
 \hline
 1 \quad 5 \quad 6 \quad | \quad 3
 \end{array}$$

Dunque, analogamente alla moltiplicazione per colonna, l'autore illustra la prova del 9.

Altro esempio di crocetta

Moltiplica 6 per 8, fa 48. Scrivi 8 sotto i numeri e tieni 4. Poi moltiplica in croce dicendo 4 per 6 fa 24 e 5 per 5 fa 40. Addiziona 24 con 40 che fa 64, aggiungi 4 e ottieni 68, scrivi 8 e tieni 6. Poi moltiplica decina con decina dicendo 4 per 5 fa 20 e 6 fa 26. Scrivi tutto in ordine e fa 2688. In questo modo potrai fare ogni altra crocetta.

Se vuoi fare la prova scrivi la crocetta così:

				5	6		2
				4	8		3
2	6	8	8				6

Somma 5 e 6 che fa 11, leva 9, rimane 2. Scrivilo accanto. Poi somma 4 e 8 che fa 12, leva 9, rimane 3; scrivilo accanto. Poi moltiplica 2 per 3 che fa 6; scrivilo accanto al risultato. Ora somma 2+6 che fa 8, 8 più 8 che fa 16 e ancora 8 che fa 24. Poi somma 2 e 4 che fa 6 e il risultato è corretto. In questo modo potrai provare ogni altra crocetta.

[...]

Spiegato il modo di moltiplicare per crocetta impara a moltiplicare per scacchiera che è utile quando hai da moltiplicare numeri di almeno due cifre con numeri di almeno tre cifre.

[...]

Se qualcuno ti domandasse quanto fa 24 per 829, moltiplica prima 4 per 829 che fa 3316. Poi moltiplica 2 per 829. Scrivi 8 sotto la decina, scrivi il 5 a sinistra, il 16 ancora a sinistra ed è fatta. Scrivi così:

[...]

Somma i numeri che hai incolonnato.

[...]

Se vuoi fare la prova scrivi la tua scacchiera così:

					8	2	9		1
						2	4		6
					3	3	1	6	
					1	6	5	8	8
					1	9	8	9	6

Per la prova fai così: 8 più 2 fa 10, leva 0 e tieni 1, scrivilo accanto. 2 più 4 fa 6, scrivilo accanto. Poi moltiplica 1 per 6 e scrivilo in basso accanto al risultato. Se la somma delle cifre [del prodotto] darà 6 andrà bene. Prova dicendo: 1 e 8 fa 9, che è 0, rimane dunque 6.

[...]

Per brevità dico che ci sono due modi per dividere: per colonna e per battello. In qualunque modo tu debba dividere devi sempre cominciare dal numero maggiore che si trova a sinistra e venire verso destra. Ti avverto che puoi dividere per battello quello che puoi dividere per colonna ma per comodità schiva il battello quando puoi.

[...]

Dividi 7624 per 2. Scrivi così:

Il divisore 2	7	6	2	4	0 resto
La parte	3	8	1	2	

Guarda quante volte il tuo divisore 2 sta nel 7 dicendo: 2 in 7 sta 3 volte. Scrivi 3 sotto il 7, avanza 1 che metti vicino al 6 e diventa 16 e di 2 nel 16 sta 8 volte. Scrivilo sotto il 6, poi di 2 nel 2 sta una volta, scrivilo sotto il 2. Poi di 2 in 4 sta 2 volte; scrivilo sotto il 4 e il resto 0 è da scrivere fuori dalla riga. Sicché la parte ammonta a 3812. Se vuoi fare la prova, per maggior sicurezza, devi moltiplicare la parte per il divisore, se otterrai il primo numero è corretta.

Se vuoi fare la prova del 9, metti 2 nella crocetta in basso a sinistra, poi somma le cifre della parte che dà 5 e scrivilo sopra il 2. Quindi fai la somma delle cifre del resto che è 0 e scrivilo a destra del 5. Adesso moltiplica 5 per 2 che fa 10, aggiungi il resto e rimane 10. Leva lo 0, rimane 1 da scrivere sotto a destra. Poi guarda se la somma delle cifre del numero che dividi dà 1, in tal caso è corretta.

5	0
2	1

[...]

la moltiplicazione prova la divisione e la divisione la moltiplicazione [...]

9	2	7	9	
			8	
7	4	2	3	2

Dividi 74232 per 8. Se la parte sarà 9279, avrai provato un'operazione con l'altra. Scrivi così:

Il divisore 8 7 4 2 3 2 | 0 il resto

la parte 9 2 7 9 |

poi guarda il tuo divisore che è 8 e di 8 in 7 non ci sta, prendi dunque 7 e 4 insieme e di 8 nel 74 ci sta 9 volte, scrivi 9 sotto il 4 e avanza 2, con l'altro 2 fa 22; 8 in 22 sta 2 volte, scrivilo sotto il 2, avanza 6 che con il 3 fa 63; 8 in 62 sta 7 volte e avanza 7, con il 2 fa 72, 8 in 72 sta 9 volte.

[...]

Prova del 9:

dividendo	0	0	resto
divisore	8	0	8·0+0

Spiegato il primo modo di dividere per colonna, stai attento al secondo modo che è un po' più difficile. Quando inizierai a dividere in questo modo devi aver ben capito il primo, oltre che la moltiplicazione e la sottrazione che servono a questa operazione. In due esempi ti darò da dividere per battello quello che si può dividere per colonna perché tu possa comprendere meglio.

[...]

Se volessi dividere 825 per 2, scrivi così:

$$\begin{array}{r} 8 \quad 2 \quad 5 \quad | \quad 4 \\ 2 \end{array}$$

[...]

$$\begin{array}{r} 8 \quad 2 \quad 5 \quad | \quad 4 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \end{array}$$

[...]

$$\begin{array}{r} 8 \quad 2 \quad 5 \quad | \quad 4 \quad 1 \quad 2 \\ 2 \quad 2 \quad 2 \end{array}$$

[...]

$$\begin{array}{r} \\ 8 \quad 2 \quad 5 \quad | \quad 4 \quad 1 \quad 2 \\ 2 \quad 2 \quad 2 \end{array}$$

Ed è conclusa. Quindi rispondi che dividendo 825 per 2 si ottiene 412.

Nella divisione per battello, quindi, il divisore (in questo caso 2) viene ripetuto tante volte quanti sono i passaggi della divisione, come si può vedere anche nell'esempio seguente in cui è richiesto di dividere 9065 per 8:

Rispondi dunque che dividendo 9065 per 8 si ottiene $1133 \frac{1}{8}$ come vedi qui

$$\begin{array}{r} + \quad 2 \quad 2 \quad 1 \\ 9 \quad 0 \quad 6 \quad 5 \\ 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \end{array} \Bigg|$$

1 1 3 3

Il resto della divisione è 1 (cifra non barrata, sopra le unità del dividendo):

$$\frac{9065}{8} = 1133 + \frac{1}{8}$$

[...]

A Treviso :: A dì 10 Dicembre :: 1478

LABORATORI PER LA SCUOLA PRIMARIA DA *LARTE DE LABBACHO*

Le attività qui di seguito proposte sono adatte ad essere svolte con modalità laboratoriale. Esse sono a carattere interdisciplinare: fanno riferimento al contenuto matematico e all'indagine storica, coinvolgono l'educazione linguistica, richiedono la manipolazione di materiale e l'utilizzo di strumenti nella realizzazione di oggetti, di dispositivi, di costumi e scenografie... Riteniamo importante che l'insegnante utilizzi il più possibile l'originale (il brano tratto dalla fonte con la traduzione a fianco): le attività qui presentate sono finalizzate proprio all'utilizzo del documento e ad esso si riferiscono costantemente. In tutte le attività si chiederà agli alunni di riflettere, di dare un loro parere, di congetturare: queste saranno le motivazioni principali delle esperienze realizzate in classe. Il contenuto matematico non avrà un ruolo esclusivo ma si collocherà in un contesto complesso, all'interno del quale ritroverà nuovi significati. Anche la richiesta di interpretazione del documento sarà tesa a stimolare la formulazione di congetture, all'esplicitazione di osservazioni personali e all'espressione di domande come quella di Anna (pseudonimo) "la prova delle operazioni funziona solo perché usiamo numeri che contengono la cifra 9?".

Le attività sono indicate per alunni della scuola primaria, a partire dalla classe terza, anche se, sicuramente, alcune parti potranno essere utilizzate pure nei primi due anni. *Larte de labbacho* fornirà lo spunto per esercitazioni di consolidamento delle abilità aritmetiche: si potrà chiedere agli alunni di fare la prova delle operazioni con vari altri esempi, oltre a quelli riportati dalla fonte (con due o più termini, con numeri di una, due, tre... cifre e così via). Anzitutto all'insegnante, ma poi anche all'alunno, il confronto fra le nostre tecniche delle operazioni e quelle antiche suggerirà la ricerca di analogie e differenze. Attraverso questo confronto si potranno mettere in evidenza le proprietà matematiche utilizzate (la proprietà distributiva, in primo luogo). Se l'alunno avrà già conosciuto solo testimonianze e documenti del passato storico recente (il racconto di un nonno, una mostra di vecchie foto ecc.), *Larte de labbacho* gli offrirà un importante allargamento temporale. All'insegnante darà lo stimolo a ricercare le migliori modalità per far conoscere all'allievo alcune caratteristiche del periodo nel quale il volume è stato realizzato. Risulterà particolarmente significativo entrare in contatto con documenti storici riguardanti non solo le vicende delle persone ma anche, appunto, una disciplina come la matematica. L'alunno capirà perché nel Quattrocento ci fosse bisogno di diffondere la conoscenza dell'aritmetica attraverso un testo come questo.

Durante la realizzazione del lavoro, l'insegnante cercherà di creare un'atmosfera di attesa da parte degli alunni, di curiosità per qualcosa di insolito, per attività di diverso tipo che in momenti precedenti del lavoro in classe non avrebbero trovato modo di far parte di un unico itinerario didattico a carattere interdisciplinare.

Con *Larte de labbacho* i bambini impareranno ad eseguire le operazioni in maniera differente: per dare risalto a questo fatto, potrà essere per loro motivante e coinvolgente recarsi in classi parallele, e parlare, ad esempio, delle “prove” per l’addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione. Oltre che ad esercizi e a situazioni centrate sul contenuto matematico, l’insegnante potrà pensare ad attività di drammatizzazione ad ambientazione storica, alla realizzazione di disegni ecc.

I contenuti matematici presenti nell’opera e da utilizzare per le attività nella scuola primaria sono, in sintesi, i seguenti: la numerazione e il valore posizionale delle cifre; il ruolo di 0 e 1; i numeri naturali, anzitutto quelli minori di 10; i multipli di 10, di 100 ecc.; la tecnica delle quattro operazioni; le varie prove (prova del 9, addizione come prova della sottrazione e viceversa, moltiplicazione come prova della divisione e viceversa, ‘dividendo=quoziente·divisore+resto’); la proprietà commutativa della moltiplicazione e dell’addizione; le diverse unità monetarie.

PROPOSTE PER I LABORATORI

a. Chi l’avrà scritto?

L’insegnante presenterà agli alunni l’intera opera, ad esempio proiettando e facendo scorrere rapidamente le diverse pagine. Alla classe divisa in gruppi di tre/quattro alunni, poi, consegnerà le prime righe de *Larte de labbacho* e chiederà loro di scrivere delle congetture riguardanti: quello che è il tema trattato nell’opera, l’autore, il periodo storico, le persone per cui è stato scritto. Sceglierà eventuali facilitazioni.

Incommincia vna practica molto bona et utile:
a ciascaduno chi vuole vpare larte dela mercha
dantia.chiamata vulgarmente larte de labbacho.

L’insegnante raccoglierà le risposte facendole leggere a un rappresentante per gruppo e avviando una discussione sulla loro attendibilità. Gli alunni potranno controllare la bontà delle loro risposte dopo che l’insegnante li avrà aiutati ad interpretare le righe successive del documento:

dargli in scrutto qũalche fundamẽto
cerca larte de arismetrica:chiamata vulgarmente
labbacho.

b. Non è un'altra lingua!

In un passo de *Larte de labbacho*, gli alunni individueranno anzitutto parole della matematica o simboli noti. Ciò costituirà l’inizio dell’interpretazione. Potranno poi ricavare dal contesto il significato di termini desueti come “Iongere”, “Partire” ecc.

Qui presentiamo un esempio di passo originale con a fronte la sua trascrizione e con brevissime note.

a Echiato del primo atto. 3oe. numeratione cominciaremo trattare de li altri quatro atti per ordine. 3oe. Iongere. Cauare. Multiplicare. e Partire. E per differētia de questi atti: intēdi bene. che ciaschadun di loro ha vno suo speciale articulo. 3oe.

Iongere ha per suo articulo	et.
Cauare ha per suo articulo	de.
Multiplicare ha per suo articulo	fia.
Partire ha per suo articulo	in.

Auifando te per questo: che togliando do numeri li quali al meno sono necessari in ciaschaduno de questi atti. e comandato per quelli medeximi numeri singularmēte cadauno de li sopraditti atti: veramente nascera diuersi numeri. excetto quādo tu multiplicara. 2. per. 2. che i quella volta: nascera vna medesima cosa col iongere. come a dire. 2. fia. 2. fa. 4. et a dire. 2. e. 2. fa. 4. Togliando adoncha. 3. e 9. e digando

Ionge: di	3	et	9	fa	i 2
Caua: di	3	de	9	resta	6
Multiplica: di	3	fia	9	fa	27
Parti: di	3	in	9	intra	3

Ecco. come diuersi atti per li soi diuersi articuli: fano nascere diuersi numeri.

d Echiato del primo atto. 3oe. numeratione cominciaremo trattare de li altri quatro atti per ordine. 3oe. longere. Cavare. Multiplicare. e Partire. E per differenza de questi atti: intēdi bene. che ciascadun di loro ha uno suo speciale articulo. 3oe.

longere ha per suo articulo	et.
Cavare ha per suo articulo	de.
Multiplicare ha per suo articulo	fia.
Partire ha per suo articulo	in.

Avisando te per questo: che togliando⁶ do numeri li quali al meno sono necessari in ciaschaduno de questi atti. e comandato⁷ per quelli medeximi numeri singularmente cadauno de li sopraditti atti: veramente nascera diversi numeri. excetto quando tu multiplicara. 2. per. 2. che in quella volta: nascera una medesima cosa col iongere. come a dire. 2.fia.2.fia.4. et a dire. 2.e.2.fia.4. Togliando adoncha. 3. e. 9. e disando

longe: di	3	et	9	fa	12
Cava: di	3	de	9	resta	6
Multiplica: di	3	de	9	fa	27
Parti: di	3	in	9	intra	3

Ecco come diversi atti per li soi diversi articuli: fano nascere diversi numeri.

⁶ Prendendo.

⁷ Scelto.

c. Salvo per miracolo

L'insegnante consegnerà agli alunni divisi in gruppi la riproduzione incompleta della tabella sulla moltiplicazione presente alla terza pagina del volume "danneggiata da un incendio scoppiato quando un mercante, al lume di candela, stava..." (dunque una storia che non risulta nell'originale ma che gli alunni assieme all'insegnante potranno immaginare).

1	fia			
2	fia			
3	fia			
4	fia	6	fa	6
5	fia	7	fa	7
6	fia	8	fa	8
7	fia	9	fa	9
8	fia	0	fa	0
9	fia			
10	fia	10	fa	10
20	fia	10	fa	20
30	fia	10	fa	30
40	fia	10	fa	40
50	fia	10	fa	50
60	fia	10	fa	60
70	fia		fa	70
80				0
90				
100		100	fa	100
200		100	fa	200
300		100	fa	300
400				
500				
600				
700				

L'insegnante chiederà ai bambini di ricostruire la parte distrutta. Con una riflessione supplementare, potrà condurli a capire che la tabella potrebbe proseguire con la moltiplicazione per 1 000. Utilizzando la stessa tabella, sarà possibile impostare un altro tipo di attività: la si potrà tagliare e consegnare ai bambini chiedendo loro di ricomporre il puzzle.

Si chiederà di leggere qualche numero presente nella tabella. Eventualmente si potranno guidare gli alunni a costruirne una alternativa, come la seguente nella quale è indicato il numero 704:

[illegible]

f. Calcoliamo come 550 anni fa

Per quanto riguarda le operazioni, si potranno far confrontare agli alunni le tecniche di esecuzione proposte ne *Larte de labbacho* e quelle da loro conosciute. Si potranno impostare attività di gruppo in cui gli alunni consolideranno le loro abilità nell'eseguire in modo diverso una stessa operazione: quella che si presta maggiormente è forse la moltiplicazione (a “colonna”, “crocetta”, “scacchiera”).

Si potrà anche arrivare ad organizzare dei piccoli tornei. I diversi gruppi - della stessa classe o di classi parallele - si confronteranno per quanto riguarda la velocità di esecuzione, utilizzando la tecnica moderna. In un secondo momento si affronteranno con la “crocetta” e poi con la “scacchiera”. I tre gruppi vincitori si potranno poi confrontare fra di loro utilizzando la tecnica nella quale sono risultati i più veloci (ovviamente potrà avvenire che uno stesso gruppo primeggi in più occasioni oppure che si voglia coinvolgere tutta la classe: allora l’insegnante farà le scelte che riterrà opportune). Potrà succedere che alla fine risulti più veloce chi ha usato la tecnica della “scacchiera”, come già è accaduto in alcune esperienze svolte in classe.

g. Nei panni del mercante

La bottega del mercante è fornita di ogni genere di merci che provengono anche da paesi lontani. Con l'insegnante di storia verranno recuperate notizie sugli scambi commerciali nel tardo Medioevo. Gli alunni simuleranno pagamenti con la moneta il cui nome sia stato ricavato dall'incunabolo oppure inventato dai bambini. Verrà assegnato un valore uguale a quello dell'euro, riferendosi al suo potere d'acquisto e a particolari beni che il mercante ha nella sua bottega, o un valore diverso, scelto ad arbitrio ma motivando i criteri di scelta adottati. Invece di utilizzare i centesimi, dal punto di vista matematico potrà essere interessante recuperare da *Larte de labbacho* che una "lira" vale 20 "soldi" e un "soldo" vale 12 "pizoli".

h. Sono io il maestro!

In quest'attività di laboratorio, un riadattamento delle prime pagine de *L'arte de labbacho* potrà dar luogo ad un racconto e ad una piccola esperienza di drammatizzazione in cui un alunno si atteggerà a “maestro”, a imitazione dell'anonimo autore. L'insegnante potrà elaborare un testo per ciascuno dei gruppi: si veda lo spunto seguente.

Eccoci dunque alla numerazione. Ciascun numero sarà rappresentato usando alcuni simboli scelti fra le dieci figure, o meglio cifre, che sono [*e scrive alla lavagna o mostra un cartello precedentemente preparato*]:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0.

Fra di esse, la prima cifra, cioè 1, non la chiamo “numero”, come fate voi nel Duemila, ma “principio dei numeri”.

La decima cifra, cioè 0, la chiamo anch'io “cifra”, come voi! Pensate che la parola “cifra” l'hanno insegnata gli arabi ad un mio maestro che è vissuto più di 200 anni fa e che si chiamava Leonardo Pisano.

All'interno di ciascun gruppo, un bambino verrà scelto per impersonare il “maestro” mentre gli altri lo aiuteranno ad imparare la “parte” e poi fungeranno da suggeritori. Agli alunni si potrà fornire anche qualche capo di abbigliamento confacente all'epoca nella quale l'opera è stata scritta. Osserviamo che l'esposizione alla classe diventerà un effettivo momento di “lezione” dato che solo i bambini del gruppo di coloro che stanno esponendo conosceranno preventivamente quanto verrà detto.

PARTE SECONDA

PER LA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO E SECONDO GRADO

I successivi Capitoli fanno riferimento alle Attività comprese nel Volume per l'alunno

FARE MATEMATICA CON I DOCUMENTI STORICI

Una raccolta
per la scuola secondaria
di primo e secondo grado

a cura di **Adriano Demattè**
presentazione di **Fulvia Furinghetti**

CAPITOLO 1

Dall'aritmetica all'algebra

SISTEMI DI NUMERAZIONE

Per il tema trattato, le attività si prestano ad essere affrontate nella secondaria di primo grado. Hanno anche interesse per la secondaria di secondo grado poiché offrono la possibilità di raccordi interdisciplinari e di approfondimenti legati, ad esempio, alla scrittura polinomiale dei numeri nel sistema posizionale (in base dieci o due).

Egizi

La numerazione geroglifica è frequentemente citata nei testi scolastici. Per chi voglia riprodurre con cura i caratteri egiziani segnaliamo il sito <https://discoveringegypt.com/egyptian-hieroglyphic-writing/egyptian-mathematics-numbers-hieroglyphs/>.

In un primo momento, il documento potrà essere consegnato agli alunni accompagnato dalla richiesta di osservarlo per individuare dove sono riportati dei numeri. In un secondo tempo verrà consegnato il testo del problema in versione italiana che è riportato di seguito all'originale in geroglifico: ciò potrà costituire un decisivo indizio per l'interpretazione e per consentire agli alunni di risalire al valore di ciascun simbolo egizio. Qualche alunno scoprirà anche un errore presente nella scrittura di 2 401 (cioè 7⁴): manca, infatti, una corda arrotolata.

Il numero 7 è scritto con 7 aste verticali; 49 con 4 manici di cestini e 9 aste verticali; 343 con 3 corde arrotolate, 4 manici di cestini e 3 aste verticali; 2 401 andrebbe scritto con 2 fiori di loto che stanno sbocciando sul loro stelo, 4 corde arrotolate e un'asta verticale; 16 807 è scritto con un dito teso e l'ultima falange ripiegata, 6 fiori di loto che stanno sbocciando sul loro stelo, 8 corde arrotolate e 7 aste verticali; il totale richiesto dal problema, 19 607, è indicato con un dito teso e l'ultima falange ripiegata, 9 fiori di loto che stanno sbocciando sul loro stelo, 6 corde arrotolate e 7 aste verticali. Sarà facile trascrivere in geroglifico il numero 12 345: un dito teso con l'ultima falange ripiegata, 2 fiori di loto che stanno sbocciando sul loro stelo, 3 corde arrotolate, 4 manici di cestino e 5 aste verticali.

Babilonesi

L'informazione presente in calce al documento ("moltiplicazione per 9") sarà, presumibilmente, decisiva per l'interpretazione.

La tavoletta riporta i valori numerici ripartiti in due colonne. Nella prima, dall'alto in basso, compaiono i numeri naturali da 1 a 14: gli alunni potranno rilevare il diverso valore dei simboli (l'unità è indicata con il punzone, la decina con il cuneo). Nella colonna di destra, corrispondentemente, compaiono i multipli di 9. Il fatto che la tavoletta riporti vari segni dovuti agli effetti del tempo ed alla non perfetta qualità della riproduzione rischia di scoraggiare alcuni alunni, ma nel contempo rende l'analisi del documento più vicina a quello che fa l'archeologo, al suo lavoro di decifrazione.

Gli alunni incapperanno nella prima difficoltà quando dovranno rintracciare il numero 63, il primo dei multipli di 9 maggiore di 60: esso è indicato con quattro punzoni, uno dei quali però è distanziato rispetto agli altri. Nelle attività di interpretazione del documento, agli alunni è suggerito che il punzone isolato indica una "sessantina". 72 è rappresentato con un punzone, un cuneo e due punzoni; 81 con un punzone, due cunei e un punzone ecc. Non potrà sfuggire il collegamento con il tema delle unità di misura delle durate temporali e da esso potranno trarre ispirazione gli esercizi che è richiesto agli alunni di inventare.

Greci

Il documento greco è più impegnativo per il fatto che i simboli da individuare sono in numero maggiore; inoltre, le abrasioni del documento compromettono in qualche caso la lettura. Risulterà quasi indispensabile che gli alunni si confrontino con le lettere dell'alfabeto greco riportate nel contesto delle attività di interpretazione.

I ragazzi noteranno l'assenza del simbolo di moltiplicazione come pure del simbolo di uguaglianza e dello zero; scopriranno simboli speciali per le decine.

Romani

È interessante notare come nell'abaco dei Romani le diverse colonne corrispondessero a potenze di 10, mentre si sa che nella loro scrittura dei numeri compaiono simboli specifici anche per: 5 (V), 50 (L), 500 (D). In effetti, l'utilizzo degli scomparti in alto riprende questo aspetto.

Nella parte di abaco evidenziata con un bordo continuo è rappresentato il numero 2 390 298.

Il numero 2 005 viene rappresentato così:

						•
M	C	X	M	C	X	I
			•			
			•			

Maya

L'interpretazione del documento viene facilitata da una tabella che, da un lato aiuta l'individuazione dei simboli, dall'altro consente di risalire al valore del punto (uno) e della barretta orizzontale (cinque).

$$B = 16 \cdot 360 + 4 \cdot 20 + 0 = 5\,840;$$

$$C = 1 \cdot 7\,200 + 4 \cdot 360 + 6 \cdot 20 + 0 = 8\,760;$$

$$D = 1 \cdot 7\,200 + 12 \cdot 360 + 8 \cdot 20 + 0 = 11\,680;$$

$$E = 2 \cdot 7\,200 + 0 \cdot 360 + 10 \cdot 20 + 0 = 14\,600;$$

$$F = 2 \cdot 7\,200 + 8 \cdot 360 + 12 \cdot 20 + 0 = 17\,520;$$

$$G = 2 \cdot 7\,200 + 16 \cdot 360 + 14 \cdot 20 + 0 = 20\,440;$$

$$H = 3 \cdot 7\,200 + 4 \cdot 360 + 16 \cdot 20 + 0 = 23\,360;$$

$$I = 3 \cdot 7\,200 + 13 \cdot 360 + 0 \cdot 20 + 0 = 26\,280;$$

$$J = 4 \cdot 7\,200 + 1 \cdot 360 + 2 \cdot 20 + 0 = 29\,200;$$

$$K = 4 \cdot 7\,200 + 9 \cdot 360 + 4 \cdot 20 + 0 = 32\,120;$$

$$L = 4 \cdot 7\,200 + 17 \cdot 360 + 6 \cdot 20 + 0 = 35\,040.$$

I valori consecutivi così trovati differiscono di 2 920.

Per rispondere all'ultimo quesito di interpretazione del documento, l'alunno osserverà che quasi tutti i numeri interi da 0 a 19 sono presenti nel documento e non dovrà fare altro che ricopiarli; non avrà difficoltà a ricostruire quelli mancanti.

Finalmente gli Indiani!

La grande conquista degli Indiani è stata quella di aver costruito un sistema di numerazione posizionale in base dieci.

La numerazione egizia consentiva di scrivere uno stesso numero in più modi, mettendo i simboli in ordine diverso: non c'era pericolo di ambiguità in quanto ciascun simbolo conservava il proprio valore indipendentemente dalla posizione occupata.

Nella numerazione babilonese si è visto che, a seconda della posizione, i simboli assumevano un valore diverso; però, mancando lo zero, si andava incontro ad ambiguità: come si poteva capire se, ad esempio, due punzoni   indicavano il numero 2 oppure il 61?

I Maya avevano un simbolo per lo zero, però per quanto riguarda la posizionalità non avevano trovato una soluzione soddisfacente: utilizzavano esclusivamente la prima posizione (dal basso) per rappresentare i primi venti numeri naturali, ogni unità del secondo ordine valeva 20, ogni unità del terzo 360, del quarto 7 200. A volte si trova scritto che i Maya utilizzavano la base venti ed in effetti ciò è abbastanza vicino al vero se non ci fosse il numero “intruso” 360 che vale solo approssimativamente quanto la seconda potenza di 20, cioè 400; 7 200 è poi uguale a $360 \cdot 20$.

Gli Indiani, invece, hanno introdotto dieci simboli; le unità di ordine superiore valgono quanto le successive potenze di 10; diventa possibile fare i calcoli scritti che portano all'abbandono dell'abaco.

Agli alunni è richiesto di fare le loro **ipotesi** riguardo alle diversità nei vari sistemi di numerazione. Una risposta parziale la possono dare rivedendo quanto fatto in precedenza (ad esempio, il riferimento alle pratiche astronomiche dei Maya e dei Babilonesi e alla durata dell'anno). Come sempre avviene in questo tipo di attività basate sulla formulazione di ipotesi, è sostanzialmente impossibile arrivare ad una risposta globale, certa e documentata (che talvolta nemmeno gli storici professionisti sono in grado di dare): l'importante è che gli alunni siano stimolati a ricercare collegamenti, analogie e differenze fra le varie parti di quanto hanno studiato.

L'insegnante, con riferimento alle diverse parti (dagli Egizi ai Maya), potrà proporre agli alunni delle attività supplementari, ad esempio: svolgere operazioni tra numeri espressi in un dato sistema di numerazione senza risalire al nostro; scrivere le tabelline delle moltiplicazioni riflettendo su quali dovranno essere le loro dimensioni; stabilire in quanti modi si può scrivere un dato numero nella rappresentazione egizia; indicare, oltre a 2 e 61, quali altri numeri si possono indicare allo stesso modo nella rappresentazione babilonese ecc.

Chi ha inventato il sistema binario?

Il sistema di numerazione posizionale in base due utilizza solo i simboli 0 e 1: con ciò si realizza una bella economia, se non fosse che la lunghezza delle scritture dei numeri aumenta rapidamente.

Nel suo medaglione, Leibniz contrassegna con un asterisco le potenze di 2 (10, 100, 1000, 10000 *in base due*). Dopo il numero 16, Leibniz avrebbe contrassegnato il numero 32 cioè 100000 *in base due*.

Agli alunni è richiesto come approfondimento di scrivere altri numeri in base due. Ovviamente risulteranno facilitati coloro che abbiano già affrontato in precedenza il sistema binario, ma non è escluso che qualcuno saprà fare l'esercizio solo grazie all'interpretazione del documento.

OPERAZIONI CON I NUMERI NATURALI

Con i sistemi di numerazione antichi era difficoltoso fare calcoli scritti. Il sistema posizionale in base dieci degli Indiani sembra che fosse già sviluppato nel VI secolo d.C. e le nuove opportunità da esso fornite risiedevano appunto nella facilità dei calcoli scritti, con la conseguente possibilità di rivederli e correggere eventuali errori. Ciò divenne di grande aiuto per gli scambi commerciali in epoca tardo medievale e rinascimentale.

Fra Medioevo e Rinascimento

Attraverso gli scritti di quattro autori diversi, vengono riportati esempi di calcolo della somma, della differenza, del prodotto, del quoziente. In particolare per quanto riguarda le ultime due, altre tecniche erano utilizzate nel Medioevo e nel Rinascimento.

Molti insegnanti hanno la consuetudine di riprendere all'inizio della secondaria di primo grado le tecniche delle cosiddette quattro operazioni elementari. Gli esempi qui riportati sono in linea con la proposta didattica di ricercare un maggiore coinvolgimento degli alunni proponendo tecniche nuove, diverse da quelle già note, ma imperniate sulle stesse proprietà matematiche. La rilevanza del tema degli algoritmi di calcolo rende comunque il materiale utile per attività complementari anche nella secondaria di secondo grado.

I testi che accompagnano i calcoli possono creare difficoltà agli alunni più giovani e quindi potrà essere necessario che l'insegnante intervenga guidandoli sistematicamente. Agli studenti più maturi i documenti forniscono interessanti esempi di testi non letterari in lingua italiana.

Nel caso del documento di Fibonacci, agli alunni è richiesto di riflettere sul loro modo di eseguire le addizioni, ed in particolare sulla fase dell'incolonnamento dei numeri. Essi dovranno pure notare il fatto che il risultato è riportato in alto.

Per la sottrazione viene riportata anzitutto copia di una pagina della prima edizione dell'originale, corredata da una trascrizione in italiano attuale. "Or sia tolto un exempio zoe cava 348 da 452 e metti le toe poste in forma cosi..."; in questo modo inizia il documento: si dovrà osservare quali lettere non sono scritte con la grafia attuale, se si desidera proseguire con la lettura della pagina originale.

Il secondo dei quesiti di interpretazione del documento mette in luce un aspetto caratteristico della tecnica illustrata dall'anonimo autore. Nell'esempio riportato, invece di dire '8 al 12' (utilizzando il prestito) egli specifica: "8 e 2 fa 10, più l'altro 2

[...] fa 4". Si tratta di una strategia di calcolo mentale da tenere in considerazione per eventuali casi di alunni con difficoltà nella sottrazione.

Il brano sulla moltiplicazione "per gelosia", detta pure "per graticola", a tratti tende ad essere oscuro a causa dell'uso di termini desueti. Anche una comprensione frammentaria, tuttavia, può essere sufficiente per l'interpretazione della successiva tabella con l'esempio numerico. Se l'alunno riuscirà a vincere la propria ritrosia a cimentarsi con un testo a prima vista ostico, potrà realizzare una significativa esperienza di lettura selettiva: oltre ai simboli numerici, individuerà delle parole chiave, come ad esempio quelle che indicano l'operazione da fare di volta in volta. Le successive attività di interpretazione, ad ogni buon conto, riprendono alcune fasi del calcolo.

Analoghe considerazioni valgono per il successivo caso della divisione. Per la complessità dell'algoritmo, però, questo documento va destinato ad attività di approfondimento. Comunque, la prima delle attività di interpretazione ripropone i singoli passi dell'esempio di Gori. Da essa l'alunno può ricavare il resto (4). Interessante è la forma nella quale l'autore riporta il risultato, invero insolita per i nostri alunni abituati a lavorare con i numeri decimali (ricordiamo che essi sono entrati nell'uso comune successivamente al XVI secolo). La prova richiede il calcolo con le frazioni: il metodo per noi usuale, riportato subito dopo, consente di evitare questa difficoltà agli alunni che non conoscono il calcolo con le frazioni.

Fonti dei documenti

Le tecniche per eseguire l'addizione, la moltiplicazione e la divisione sono tratte da Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, p. 22, pp. 25-6, pp. 28-9; la sottrazione è tratta dall'edizione del 1478 de *Larte de labbacho*.

NON SOLO NUMERI NATURALI

L'uomo ha iniziato molto presto a utilizzare le frazioni, molto prima, ad esempio, dei numeri interi negativi. Le frazioni nascono da situazioni concrete, da problemi di vita pratica. Va comunque evidenziato come storicamente il loro uso indichi una matematica evoluta, che procede verso un repertorio di conoscenze teoriche che travalicano le esigenze legate alle applicazioni pratiche. È appunto il caso della matematica egizia.

Si può operare con le frazioni tramite modelli visivi (segmenti, ‘torte’,...) e nei casi più semplici si può prescindere dagli algoritmi di calcolo. Per l’alunno, l’idea di operare facendo leva sui significati accantonando il più possibile gli aspetti formali può essere recuperata anche attraverso le attività tratte dalla storia proposte in questa ed in altre parti del volume.

Frazioni in Egitto: l’occhio del dio Horus

Nei documenti presentati, realtà e leggenda si intrecciano. Gli esercizi sulle frazioni che tradizionalmente appaiono nei libri di testo tendono da un lato ad essere ripetitivi e non in grado di fornire agli alunni approcci alternativi e diversificati, dall’altro a richiedere prestazioni che molti alunni non sono in grado di fornire (nei cosiddetti ‘problemi con le frazioni’, ad esempio). Una situazione storica fornisce un contesto più ricco, in cui l’ eseguire la somma di frazioni può trovare nuove motivazioni, come nel caso dell’occhio del dio Horus.

Come indicavano le frazioni in Egitto

Il documento ha un’impostazione anomala rispetto agli altri di questo volume. Dell’originale è stata riportata solo la scrittura delle frazioni ed è stato inserito un testo che fornisce anche gli elementi per l’interpretazione.

Sono anzitutto rappresentate le frazioni $1/3$, $1/5$, $1/6$, $1/10$, $1/100$. Poi, come somma di frazioni unitarie, $47/60$ e $3/5$.

Nei quesiti 4 e 5:

$$3/4 = 1/2 + 1/4$$

$$2/3 = 4/6 = 3/6 + 1/6 = 1/2 + 1/6$$

$$4/7 = 8/14 = 1/14 + 7/14 = 1/14 + 1/2$$

$$5/8 = 4/8 + 1/8 = 1/2 + 1/8$$

I numeri decimali e gli Arabi

Le attività di interpretazione ripropongono i calcoli indicati nel documento. Viene così contestualmente chiarita la frase d’esordio del brano (“sommare 135 col suo decimo cinque volte”) che suggerirebbe un procedimento diverso da quello che poi l’autore mostra con gli esempi numerici. Si noti dove viene collocata la virgola.

Il documento appare un’esercitazione di calcolo avulsa da riferimenti concreti che tuttavia coinvolge abilità rilevanti: dividere per 10, individuare il valore posizionale delle cifre, incolonnare.

I numeri decimali in Europa

I numeri decimali, con virgola, hanno costituito un bel vantaggio dal punto di vista del calcolo rispetto alle frazioni, anche se hanno prodotto nuovi problemi matematici, in primo luogo quello appunto del passaggio alla scrittura frazionaria, e viceversa.

L'analisi del brano presentato richiede varie abilità aritmetiche. Si ritiene che all'insegnante valga la pena dedicare il tempo necessario ad un lavoro curato per richiamare queste abilità in contesto storico e in forma integrata.

Relativamente ai quesiti di interpretazione del documento, nel primo:

$$3 \text{ ① } 7 \text{ ② } 5 \text{ ③ } 9 \text{ ④ } = 0,3759;$$

$$\text{nel secondo: } 8,937 = 8 \text{ ① } 9 \text{ ② } 3 \text{ ③ } 7 \text{ ④};$$

$$\text{nel terzo: } 3/10 + 7/100 + 5/1000 + 9/10000 = 0,3759;$$

$$\text{nel quarto: } 7/10 + 12/100 = 8/10 + 2/100$$

$$\text{Relativamente all'esercizio 5, parte a): } 5,678 = 5 \text{ ① } 6 \text{ ② } 7 \text{ ③ } 8 \text{ ④}.$$

Il successivo quesito richiede una spiegazione che l'insegnante potrà far produrre in un lavoro individuale o di gruppo. Per la valutazione terrà in considerazione se gli alunni avranno dimostrato la padronanza dei concetti e dei termini specifici, se avranno esposto una loro ipotesi sulle preconcoscenze del loro interlocutore e se avranno utilizzato i diversi modi di indicare un numero decimale presenti nel documento di Stevin.

Fonti dei documenti

L'occhio di Horus con indicate le frazioni è un disegno di Vincent Levere. I documenti riportati nella parte sui numeri decimali provengono da Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, p. 19 e pp. 52-3.

IL TRIANGOLO ARITMETICO

Il triangolo aritmetico è un oggetto matematico che merita una rivalutazione didattica per gli aspetti storici ad esso connessi e per i contenuti disciplinari ai quali si può collegare.

Cinesi, arabi, europei...

La diversa provenienza delle immagini illustra un fatto storico, vale a dire che alcuni "oggetti matematici" sono apparsi autonomamente in luoghi ed in contesti molto differenti (si vedano in questo volume anche i casi del calcolo differenziale

di Leibniz e Newton e del teorema di Pitagora). Inoltre, il triangolo aritmetico lo si ritrova in ambiti della matematica che hanno altrimenti scarsi elementi di raccordo: ad esempio, in algebra a proposito dello sviluppo delle potenze di un binomio, nel calcolo delle probabilità a proposito delle distribuzioni discrete. Queste considerazioni possono fornire i primi elementi per rispondere all'interrogativo riportato in *Fai le tue ipotesi*: agli studenti sarà richiesto di discutere su personali, ma plausibili, congetture, mentre sarà impossibile giungere ad una risposta certa, considerata la complessità del quesito dal punto di vista dell'analisi storica. Riteniamo che sarà comunque utile aprire una discussione ed un confronto che verranno ad assumere un carattere interdisciplinare, coinvolgendo il tema dei rapporti fra le civiltà e quello dei collegamenti fra le diverse parti della matematica.

Nelle attività di interpretazione dei documenti, ai ragazzi è chiesto di ricavare informazioni per quanto riguarda la numerazione cinese e la scrittura delle cifre nell'originale arabo del Tredicesimo secolo: il compito appare abbastanza agevole, previo un confronto accurato dei diversi documenti. Questo tipo di attività può essere rivolto anche agli alunni della secondaria di primo grado.

Fonti dei documenti

Il triangolo aritmetico come appare nell'opera di Chu Shih-Chieh *Ssu Yuan Yii Chien* e il triangolo aritmetico tratto da un'opera di Ahmad al-Ab'darî ibn Mun'im (1200 d.C. circa) sono riportati in Schwartz, dattiloscritto; il triangolo aritmetico come appare nell'opera di Blaise Pascal *Traité du triangle arithmétique* è tratto da Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, p. 58.

PROBLEMI CURIOSI

Nel capitolo vengono presentati problemi che possono trovare collocazione didattica come attività per lo sviluppo delle abilità logiche. Il contenuto matematico è vario e comunque interessante per approfondimenti, estensioni ed esplorazioni.

Risolviamo assieme

Ciascun problema è seguito da attività di interpretazione ed approfondimento.

Il primo problema viene tradotto con un'uguaglianza. Su di essa l'alunno è chiamato ad operare seguendo le indicazioni dell'Anonimo Lucchese.

I due problemi successivi vengono presentati distanziati dalle soluzioni fornite dagli autori e in prima istanza gli allievi vengono guidati all'interpretazione del testo per giungere ad una soluzione personale.

Nel problema di Paolo dell'Abbaco (del signore e del suo fante), le attività di interpretazione del documento richiedono di recuperare nel testo i dati per risolvere il problema: ciò, ci pare, può essere possibile anche senza una comprensione puntuale di tutti i termini arcaici che compaiono. Si noti come la richiesta di risolvere il problema sia accompagnata da una riformulazione della domanda del problema stesso. Questo può essere risolto con un'unica espressione:

$$((((7+2) \cdot 2+2) \cdot 2)+2) \cdot 2$$

Lo stesso problema può essere risolto anche nella versione “ciascun portinaio vuole metà delle mele più mezza mela, il tutto senza dover mai tagliare nessuna mela”:

$$((7 \cdot 2+1) \cdot 2+1) \cdot 2+1=63$$

Per interpretare il documento e per trovare la soluzione del successivo problema 118 di Paolo dell'Abbaco viene suggerito un approccio fruibile anche nella secondaria di primo grado (diventa praticamente indispensabile l'uso della calcolatrice tascabile). Come approfondimento per la secondaria di secondo grado, si potrà senz'altro pensare a calcolare la somma dei primi n numeri pari servendosi della somma dei primi n numeri naturali (si veda la prima parte del Capitolo 2 di questo volume):

$$2+4+6+8+\dots+2n=2 \cdot (1+2+3+4+\dots+n)=2 \cdot n \cdot (n+1):2=n \cdot (n+1)$$

L'interpretazione della soluzione “misteriosa” di Paolo dell'Abbaco è riferita al fatto che si può scrivere:

$$2 \cdot n \cdot (n+1):2=30n$$

vale a dire, considerando solo la soluzione non nulla:

$$2 \cdot (n+1):2=30$$

che si può risolvere dividendo entrambi i membri per 2, moltiplicandoli per 2 e sottraendo 1. Nel caso in cui il secondo uomo percorresse il primo giorno 3 miglia, il secondo 6, il terzo 9..., si otterrebbe $3+6+9+\dots+3n=3 \cdot (1+2+3+\dots+n)=3 \cdot n \cdot (n+1):2$. La regola di Paolo dell'Abbaco andrebbe modificata dividendo 30 per 3 e moltiplicando per 2, prima di sottrarre 1.

Il gioco dei tre numeri di Filippo Calandri si può interpretare indicando con x , y , z rispettivamente il primo, il secondo ed il terzo numero, semplificando l'espressione $((2x+5) \cdot 5+10+y) \cdot 10+z-350$ e ottenendo la scrittura polinomiale del numero che ha come cifra delle centinaia x , delle decine y , delle unità z .

Altri problemi: il testo

Questa è, invece, una sezione che comprende alcuni quesiti che l'alunno è chiamato ad affrontare mettendosi direttamente alla prova: le soluzioni fornite dagli autori sono riportate nella successiva sezione.

Altri problemi: le soluzioni

Numerose note a piè di pagina aiutano la comprensione del testo dei problemi e della soluzione.

Per la soluzione del problema delle vele si può ragionare pensando che la prima (da sola) in un giorno consentirebbe di fare $\frac{1}{10}$ del viaggio, la seconda $\frac{1}{12}$, la terza $\frac{1}{15}$. Addizionando, otteniamo $\frac{1}{4}$ che è la parte di viaggio fatta in un giorno con le tre vele spiegate. Fra gli approfondimenti relativi al problema delle tazze d'argento possiamo ricordare il sistema di numerazione posizionale in base due e osservare che *7 in base dieci* è uguale a *111 in base due*: $1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 = 7$ (una tazza da 4 onces, una da 2, una da un'oncia).

Fra gli altri problemi di attraversamento riportati da Alcuino, il collaboratore di Carlo Magno autore di una raccolta di quesiti matematici, ricordiamo quello celeberrimo del contadino che doveva portare sull'altra riva, uno per volta, un lupo, una capra e un cavolo senza avere la possibilità di lasciare il lupo con la capra incustoditi e neppure la capra con il cavolo; oppure quello dei due genitori corpulenti e dei loro due figli con a disposizione una barchetta in grado di reggere al più i figli o, in alternativa, un solo genitore.

Il problema del serpente è un'interessante applicazione del calcolo con le frazioni.

La soluzione del problema delle botti, presentata da Domenico Griminelli, non è l'unica possibile: due fratelli potrebbero avere tre botti piene, una mezza e tre vuote e il terzo una piena, cinque mezze e una vuota... In versione quasi del tutto analoga, il problema è presente anche in Alcuino.

I quesiti sono indicati per la secondaria di secondo grado mentre per quella di primo grado l'insegnante dovrà operare una selezione che tenga conto della specifica realtà dei propri alunni e del fatto che alcune attività prevedono un utilizzo piuttosto raffinato del calcolo letterale.

Fonti dei documenti

I problemi sono riportati in Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, pp. 36-44.

NUMERI “FALSI”

Le testimonianze storiche sull'uso dei numeri negativi sono molto antiche. I Babilonesi ci hanno lasciato a più riprese tavolette con riportati numeri negativi. Il titolo *Numeri “falsi”* riprende il termine con il quale Cartesio denominava le radici negative di un'equazione (si veda più avanti in questo capitolo *Dalle parole ai simboli*). I documenti di Bombelli e Agnesi mostrano invece la loro ‘confidenza’ con gli interi, a ulteriore riprova dell'alternanza nell'atteggiamento dei matematici rispetto ai numeri negativi.

Nell'Italia del 500

Il primo brano, tratto dall'edizione del 1579 de *L'Algebra* di Bombelli, si presta ad essere utilizzato anche nella scuola media, pur di osservare alcune accortezze. La trascrizione in lingua corrente non presenta soverchie difficoltà (ma è un atto preliminare irrinunciabile), mentre l'individuazione dei calcoli suggeriti nel brano a mo' d'esempio e la loro scrittura sotto forma di espressioni appaiono un passo più delicato. Sarà opportuno guidare gli alunni a produrre una sintesi del contenuto matematico, riprendendo le loro conoscenze precedenti. Emma Castelnuovo utilizza il brano come presentazione dei numeri interi, in Castelnuovo, 1983a. Lo stesso brano può essere utilizzato per il recupero della abilità di calcolo.

Il successivo documento di Bombelli è solo un richiamo di un fatto matematico ben noto agli alunni e per la sua interpretazione va solo tenuto presente che “via” si può leggere come “volte”.

Una donna alle prese con la matematica

Il brano di Maria Gaetana Agnesi è più impegnativo. Come prodotto di una delle poche donne nella storia della matematica, per una discussione sul loro ruolo nella scienza, forse sarebbe più significativo utilizzarlo nella secondaria di secondo grado. Per lo specifico contenuto disciplinare, è senza dubbio più indicato per la secondaria di primo grado; non appaiono trascurabili le difficoltà linguistiche e ciò suggerisce di utilizzarlo in un lavoro interdisciplinare con l'insegnante di lettere. Nelle attività di interpretazione di questo documento viene richiesto all'alunno di richiamare, anche con l'uso del libro di testo, quanto fatto in precedenza con i numeri interi (relativi).

Fonti dei documenti

Il brano di Agnesi è tratto da Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, pp. 191-2.

DALLE PAROLE AI SIMBOLI

Si propone un itinerario rivolto ai primi anni della secondaria superiore; solo alcune piccole parti (quelle riguardanti le equazioni di primo grado) appaiono indicate per gli alunni della secondaria di primo grado.

Un grande matematico arabo

Il grande matematico è al-Khuwarizmi, dal cui nome deriva il termine *algoritmo*.

L'utilizzo didattico di questi brani ha da una parte motivazioni legate alla conoscenza delle fasi principali dell'evoluzione storica dell'algebra, dall'altra ha motivazioni di tipo cognitivo, legate alla costruzione del pensiero algebrico. L'algebra *retorica*, con l'utilizzo di esempi e figure geometriche per illustrare i ragionamenti, percorre imillenni: dai Babilonesi, ai Greci, agli Arabi, al Medioevo e al Rinascimento europei. Per la costruzione del pensiero algebrico, la ricerca didattica indica come fondamentale la competenza di passare da un registro all'altro: dalle rappresentazioni grafiche, alle scritture simboliche, ai ragionamenti espressi in linguaggio naturale.

Al-Khuwarizmi riporta una classificazione in vari tipi delle equazioni di primo e secondo grado.

In *Per interpretare il documento* agli alunni è richiesto di volta in volta di produrre esempi attinenti al tipo di equazione riportato nei brevi documenti.

L'interpretazione del successivo documento propone la risoluzione dell'equazione $x^2 + 10x = 39$ ripercorrendo il ragionamento di al-Khuwarizmi ma cadenzandolo in tappe non esattamente corrispondenti all'originale.

Nel "Capitolo V", si tratta di risolvere l'equazione $x^2 + (10 - x)^2 = 58$. È interessante far notare agli alunni lo sviluppo del binomio espresso a parole: "Moltiplica dieci meno una cosa per se stesso, fa cento più un censo meno 20 cose". La soluzione che viene descritta si può tradurre con la formula cosiddetta "ridotta". Una riflessione di tipo, diciamo, psico-epistemologico ci fa notare che l'autore ha bene in mente la procedura risolutiva. Il suomodo di procedere, però, non induce certo l'automatismo, senza riflessione, che si mette in atto applicando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado e in questo senso il ragionamento di al-Khuwarizmi ha una valenza didattica non trascurabile.

Diofanto, uno che ha lasciato il segno

Ugualmente significativo dal punto di vista storico è il brano tratto dall'Aritmetica di Diofanto, che si può far rientrare nella fase dell'algebra *sincopata* benché sia precedente all'opera di al-Khuwarizmi.

In *Fai le tue ipotesi* l'alunno può richiamare il sistema di numerazione alfabetico greco: l'apice consente a Diofanto di evidenziare che egli sta facendo un discorso generale, diverso dal riferimento a casi numerici specifici. È bene che gli alunni provino a fare un collegamento con i precedenti documenti.

Al-Khuwarizmi non utilizzava simboli: lo studente è chiamato a riflettere sui vantaggi del loro utilizzo per l'esposizione di un ragionamento matematico.

Tutte equazioni

I modi diversi di scrivere un'equazione presenti in autori fra loro contemporanei illustrano all'alunno della secondaria di secondo grado la difficoltà di giungere alla condivisione di un efficace simbolismo.

Una “ricetta” per risolvere un'equazione

La mancanza di un adeguato simbolismo impediva a Pacioli di esporre una modalità generale di risoluzione delle equazioni di secondo grado. È possibile da questo punto di vista stabilire un'analogia con al-Khuwarizmi: in entrambi gli autori vi era la necessità di ricorrere ad esempi specifici per illustrare i casi generali.

Nelle attività di interpretazione del documento, all'alunno è richiesto di scrivere l'equazione $5x = x^2 + 4$, da cui $x^2 - 5x + 4 = 0$, e le radici 4 e 1 ricavate con la ‘formula ridotta’.

Pacioli suggerisce i calcoli seguenti:

- “Smezza le cose”: $5/2$;
- “Moltiplica in se”: $25/4$;
- “Leuane el numero, Restara .2 1/4”: $25/4 - 4 = 9/4 = 2 + 1/4$;
- “la R.2 1/4.p.2 1/2 [...] fo el domandato numero: cioe .4.”: $\sqrt{(9/4) + 2} + 1/2 = 4$.

In *Fai le tue ipotesi* le osservazioni dell'alunno potranno riguardare ancora la ‘diffidenza’ dei matematici per i numeri negativi.

La scienza del calcolo letterale

Per la maggioranza dei commentatori, l'opera di Viète segna l'inizio della fase dell'*algebra simbolica*. In effetti, da allora in poi i ragionamenti matematici sono condotti utilizzando non più solo esempi numerici, ma lettere per rappresentare le

“grandezze date” (*parametri*). Inoltre, le incognite sono indicate (Viète usa le vocali) con denominazioni diverse da “cose” o “censi”.

Il primo brevissimo documento mostra una scrittura che ricorda quella di Diofanto, e appare con ciò indicativo dell’itinerario personale del matematico francese verso il nuovo simbolismo. In termini moderni, “ $1QC-15QQ+85C-225Q+274N$ aequatur 120” diventa $x^5-15x^4+85x^3-225x^2+274x=120$.

Per la comprensione del secondo documento, lo studente è chiamato a riflettere sui concetti di variabile e parametro, ragionando su esempi del proprio percorso matematico, raccolti eventualmente con la consulenza diretta dell’insegnante. La seconda attività chiede di produrre un discorso unitario sui documenti di alcuni degli autori incontrati in questa parte del capitolo.

Filosofo, fisico e... matematico

Cartesio affina il nuovo simbolismo utilizzando, a partire dal cubo, la scrittura esponenziale che risulta molto più pratica delle precedenti notazioni. Il brano - tratto da *La Géométrie* che costituisce un’appendice al *Discorso sul metodo* - è suddiviso in due parti. La prima offre numerosi spunti didattici sul tema della fattorizzazione e della soluzione di equazioni con la legge di annullamento del prodotto. La seconda riporta un’osservazione sui segni dei coefficienti di un’equazione, in base alla quale contando il numero delle “permanenze” e delle “variazioni” - come usa dire qualche libro di testo attuale - si può risalire al numero delle possibili radici positive o negative.

Le prime attività di interpretazione chiedono di rifare le moltiplicazioni suggerite da Cartesio e scrivere la scomposizione in fattori primi di $x^4-4x^3-19xx+106x-120$. Il compito è in sé banale ma in grado di creare qualche difficoltà agli alunni più deboli che non abbiano ben interiorizzato il concetto di fattorizzazione. Analogo ruolo didattico rivestono le attività successive.

Fonti dei documenti

La parte di al-Khuwarizmi è tratta da Struik, 1986, pp. 57-60 e da Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, pp. 165-6 per quanto riguarda il Cap. V.

Il documento di Diofanto è riportato in Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, pp. 163-4.

Gli esempi di scritture di equazioni compaiono in Smith, 1958, vol. 2, pp. 427-8.

Il brano di Pacioli è tratto dall’edizione del 1523 della *Summa de arithmetica geometria, proportioni et proportionalita*.

Il primo documento di Viète è riportato in Franci e Toti-Rigatelli, 1979, p. 10; il secondo documento di Viète e i brani di Cartesio compaiono in Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, p. 185 e pp. 188-9.

PROBLEMI ED EQUAZIONI

Il capitolo presenta una piccola raccolta di esercizi risolvibili con equazioni o con sistemi di equazioni. Nella maggior parte dei casi si tratta di quesiti semplici, del tutto analoghi a quelli dei libri di testo in uso nelle nostre scuole.

Problemi di primo e secondo grado

L'autore della maggior parte dei quesiti è Rafael Bombelli, uno dei maggiori matematici del Cinquecento; nella sua opera *L'Algebra* egli, infatti, presenta una serie di esercizi graduati per difficoltà che possono egregiamente integrare il materiale didattico che abitualmente utilizziamo. Di Eulero, Alcuino e altri autori riportiamo quesiti più impegnativi: anche riguardo ad essi non vengono riportate attività supplementari per l'interpretazione del documento. Le soluzioni sono indicate di seguito a ciascun quesito e sono quasi sempre un passo dell'originale.

Fonti dei documenti

I quesiti di Bombelli sono tratti dall'edizione del 1966 de *L'Algebra*; i due di Ahmes sono riportati in Castelnuovo 1983a, pp. 204-205; i problemi di Alcuino compaiono in Franci 2001, *La matematica ricreativa* nelle Propositiones ad acuendos juvenes di Alcuino di York, riportato in Gallo, Giacardi e Robutti (a cura di), *Conferenze e seminari 2000-2001*, Associazione Subalpina Mathesis, Torino, pp. 171 e 173; il problema di Filippo Calandri è riportato in Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, p. 41; i quesiti di Eulero compaiono nel cd-rom n. 1 de *La matematica su CD-rom - una collezione di volumi antichi e rari di matematica e scienze affini* e sono qui presentati in una nostra traduzione; l'epitaffio di Diofanto si può trovare nel sito https://it.wikipedia.org/wiki/Diofanto_di_Alessandria.

BOMBELLI E IL NUMERO i

L'attribuzione della paternità della formula di risolutiva delle equazioni di terzo grado è stata per lungo tempo una questione controversa, ma allo stato attuale la situazione sembra più chiara.

Bisogna premettere che nel Cinquecento per i matematici la continuità dell'impiego dipendeva, oltre che dalle protezioni e dalle influenze politiche, anche dalla capacità di avere la meglio nei pubblici confronti, vere e proprie “disfide” sui problemi più vari che chiunque poteva sollevare: un'umiliazione pubblica poteva essere disastrosa per la propria carriera. È per questo motivo che Scipione Del Ferro (1465-1526) non rivelò di avere trovato la formula risolutiva dell'equazione di terzo grado del tipo $x^3=px+q$, confidandola solo in punto di morte al suo allievo Antonio Fior. Fior lanciò una sfida fatta di equazioni incomplete di terzo grado a Niccolò Fontana (1500-1557) (detto Tartaglia, a causa di una ferita al viso che compromise la sua capacità di parlare fluentemente), ma questi riuscì a ricavare a sua volta la formula risolutiva e rispose con una serie di problemi di vario tipo che Fior, meno brillante, non riuscì a risolvere, uscendo così dalla scena matematica.

Tartaglia non andò mai oltre la formula di Scipione Dal Ferro: tra l'altro egli ignorava le trasformazioni algebriche occorrenti per far scomparire il termine di secondo grado dalla equazione cubica completa¹, in modo da applicare la formula anche a questo caso più generale. Fu Gerolamo Cardano (1501-1576), con il suo discepolo Ludovico Ferrari (1522-c.1560), a sviluppare in tutta la sua ampiezza la teoria generale delle equazioni di terzo grado, riconoscendo però a Tartaglia il merito di avergli comunicato la formula, così come scrisse nella sua *Ars magna*, opera del 1545 (nonostante la citazione, Tartaglia si sentì derubato della scoperta e reagì furiosamente).

Rimaneva però da risolvere il cosiddetto *caso irriducibile* che fu gloria di Rafael Bombelli (1530-1573).

Sarà un numero?

Nel caso dell'equazione $x^3-15x=4$ Bombelli riuscì a compiere la trasformazione della soluzione, che in notazione moderna risulta essere:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} = \sqrt[3]{(2 + 1)^3} + \sqrt[3]{(2 - 1)^3} = 2 + i + 2 - i = 4$$

¹ Come richiesto nell'attività 4, riguardante il primo documento di Bombelli, da $x^3+ax^2+bx+c=0$ si ottiene $y^3=py+q$, operando il cambio di variabile $x=y-a/3$.

A Bombelli spetta il merito di aver introdotto nella matematica i numeri complessi, con precise e nuove regole di calcolo, con una sicurezza e una padronanza che, dopo di lui, non si riscontrano se non in tempi a noi vicini: bisognerà aspettare infatti almeno due secoli, prima che questi numeri vengano studiati a fondo da Eulero, Gauss e Cauchy. Questa abilità sembra in contrasto con la sua apparente incapacità di accettare le soluzioni negative come $\sqrt[3]{3-2}$ e $-\sqrt[3]{3-2}$. In realtà, però, nella risoluzione di un'equazione di terzo grado completa, accetta transitoriamente la radice negativa dell'equazione di terzo grado ausiliaria (vale a dire senza termine di secondo grado). Questo rappresenta un altro esempio storico in cui il portare a termine un processo risolutivo crea la necessità di introdurre nuovi oggetti algebrici di natura più astratta, come i numeri negativi.

L'esistenza di almeno una radice reale è facilmente dimostrabile considerando che una generica funzione polinomiale di grado dispari è continua e dallo studio dei limiti all' ∞ (o dallo studio del segno) si può dedurre che deve attraversare l'asse delle x almeno una volta, questo corrisponde ad avere una radice reale per l'equazione di terzo grado associata alla funzione.

Come ricavare la formula per $x^3=px+q$?

Poniamo la soluzione $x=u+v$:

$$u^3+v^3+3uv(u+v)=p(u+v)+q$$

Per avere l'uguaglianza
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = q \\ 3uv = p \end{cases}$$

Ricavando v dalla seconda equazione del sistema e sostituendo nella prima, si ottiene:

$(p/3)^3 \cdot 1/u^3 + u^3 = q$ che è un'equazione di secondo grado in u^3 :

$(u^3)^2 - qu^3 + (p/3)^3 = 0$, che ha come soluzione

$$u^3 = (q \pm \sqrt{(q/2)^2 - (p/3)^3})/2 = q/2 \pm \sqrt{((q/2)^2 - (p/3)^3)}.$$

Per simmetria, deve valere lo stesso per v^3 e, dato che $u^3+v^3=q$, la soluzione è

$$x=u+v=\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

I numeri immaginari hanno ottenuto un'applicazione pratica nel campo dell'elettrotecnica, in cui sono molto utili per descrivere i fenomeni legati alle leggi di Ohm e di Kirchhoff, anche per rappresentare vettori e per descrivere fenomeni oscillatori.

Va tenuto presente che $\sqrt{-1}$ conduce all'insieme che ha come elementi i e $-i$. Reuben Hersch in *Cos'è davvero la matematica* si sofferma sui problemi che comporta la definizione dell'insieme dei numeri complessi e descrive alcune forme in cui i può essere espresso:

- punto del piano xy , $i = (0;1)$; l'addizione corrisponde ad una traslazione e la moltiplicazione corrisponde alle dilatazioni e alle rotazioni (con regole simili a quelle della notazione esponenziale dei numeri complessi);
- coppia ordinata di numeri reali, con la somma definita in modo naturale e la moltiplicazione con $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$;
- le matrici possono essere $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Le equazioni di quarto grado furono risolte da Ferrari riducendole a delle cubiche con un cambio di variabile: ne riferisce Cardano nella sua *Ars Magna*.

Successivamente si fecero molti tentativi per trovare la formula risolutiva anche per le equazioni di quinto grado. Era noto che un'equazione di questo tipo doveva avere almeno una soluzione reale. Nonostante gli innumerevoli tentativi, l'equazione resisteva a tutti gli sforzi di risolverla. Finché un giovane matematico norvegese, Niels Abel (1802-1829), sconvolse l'ambiente scientifico dimostrando, nel caso di equazioni di quinto grado o superiori, l'impossibilità della soluzione per radicali (utilizzando, cioè, una formula basata sui coefficienti dell'equazione che contenga solo addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione ed estrazione di radice). Per risolvere equazioni di grado uguale o superiore al quinto si usano altre tecniche, diverse da quelle algebriche, come le "funzioni ellittiche" - anche se, ovviamente, esistono quintiche risolubili per radicali.

Fonti dei documenti

Il primo documento di Bombelli è riportato in Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigattelli, 1992, p. 182. Il successivo documento manoscritto è tratto da un codice depositato presso la Biblioteca dell'Archiginnasio di Bologna.

LOGARITMI

Molti insegnanti ricorderanno l'importanza che veniva data ai logaritmi nella matematica delle superiori di qualche anno fa. Allora valevano motivazioni analoghe a quelle che troviamo nella parte iniziale del documento dell'Abate Marie: rendere più facile il calcolo di moltiplicazioni, divisioni, potenze, radici. Con le calcolatrici tasca-

bili tutto è cambiato. Rimane comunque innegabile che il concetto di logaritmo merita un posto di rilievo nella proposta didattica, per le applicazioni anche al di fuori dello stretto ambito della matematica.

Un'idea antica

Il documento propone un itinerario, forse inusuale per i nostri libri scolastici, sulle proprietà delle potenze, il significato di logaritmo in base 10, il calcolo del suo valore approssimato, le sue proprietà rispetto a moltiplicazione e divisione. Vi sono altri aspetti di approfondimento che rendono il testo non banale ma quelli ora elencati si dimostrano adatti ad un lavoro di recupero per gli studenti più deboli. Le prime domande di interpretazione del documento sono proprio concepite a tale scopo.

Interessanti dal punto di vista didattico sono le considerazioni riguardanti l'ordinamento dei valori del logaritmo rispetto ai numeri interi (determinazione della *caratteristica*).

Le proprietà del logaritmo di un prodotto e di un quoziente sono illustrate con esempi numerici.

Nel documento si fa riferimento a “*progressione geometrica*” e “*progressione aritmetica*”. Gli alunni possono risalire al significato (almeno intuitivamente e in un'accezione parziale) di questi termini dal contesto del brano. Viene comunque lasciata l'indicazione di servirsi eventualmente del libro di testo. L'insegnante potrà incaricarsi di operare gli opportuni richiami.

Le successive attività ripropongono con altri esempi numerici alcune delle abilità suggerite nel documento dell'Abate Marie. Anzitutto l'individuazione della caratteristica del logaritmo (in base 10) di numeri razionali positivi anche minori di 1. Viene pure riportata una pagina delle tavole dei logaritmi: gli alunni sono chiamati a cercare il valore approssimato del logaritmo di numeri a scelta. Si tratta di un'attività che, se limitata ad esempi adeguatamente semplici, non crea difficoltà, nemmeno agli alunni più deboli.

L'ultimo quesito, benché semplice nella formulazione, è piuttosto articolato. Dopo i primi due esempi riguardanti prodotto e quoziente, vengono introdotte le potenze, anche ad esponente razionale non intero. Viene, contestualmente ai vari esempi, suggerita la possibilità di utilizzare anche un esponente frazionario. Il successivo testo di Eulero riproporrà esempi analoghi.

In *Fai le tue ipotesi* è riportata una domanda che nasce spontanea (a volte anche da parte degli studenti che abbiano analizzato il documento dell'Abate Marie): come avranno fatto a realizzare le prime tavole dei logaritmi?

Una risposta a questa domanda la fornisce Eulero nel documento che segue.

Una risposta autorevole!

Eulero mostra come si può approssimare il valore di $\text{Log } 2$ sfruttando la definizione di logaritmo e quindi ragionando sulle scritture esponenziali.

La prima consegna per l'interpretazione del documento chiede di riportare le argomentazioni prodotte da Eulero riguardo al perché $3/10 < \text{Log } 2 < 1/2$.

$\text{Log } 2 < 1/2$ perché $10^{1/2} > 2$ infatti, elevando al quadrato, si ottiene $10 > 2^2 = 4$.

Ancora, se $\text{Log } 2$ fosse uguale a $3/10$ allora $10^{3/10}$ sarebbe uguale a 2, da cui 10^3 sarebbe uguale a 2^{10} ma $10^3 = 1\,000$ e $2^{10} = 1\,024$: ci siamo andati vicino ma $\text{Log } 2 > 3/10$. Con analogo ragionamento, si può capire che $\text{Log } 2 < 4/10$, il che ci dice che la prima cifra decimale di $\text{Log } 2$ è 3. Sarà più laborioso ma, con ragionamenti dello stesso tipo, si potrà ricercare la seconda cifra decimale di $\text{Log } 2$ e quindi migliorare l'approssimazione.

Il successivo esercizio di interpretazione del testo riformula gli esempi forniti da Eulero e chiede agli alunni di completarli: per brevità, $\text{Log } 2$ viene indicato con x . L'alunno coglierà che così può riuscire a stabilire il valore del logaritmo di parecchi numeri, semplicemente conoscendo quello di 2.

Il quesito 3 propone di completare il ragionamento avviato nelle attività di interpretazione del documento in base al quale stabilire la prima cifra decimale di $\text{Log } 2$.

Le successive tre consegne chiedono di stabilire il valore di $\text{Log } 250$, di $\text{Log } 625$ e di un nuovo numero naturale che possieda come divisori primi solo il 2 e il 5 (come, ad esempio, 1250):

$$\text{Log } 250 = \text{Log } 25 + \text{Log } 10 = 2 - 2x + 1 = 3 - 2x \cong 3 - 2 \cdot 0,30103 = 2,39794;$$

$$\text{Log } 625 = \text{Log } 5^4 = 4 \cdot (1 - x) \cong 4 \cdot (1 - 0,30103) = 2,79588;$$

$$\text{Log } 1250 = \text{Log } 125 + \text{Log } 10 = 3 - 3x + 1 \cong 4 - 3 \cdot 0,30103 = 3,09691.$$

Per trovare la prima cifra decimale di $\text{Log } 3$ si potrà ricorrere al metodo qui esposto che non prende in considerazione altri ragionamenti di calcolo approssimato che consentirebbero di limitare il ricorso alla calcolatrice. Dunque, ricordando quanto visto sopra a proposito di $\text{Log } 2$:

$$\text{Log } 3 > 4/10 \text{ infatti } 10^4 < 3^{10}; \text{Log } 3 < 5/10 = 1/2 \text{ infatti } 10^{1/2} > 3;$$

$$\text{Log } 3 > 47/100 \text{ infatti } 10^{47} < 3^{100} \cong 5,1 \cdot 10^{47}; \text{Log } 3 < 48/100 \text{ infatti } 10^{48} > 3^{100}. \text{Quindi}$$

$$\text{Log } 3 \cong 0,47.$$

Fonti dei documenti

Il documento dell'Abate Marie è tratto da Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, pp. 53-4-5; il documento di Eulero da *Éléments d'algebre*, primo vol., pp. 170-5: l'opera (in lingua francese) compare nel CD n. 1 de *La matematica su CD-rom - una collezione di volumi antichi e rari di matematica e scienze affini*; la traduzione italiana è nostra.

E INOLTRE... EVOLUZIONE DEI SIMBOLI (per l'aritmetica e l'algebra)

Le tabelle sull'evoluzione dei simboli di operazione, relazione ecc. vogliono far riflettere lo studente sul fatto che il simbolismo che noi oggi utilizziamo è nato dopo millenni di matematica. Si può cercare una spiegazione sul perché di questo ritardo richiamando quanto visto nei documenti precedenti. Ad esempio, l'utilizzo di figure geometriche come supporto al ragionamento (si vedano le schede precedenti su al-Khuwarizmi) secondo gli storici della matematica può aver ostacolato il passaggio all'algebra simbolica. Il fatto che sia stata faticosa la condivisione generale del simbolismo attuale pone interrogativi su come avvenisse l'interscambio nella comunità dei matematici e in che misura abbia influito l'invenzione della stampa.

Fonti dei documenti

Smith, 1958 - 2, pp. 395-417.

Capitolo 2

I volti della geometria

ARITMO-GEOMETRIA: I NUMERI FIGURATI

L'argomento presentato permette di considerare l'aritmetica da un punto di vista che è andato perso nel tempo: quello geometrico.

I numeri figurati furono studiati soprattutto dalla scuola pitagorica sotto una spinta mistico-estetico-scientifica (e inglobando parte della matematica babilonese di cui Pitagora era venuto a conoscenza nei suoi frequenti viaggi). I pitagorici elaborarono una vera e propria mistica numerologica, in cui il numero era considerato un elemento ordinatore dell'universo. Anche in parecchie civiltà primitive alcuni numeri godevano di una considerazione particolare, ma i pitagorici portarono all'estremo il culto del numero, basando su di esso la loro filosofia e il loro modo di vivere: era l'aspetto unificatore del mondo. Forse si potrebbe dire che mai dopo di allora la matematica fu così importante nella vita e nella religione.

Sono giunti a noi contributi sull'aritmo-geometria da parte di Nicomaco, Euclide, Ipsicle, Diofanto, Plutarco, Cartesio e altri.

Per Nicomaco i numeri triangolari erano la base di tutti i numeri poligonalari, ma i numeri quadrati furono quelli ad entrare nell'uso quali veri "elementi" della teoria dei numeri, anche con lo studio delle terne pitagoriche (questo forse perché i numeri quadrati sono ottenibili semplicemente dalla moltiplicazione di un numero per se stesso, o forse perché era già noto ai Babilonesi il teorema di Pitagora, che si basa proprio sui numeri quadrati).

Dal punto di vista didattico è sempre auspicabile che gli alunni sappiano affrontare una stessa situazione avvalendosi di modalità espressive diverse. Il lavoro sui numeri figurati coinvolge, oltre agli aspetti aritmetici, anche visualizzazioni geometriche; per esprimere fatti generali, inoltre, è richiesto l'utilizzo del linguaggio algebrico e delle capacità di particolarizzazione, astrazione, formalizzazione.

Numeri poligonalari

Numeri triangolari: 1 3 6 10 15...

Nella prima parte delle domande fornite agli alunni, l'obiettivo è quello di ricavare le relazioni aritmetiche che legano un numero triangolare al suo successivo.

La relazione aritmetica che permette di passare da un numero triangolare all'altro può essere visualizzata in questo modo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & & 3 & & 6 & & 10 & & 15 \dots \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 & +2 & & +3 & & +4 & & +5 &
 \end{array}$$

Generalizzando, si potrà pervenire alle seguenti considerazioni:

- per passare dall' n -esimo numero triangolare al successivo basta sommare $n+1$ e, di conseguenza,
- il k -esimo numero triangolare (T_k) è dato dalla somma di tutti i numeri naturali fino a k , $T_k = 1+2+3+\dots+k = k \cdot (k+1)/2$. Per ricavare questa formula si potrà procedere per gradi. Prima di tutto si potrà usare il metodo già utilizzato da Gauss bambino: viene richiesto il calcolo di T_{10} , che vale 55. Si potrà anche disegnare la configurazione rettangolare e poi si potrà generalizzare al numero k per ricavare la formula del k -esimo numero triangolare.

Numeri quadrati: 1 4 9 16 ...

Nel caso dei numeri quadrati, si ricaverà che:

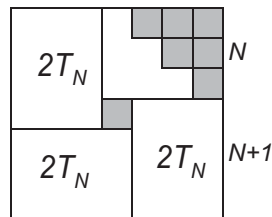
- si passa da un numero quadrato all'altro sommando un numero dispari, precisamente, il numero quadrato di lato n è la somma dei primi n numeri dispari: $n^2 = 1+3+5+\dots+(2n-1)$

È interessante notare dal disegno di un numero quadrato presente nel documento l'influenza della matematica babilonese. Ogni numero dispari che viene sommato al numero quadrato è raffigurato infatti con una struttura di punti simile allo gnomone (l'orologio solare babilonese), disposto su due lati della precedente struttura di punti. È proprio da questa costruzione che si giunse ad indicare gli stessi numeri dispari con il termine "gnomone".

Per quanto riguarda la relazione fra numeri triangolari e quadrati è immediato dimostrare che la somma di un numero triangolare e del suo precedente è un numero quadrato, cioè $Q_N = T_{N-1} + T_N$ (proprietà di Nicomaco), semplificando l'espressione $(n-1) \cdot n/2 + n \cdot (n+1)/2$.

Criteri per verificare se un numero è triangolare:

- per controllare se un numero è triangolare basta raddoppiare il numero, cercare la radice (approssimata per difetto a meno di un'unità) e vedere se il resto è la radice stessa.
- Dimostrazione geometrica del criterio di Plutarco, per verificare se un numero è triangolare: l'ottuplo di un numero triangolare aumentato dell'unità è un numero quadrato.



Criterio per verificare se un numero è quadrato: ovviamente, l'estrazione di radice.

Riprendiamo le relazioni algebriche di costruzione dei numeri poligionali già visti:

Numeri triangolari:

1	3	6	10	15...
	↘	↘	↘	↘
	+2	+3	+4	+5...
		↘	↘	↘
Ragione:	+1	+1	+1	

Numeri quadrati:

1	4	9	16	25...
	↘	↘	↘	↘
	+3	+5	+7	+9...
		↘	↘	↘
Ragione:	+2	+2	+2	

Si può notare che i numeri triangolari sono ottenuti sommando i termini di una progressione aritmetica di ragione 1, mentre per i numeri quadrati la ragione è 2. Analogamente, se la ragione della progressione aritmetica è 3 si ottengono i numeri pentagonali, se è 4 i numeri esagonali.

Regola generale per costruire i numeri poligionali: si sommano i termini di una progressione aritmetica avente per origine l'unità e per ragione il numero dei lati del poligono meno due.

Ecco altri numeri figurati:

esagonali: 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190 ...

ettagonali: 1, 7, 18, 34, 55, 81, 112, 148, 189, 235 ...

ottagonali: 1, 8, 21, 40, 65, 96, 133, 176, 225, 280 ...

Fonti dei documenti

I documenti sono tratti da Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, pp. 15-6-7.

TERNE PITAGORICHE

La conoscenza di alcune terne pitagoriche è anteriore al teorema di Pitagora stesso: avevano infatti un'utilità pratica per individuare un angolo retto, ad esempio nella costruzione degli edifici.

Le più antiche terne pitagoriche a noi giunte sono forse quelle elencate nella tavoletta Plimpton 322¹, risalente ad un periodo tra il 1800 e il 1650 a.C., che presumibilmente è il frammento di una tavola più grande (essa stessa è rovinata). La tavoletta è composta da 4 colonne e 15 righe; dal suo contenuto sembra che i Babilonesi conoscessero la formula per ricavare le terne pitagoriche tradizionalmente attribuita a Diofanto (ca. 250 d.C.)².



Tavoletta babilonese, Plimpton 322.

Euclide dedica ben due libri alle opere dei pitagorici e dimostra che esiste un numero infinito di terne pitagoriche primitive³.

Egli parte dall'assunto che la differenza tra due quadrati consecutivi è un numero dispari: per la precisione

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1.$$

Ma fra gli infiniti numeri dispari, ve ne sono infiniti che sono quadrati (banalmente, i quadrati dei numeri dispari...). Cioè, esistono infiniti m per cui è vero che

$$m^2 = 2n+1.$$

Ora, poiché $2n+1$ è la differenza tra due quadrati consecutivi, possiamo scrivere

$$m^2 = (n+1)^2 - n^2$$

e cioè esistono infiniti m^2 dispari - e relativi $n = (m^2 - 1)/2$ - per cui

$$m^2 + n^2 = (n+1)^2.$$

Euclide conclude quindi che esistono infinite terne pitagoriche.

I numeri interi x, y, z tali che $x^2 + y^2 = z^2$ sono infiniti: cosa avverrà nel caso in cui $x^n + y^n = z^n$ per $n > 2$? Vi saranno soluzioni intere non banali? Saranno infinite anch'esse? In questo volume, una risposta viene data in *Non ci fermiamo qui... e la storia continua...*, nella parte conclusiva del Terzo Capitolo.

Approfondimento

Dimostrazione con la geometria analitica della formula sulle terne pitagoriche; si veda anche Demattè e Tomasi, 2025.

Si deve ad Euclide (Lemma I alla proposizione 29 del X libro degli Elementi) la relazione

¹ Dalla collezione Plimpton della Columbia University.

² Alla fine di questa sezione si esporrà come ricavare questa formula.

³ In realtà a partire da una qualsiasi terna pitagorica si riescono a costruire infinite altre terne semplicemente moltiplicando ogni numero per la stessa quantità, ma così facendo non si ottiene una terna primitiva bensì una "multipla" di quella di partenza.

$$(b^2 - a^2)^2 + (2ab)^2 = (b^2 + a^2)^2$$

che fornisce terne pitagoriche primitive⁴ per a e b numeri primi fra loro e non entrambi dispari (altrimenti non si otterrebbero terne primitive). Tale relazione, detta comunemente di Diofanto-Fermat, si trova anche nel *Liber quadratorum* di Leonardo Fibonacci, opera datata 1225 e contenuta in importanti codici del XV secolo.

Trovare soluzioni intere dell'equazione $X^2 + Y^2 = Z^2$, corrisponde a trovare soluzioni razionali a $x^2 + y^2 = 1$.

Infatti se abbiamo una soluzione intera alla prima equazione $X=a$, $Y=b$ e $Z=c$, dove a , b e c sono numeri interi, allora $x=a/c$ e $y=b/c$ è una soluzione razionale della seconda equazione. Viceversa, se si ha una soluzione razionale della seconda equazione, per esempio $x=p/q$ e $y=r/s$, cioè $(p/q)^2 + (r/s)^2 = 1$, moltiplicando tutto per $(qs)^2$ si ottiene una soluzione intera della prima equazione, cioè $X=ps$, $Y=rq$ e $Z=qs$; $(ps)^2 + (rq)^2 = (qs)^2$.

Il problema si riduce a trovare quindi le soluzioni razionali di $x^2 + y^2 = 1$. In geometria analitica, equivale a chiedersi se esistono punti sulla circonferenza centrata nell'origine degli assi cartesiani di raggio 1 le cui coordinate siano entrambe numeri razionali.

Cominciamo con lo scegliere un punto P qualsiasi sulla circonferenza. Per comodità scegliamo $P(-1; 0)$. Sia Q un altro punto sulla circonferenza (nel primo quadrante, ad esempio); tracciamo la retta che unisce P e Q , la quale incrocia l'asse y in un punto di coordinate $(0; t)$.

Per trovare le coordinate di Q si può procedere nel modo seguente.

Consideriamo la retta passante per i punti $(-1; 0)$ e $(0; t)$ che ha equazione $y = tx + t = t(x + 1)$.

Risolvendo il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = t(x + 1) \end{cases}$ si ottiene

$$x^2 + t^2(x + 1)^2 = 1, \quad (t^2 + 1)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0 \quad \text{da cui}$$

$$x_1 = -1 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-t^2 + 1}{t^2 + 1}$$

Quindi le soluzioni del sistema sono la soluzione banale $(-1; 0)$ e

$$\begin{cases} x = \frac{-t^2 + 1}{t^2 + 1} \\ y = \frac{2t}{t^2 + 1} \end{cases} \quad (\text{coordinate di } Q)$$

⁴ 3, 4, 5 è una terna primitiva: da essa si possono ottenere le terne 6, 8, 10; 9, 12, 15; ecc. moltiplicando per uno stesso numero ciascun termine della terna primitiva.

Si dimostra immediatamente che Q ha coordinate razionali $\Leftrightarrow t$ è razionale.

$\Rightarrow$) Sia $Q(x_0; y_0)$ con x_0 e y_0 razionali. Allora la retta che passa per P e Q ha equazione $y = (x+1)y_0/(x_0+1)$, e quindi $t = y_0/(x_0+1)$, che è razionale.

$\Leftarrow$) Evidente dalla forma delle coordinate di Q , trovate sopra.

Quindi, per trovare soluzioni razionali dell'equazione basta tracciare delle rette da un punto della circonferenza, per esempio $P(-1; 0)$, che incrociano l'asse y in un punto di ordinata razionale. Il punto Q , in cui la retta interseca la circonferenza, avrà entrambe le coordinate razionali.

Trovate le soluzioni razionali di $x^2 + y^2 = 1$, possiamo ricavarci le soluzioni intere dell'equazione originaria e quindi la forma delle terne pitagoriche.

Sia $t = p/q$ (con $q \neq 0$), sostituendo nelle coordinate di Q trovate precedentemente,

$$x = \frac{-\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 1}{\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{-p^2 + q^2}{q^2}}{\frac{p^2 + q^2}{q^2}} = \frac{-p^2 + q^2}{p^2 + q^2} = \frac{a}{c}$$

$$y = \frac{2\frac{p}{q}}{\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 1} = \frac{2pq}{p^2 + q^2} = \frac{b}{c}$$

Possiamo quindi esprimere le terne pitagoriche nella forma

$$(1) \begin{cases} a = q^2 - p^2 \\ b = 2pq \\ c = p^2 + q^2 \end{cases} \quad \text{più in generale} \quad (2) \begin{cases} a = (q^2 - p^2) \cdot r \\ b = 2pqr \\ c = (p^2 + q^2) \cdot r \end{cases} \quad \text{con } p, q \text{ e } r \text{ numeri interi}$$

Si dimostra facilmente che a , b e c nella formula (1) non hanno fattori in comune, costituiscono cioè una terna primitiva, se p e q sono primi tra loro e non sono entrambi dispari (algebricamente si dimostra che ogni elemento della terna risulterebbe essere divisibile per 2 se p e q non sono uno pari e uno dispari).

Modi ingegnosi per ricavare terne pitagoriche

Il documento proposto si può considerare un proseguimento del lavoro iniziato con i numeri figurati.

Il primo numero quadrato considerato da Fibonacci è 1 dal quale ottiene il secondo, 4, addizionando 3; addizionando il successivo numero dispari, 5, ottiene 9.

Preso 9, Fibonacci addiziona 1, 3, 5, 7, vale a dire i numeri dispari minori di 9, e ottiene 16. Infine $16+9$ dà 25, il terzo quadrato.

Esponendo il ragionamento in termini generali, Fibonacci osserva che “ae” ed “af” sono numeri quadrati in quanto ottenuti “dalla aguntione” dei numeri dispari minori di essi. “af” è la somma dei quadrati “ae” e “ef”.

Nella seconda parte del documento, il “chonposto” di “ab” e “bg”, cioè “ag”, è sicuramente pari, in quanto somma di due numeri entrambi pari oppure entrambi dispari; di conseguenza “ad”, che è la metà di “ag”, è intero.

Con i numeri presenti nel documento, $25 \cdot 9 + 8^2 = 17^2$; inoltre $25 \cdot 9 = 225 = 15^2$. All'alunno è quindi indicato di scegliere altri due numeri quadrati, di moltiplicarli e verificare che il prodotto è ancora un quadrato: deve quindi fare la verifica per valori particolari ma gli verrà chiesto di dimostrare il caso generale nelle successive attività.

I quadrati 225 e 64 addizionati danno il quadrato 289, come si era calcolato poc'anzi; la terna pitagorica è quindi 8, 15, 17.

L'ultima consegna richiede una sintesi didatticamente non irrilevante in quanto comporta l'illustrazione in termini generali del procedimento di Fibonacci.

Riguardo al quesito 12, un esempio di terna pitagorica ottenuta con il primo metodo di Fibonacci può essere 5, 12, 13; infatti, prendendo il quadrato dispari 25 si ha: $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23=144=12^2$ e $144+25=169=13^2$.

Per la successiva consegna riguardante il metodo di Euclide, scegliendo i quadrati $a^2=4$ e $b^2=9$, si ha $(9-4)^2+(2 \cdot 2 \cdot 3)^2=(9+4)^2$ cioè $5^2+12^2=13^2$ (la stessa terna trovata poc'anzi con l'altro metodo).

Nel quesito 14, con la sostituzione suggerita e riferendosi alla figura presente nel documento, si ha $(x+y) \cdot (x-y) + y^2 = x^2$, e si vede che l'uguaglianza è vera in quanto $(x+y) \cdot (x-y) = x^2 - y^2$.

Al quesito successivo si può dare risposta considerando che $a^2 \cdot b^2 = (ab)^2$. Nell'ultimo quesito, $a^2 \cdot b^2 + [(a^2 - b^2)/2]^2 = [(a^2 + b^2)/2]^2$, uguaglianza che si può ricondurre a quella di Euclide moltiplicando per 4 ambo i membri.

Fonti dei documenti

Il documento è tratto da Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, pp. 44-5-6.

TEOREMA DI PITAGORA

Questa parte completa concettualmente l'itinerario proposto in *Terne pitagoriche*. Vengono presentate applicazioni tratte da situazioni concrete, così come tradizionalmente viene fatto nella nostra scuola secondaria: in effetti, però, non sono sempre problemi con un'effettiva utilità pratica ma il più delle volte si tratta di quesiti interessanti sotto l'aspetto matematico, nello spirito dei *Problemi curiosi* riportati nel primo capitolo.

Dal punto di vista della storia, la diversa provenienza dei documenti dovrebbe suggerire all'alunno come il cosiddetto teorema di Pitagora sia apparso in più civiltà senza che, a quanto pare, vi sia stata una trasmissione di conoscenze.

A spasso per la storia: i lati e i quadrati...

Questi primi documenti (il francobollo, la breve citazione) sono adatti alla scuola secondaria di primo grado. Le attività iniziali di interpretazione del documento sono un'occasione per ripetere il teorema di Pitagora: l'enunciato ed il suo utilizzo per trovare l'ipotenusa, noti i cateti.

... un problema nel Rinascimento...

Il problema di Calandri sulla lunghezza della corda offre l'occasione per interpretare un originale di matematica agli alunni della secondaria di primo grado che abbiano già una certa dimestichezza con le applicazioni del teorema in esercizi numerici. Gli studenti potranno ricavare dal contesto il significato di qualche termine, mentre quello di altri potrà rimanere oscuro senza che ciò pregiudichi la possibilità di proseguire l'analisi del documento: anche la figura sarà utile per individuare i dati e le richieste del problema. Si potranno fare osservazioni complementari, legate ad esempio all'assenza di simboli di operazione (nella parte che conclude il primo capitolo del volume per l'alunno è possibile trovare l'indicazione del periodo in cui sono entrati nell'uso comune i simboli moderni per l'addizione, la sottrazione, la radice quadrata ecc.).

... problemi ed equazioni

Il successivo problema di Filippo Calandri dell'albero spezzato si può prestare ad una soluzione per tentativi, e può essere quindi adatto alla secondaria di primo grado ma, visti i valori numerici, per l'analogo cinese forse è meglio ricorrere alle equazio-

ni (nella secondaria di primo grado si potrebbe realizzare ad un disegno in scala per ricavare una soluzione approssimata, analogamente a quanto suggerito in *Punti lontani*, successiva parte di questo capitolo).

L'alunno dovrebbe, auspicabilmente, ricavare in modo autonomo la soluzione dei due problemi (per via algebrica) e tramite essa risalire all'equivalenza rispetto alle due soluzioni contenute nei documenti. L'insegnante dovrebbe proprio chiedere agli studenti di procedere in questo modo, e passare solo in un secondo tempo alle altre attività di interpretazione del documento. La numero 2 richiede di produrre un'espressione come $1/2 \cdot (10 - (3^2/10))$. Nella successiva, l'alunno dovrebbe capire che gli conviene tenere per un po' in sospeso i calcoli che gli permetteranno di arrivare al valore dell'altezza a cui è avvenuta la frattura del bambù, per poter fare effettivamente il confronto con la soluzione riportata nel documento. La consegna numero 5 richiede un passaggio algebrico per stabilire l'equivalenza delle due uguaglianze, la seconda delle quali traduce la soluzione proposta da Calandri. Infine, gli alunni interpreteranno il documento nel suo complesso.

Punto 8: nel caso del primo problema babilonese, la stessa tavoletta dalla quale è tratto riporta la soluzione: "Tu farai così: dal quadrato di 30 toglierai il quadrato di 24. Otterrai così il quadrato di 18. 18 è il numero cercato: il piede del bastone si allontana dalla base del muro di 18 unità". Nel secondo problema, dopo aver trovato con il teorema di Pitagora che l'altezza del triangolo isoscele è di 40 unità, si può scrivere: $r^2 = 30^2 + (40 - r)^2$ da cui il raggio r viene ad essere 31,25 (cioè, in numerazione sessagesimale, 31;15).

Il successivo problema cinese si può risolvere considerando, come lunghezze dei cateti, l'altezza dell'albero e la lunghezza delle 7 circonferenze, cioè 21. La pianta è lunga 29 chih.

La domanda contenuta in *Fai le tue ipotesi* può trovare una risposta che si collega a quanto visto nel primo capitolo a proposito della soluzione delle equazioni in al-Khuwarizmi o in Pacioli. In questi autori, l'impossibilità di procedere attraverso passaggi formali - analoghi a quelli a cui ricorriamo noi che disponiamo di un valido simbolismo letterale - si può senz'altro ritenere che abbia determinato un diverso utilizzo degli aspetti semantici. Anche se non gli è dato modo di conoscere ulteriori dettagli storici, l'alunno potrebbe essere stimolato a ricercare personali esperienze nelle quali il procedere in modo formale abbia lasciato spazio a una riflessione sui significati: ad esempio, banalmente, quando per ricavare il valore dell'incognita in $6x=42$ abbia evitato di scrivere $x=42/6$ ma abbia dato direttamente $x=7$, oppure quando abbia ragionato per prove ed errori anziché risolvere un'equazione ecc.

Fonti dei documenti

I documenti di Calandri appaiono in Smith, 1958-1, p. 255; il documento del bambù spezzato è tratto da Joseph, 2003, p. 153.

PUNTI LONTANI

Questa parte si pone in continuità con la precedente: propone esempi di natura pratica e richiede l'utilizzo, in qualche caso, del teorema di Pitagora. La caratterizza il richiamo di un tipo di problema che ha avuto una notevole rilevanza storica e che permane oggi nel lavoro dei topografi, vale a dire la misurazione, indiretta, della distanza di punti inaccessibili. Fra le applicazioni più rilevanti, ricordiamo il ben noto metodo di Eratostene per la determinazione del raggio terrestre. Altri interessanti esempi riguardano situazioni riferite a distanze più ridotte che hanno il pregio di suggerire ambiti di esperienza vicini alla realtà dell'alunno: qui ne vengono presentate alcune di varia provenienza.

Di torri ed altri edifici

Il primo documento riporta un classico problema sul teorema di Pitagora. A seconda del metodo di risoluzione che si vuole privilegiare, può essere indicato tanto per la secondaria di primo grado quanto per quella di secondo grado.

Il testo, in versione latina ed italiana, è corredato da un'immagine che contribuisce alla sua interpretazione. Questa può essere ulteriormente rifinita con le successive domande, pensate per gli alunni più giovani. È successivamente richiesta (esercizio 4) la soluzione del problema. Nella consegna si fa riferimento a più metodi possibili. Quello *per prove ed errori*, che purtroppo a livello didattico viene solitamente trascurato, può determinare interessanti strategie risolutive: se l'alunno avrà ben compreso il testo del problema, capirà che la fonte è più vicina alla base della torre più alta e ciò considerato inizierà a scegliere le misure in base alle quali operare il primo tentativo. Presumibilmente, tramite il controllo effettuato con l'utilizzo del teorema di Pitagora, esso non produrrà un risultato esatto: servirà quindi un secondo tentativo... Il *metodografico* richiederà anzitutto un disegno in scala delle torri ad una distanza opportuna. Successivamente gli alunni collocheranno la fonte e misureranno la distanza fra la sommità delle due torri ed il centro della fonte. Ci sarà da aspettarsi che le due distanze non saranno uguali e che perciò la fonte andrà ricollocata... Si potrà trattare, in definitiva, di un metodo per tentativi che farà a meno dei calcoli ma che

ricercherà una soluzione approssimata misurando direttamente sul disegno (considerando, ovviamente, il rapporto di scala adottato).

Si potrà pure, nella secondaria di secondo grado, impostare un'equazione. Detta x la distanza della fonte dalla torre di minore altezza, si applica il teorema di Pitagora ottenendo:

$$x^2 + 30^2 = (50 - x)^2 + 40^2$$

da cui $x=32$.

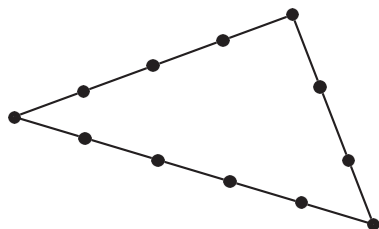
La situazione descritta da Bartoli vuole illustrare un metodo per trovare l'altezza di un edificio. Gli alunni dovranno comprenderlo, ed in ciò consisterà l'interpretazione del documento. Ecco che quindi, fin dai primi quesiti, ai ragazzi sarà richiesto di riflettere criticamente su quanto esposto da Bartoli e di mostrare come si può trovare l'altezza della torre: in un caso con dati numerici scelti direttamente da loro, in un altro con una spiegazione a carattere generale. Il metodo è basato sulla similitudine dei triangoli rettangoli (il filo a piombo serve per trovare la distanza fra l'occhio dell'osservatore ed il terreno): gli alunni potranno capire che sono simili ragionando sugli angoli e riflettendo anzitutto sul fatto intuitivo che l'angolo di incidenza e quello di riflessione sono uguali.

Successivamente, attività 4, viene proposto il celebre metodo di Talete per determinare l'altezza di un edificio (ma anche di un albero, di un pilone ecc.).

Come scavare un tunnel e non sbucare nel punto sbagliato

È importante che gli alunni capiscano la natura del problema pratico che giustifica il metodo proposto. Si potrà pensare di far fare ai ragazzi una simulazione. In palestra sarà facile realizzare con i materassi per il salto in alto una parete che non consenta a due persone che si trovino da parti opposte di vedersi. Disegnati a terra con il gesso i due punti in cui stanno le persone, si chiederà ad un piccolo gruppo di ragazzi di individuare la "direzione del tunnel", di stabilire, cioè, quale sarà la direzione del cammino più breve per andare da un punto all'altro, una volta rimossa la parete di materassi. Partendo da uno dei due punti, con corda metrica e gesso gli alunni tratteranno una spezzata analoga a quella del documento. In questo modo potranno capire perché certe linee saranno più lunghe dello stretto indispensabile. Nel documento sul metodo di Erone, il segmento $K\Lambda$ è stato tracciato 'sovrabbondante' perché esso presumibilmente sarà servito come allineamento lungo il quale spostarsi con lo strumento che fornisce l'angolo retto (lo squadro, nel caso di Erone) finché, operando per tentativi, non si sarà arrivati a tralasciare il punto Δ .

Per individuare gli angoli retti, gli alunni si potranno servire del metodo egizio della corda: si può ottenere un triangolo rettangolo con i lati di 3, 4, 5 unità di lunghezza facendo dei nodi equidistanti, come mostrato in figura.



Nel caso dell'esempio riportato fra le attività di interpretazione del documento, BN e NΔ sono lunghi rispettivamente 600 e 590 passi; i triangoli OΞB e ΔΠΠ avranno allora, ad esempio, i cateti ΔP e OB lunghi 60 passi e i cateti OΞ e ΠΠ lunghi 59 passi.

Il quesito 4 è un approfondimento che richiede agli alunni di evidenziare quanto detto poco sopra, vale a dire che è comodo tracciare il penultimo segmento della spezzata un po' sovrabbondante. Anche l'ultimo quesito si può considerare un approfondimento o uno spunto per una prova di verifica al termine dell'attività.

In *Fai le tue ipotesi*, l'alunno è chiamato a riflettere sulla situazione concreta nella quale è stata tracciata la spezzata in vista della realizzazione del tunnel. Presumibilmente, se la montagna fosse sorta in una pianura priva di ostacoli naturali, avrebbe potuto essere costituita da meno segmenti; ci saranno state però depressioni o rilievi che hanno richiesto un tracciato più complesso.

Fonti dei documenti

L'originale latino del documento di Fibonacci e l'illustrazione delle due torri tratta dall'*Aritmetica* di Calandri sono riportati in L. Grugnetti: *Ancient problems for the development of strategic thinking*, in Fauvel and van Maanen (editors), 2000, pp. 78-81. La figura relativa al metodo di Erone compare in H.N Jahnke: *The use of original sources in the mathematics classroom*, in Fauvel and van Maanen (editors), 2000, p. 308.

$\sqrt{2}$

Nel documento, le varie riproduzioni della tavoletta suggeriscono l'inquadramento del discorso su $\sqrt{2}$ nell'ambito della geometria e specificatamente il collegamento con il teorema di Pitagora. Tuttavia, per la determinazione del valore approssimato della radice quadrata di 2, gli aspetti geometrici rimangono sullo sfondo, lasciando spazio alle considerazioni numeriche e all'utilizzo di un algoritmo di calcolo.

Come avranno fatto?

All'interrogativo l'alunno può trovare una risposta nell'attività descritta in *Per interpretare il documento* dove viene illustrato quello che è anche oggi conosciuto come un algoritmo di origine babilonese per il calcolo della radice quadrata. Si tratta in effetti di una tecnica molto semplice ed efficace che consente di giungere rapidamente all'approssimazione desiderata. Otto Neugebauer (Neugebauer, 1974, p. 70) attribuisce l'algoritmo ai Babilonesi benché, come egli afferma, non vi siano prove decisive che fosse proprio questo il modo da loro impiegato.

Le attività sono adatte anche alla secondaria di primo grado nella quale possono acquistare un significato particolare, infatti il breve itinerario didattico delineato in questa parte del capitolo tocca alcuni temi centrali dell'aritmetica del triennio: sistemi di numerazione, potenze, operazioni con le frazioni e radice quadrata, nel quadro dell'utilizzo del concetto di *algoritmo*. L'insegnante dovrà coordinare le attività, cadenzando il lavoro degli alunni e guidandoli nei calcoli.

Utilizzando i numeri decimali e la calcolatrice, si può procedere così:

$$2:1,5 = 1,33333\dots$$

$$(1,5+1,33333) : 2 = 1,416665$$

$$2:1,416665 = 1,411766\dots$$

$(1,416665+1,411766) : 2 = 1,4142155$ e quest'ultimo valore fornisce la radice quadrata di 2, approssimata a meno di un centomillesimo.

Nella secondaria di secondo grado, queste attività potranno essere inserite nel discorso sui numeri irrazionali e sulla loro approssimazione con numeri razionali. In questo volume, rinviando alle *sezioni* di Dedekind nella parte sull'infinito del terzo capitolo.

Fonti dei documenti

L'immagine della tavoletta è riportata in varie opere sulla storia della matematica: si veda, ad esempio, Joseph, 2003, p. 113.

π

Nel presente volume, le attività di questa parte vanno collegate ai documenti di Kepler e Archimede sul tema degli infinitesimi prima di Newton, riportati nel terzo capitolo. La distanza temporale fra questi personaggi può dare l'idea della complessità

delle indagini che nella storia hanno riguardato π . Ricordiamo, inoltre, che è del Diciannovesimo secolo la dimostrazione che π , come anche il numero di Nepero e , è *trascendente*, cioè non può essere la radice di un'equazione algebrica a coefficienti interi.

Quale sarà il valore vero?

Il primo dei brevissimi documenti è tratto da una fonte inusuale per quanto riguarda la matematica: la Bibbia. Crediamo che didatticamente sia comunque significativo per documentare una tappa nella lunga storia dell'approssimazione del numero irrazionale π .

Fra gli obiettivi specifici di apprendimento della secondaria di primo grado, relativamente alla conoscenza di alcuni aspetti storici relativi alla matematica, consideriamo anche i diversi valori di π nella geometria antica. Una parte dei documenti può servire anche per quest'ordine di scuola. Per la risposta alla prima delle domande, tuttavia, riteniamo che gli alunni più giovani dovranno essere guidati dall'insegnante ad un'analisi attenta sul testo per la decodifica delle informazioni, così come nella seconda per scrivere l'uguaglianza richiesta. In essa è suggerita la formula per il calcolo dell'area del cerchio. La figura è un supporto per interpretare il testo della Proposizione 2. Dunque, il rapporto fra l'area del cerchio e quella del quadrato risulta:

$$\pi r^2 / 4r^2 = 11/14$$

da cui

$$\pi = 22/7$$

Gli alunni potranno usufruire del quesito 3 per interpretare la Proposizione 3 del documento di Archimede (invero piuttosto impegnativa): potranno osservare che $1/7 = 10/70 > 10/71$.

Nel quesito 5, fra le due proposizioni viene creato un collegamento che non era suggerito all'interno del documento. Il valore che si ricava dalla Proposizione 2 è un'approssimazione per eccesso ed è uguale proprio a $3 + 1/7$.

Fonti dei documenti

Le due proposizioni di Archimede compaiono in Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, p. 220.

ARCHIMEDE

Archimede merita di essere citato in questa raccolta con una parte a lui riservata. La sua figura è arcinota, ma spesso appare con connotati legati più alla leggenda che alla realtà storica (ad esempio, qualche autore mette in dubbio che effettivamente gli specchi ustori siano stati impiegati con successo durante l'assedio di Siracusa).

Una raffica di proposizioni

Il primo documento vuole ribadire il ruolo fondamentale di Archimede nella storia della geometria: il fatto che alcune proposizioni in esso contenute riguardino la matematica della secondaria di primo grado non fa che avvalorare l'idea che i contributi dello scienziato di Siracusa stanno alla base delle nostre conoscenze nella disciplina. I riferimenti ad Eudosso di Cnido completano l'inquadramento storico.

Nelle attività 2, 3, 4, 5, all'alunno è richiesto di formalizzare alcune delle proposizioni incontrate all'interno del documento:

$A_p = (4/3)A_t$; $A_s = 4r^2\pi$; $A_{tot\ cil.} = (3/2)A_s$; $V_{cil.} = (3/2)V_s$; $V_{pir.} = (1/3)V_{prisma}$...
Per la padronanza del simbolismo letterale che viene in tal modo richiesta, queste attività appaiono maggiormente indicate per la secondaria di secondo grado.

L'area del cerchio e il metodo di esaustione

Il secondo documento è stato riadattato rispetto all'originale in quanto la dimostrazione è stata tralasciata e riformulata in termini, crediamo, meno pesanti all'interno delle attività di interpretazione del documento. Sono state fatte pure delle concessioni per quanto riguarda il rigore espositivo e l'effetto riteniamo che possa essere quello di un testo divulgativo sul metodo di esaustione. La scelta è motivata dall'esigenza di riportare nella presente raccolta un documento di grande rilevanza storica senza che la complessità della dimostrazione risulti scoraggiante per i nostri alunni.

L'utilizzo del metodo di esaustione segna secondo alcuni storici della scienza l'inizio dello sviluppo dell'analisi infinitesimale.

Con riferimento alle attività per interpretare il documento, va precisato che nell'originale Archimede non parla esplicitamente di apotema né di poligoni regolari. Inoltre, l'uso delle uguaglianze $A_c = A_t + p$ e $A_t = A_c + p$ ($p > 0$) si ritiene che possa servire a sostegno del discorso, per fissare l'idea iniziale, anche se esse non vengono utilizzate nel resto dell'argomentazione.

Fonti dei documenti

Entrambi i documenti si trovano in Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, rispettivamente alle pp. 85-6 e 220.

COORDINATE... CARTESIANE?

A partire dalla fine del XVII secolo, la geometria analitica contribuì a spostare l'asse degli interessi matematici dalla geometria sintetica euclidea ad altri ambiti d'indagine. Appena si determinarono le circostanze favorevoli legate allo sviluppo di un valido simbolismo, il metodo delle coordinate realizzò la grande impresa di unire saldamente numeri e figure, permettendo di trattare i problemi con un metodo diverso. È fondamentale anche il motivo dell'importanza didattica che ha oggi l'uso del piano cartesiano.

Nel 1300

Il metodo delle coordinate si è storicamente affermato allorché la comunità scientifica ebbe a disposizione adeguati strumenti algebrici. Il primo documento, però, ne riporta un utilizzo che risale al XIV secolo, periodo nel quale ovviamente non poteva comparire un simbolismo paragonabile a quello odierno.

Il documento di Oresme fornisce lo spunto dell'analisi qualitativa di un grafico: dal punto di vista didattico, ciò rappresenta un compito di rilievo. In questo caso si tratta di riconoscere se un diagramma tempo-spazio si riferisce ad un moto uniforme o uniformemente accelerato; Oresme propone esempi cinematici anche in altre parti della sua opera che qui non sono riportate.

Il quesito 3 riguarda un altro disegno dello stesso autore. L'altezza del rettangolo rappresenta la velocità media. Che l'area di abc , uguale a quella del rettangolo, rappresenti lo spazio percorso (s) lo si ricava proprio considerando che la velocità media è data dalla metà della velocità iniziale ($1/2 v_i$), la base rappresenta il tempo trascorso (t) e perciò si ottiene $s = 1/2 v_i \cdot t$: quest'ultima relazione fornisce, *mutatis mutandis*, anche una risposta all'ultimo quesito.

Uno dei padri

Da *La Géométrie* di Cartesio non riportiamo documenti. Ci serviamo invece di un documento di Fermat per presentare il tema delle coordinate in veste moderna; in

esso appare evidente l'analogia con il nostro modo di tracciare e denominare gli assi. Il documento mette in luce, per coordinate positive, il fatto che l'ascissa e l'ordinata di un punto rappresentano distanze, e non solamente 'etichette', come nella battaglia navale. Proprio per questo motivo la rappresentazione grafica ispirata a quella di Fermat, presente nelle attività *Per interpretare il documento*, può essere utile anche per la secondaria di primo grado, avendo l'accortezza di guidare gli alunni nel porre in forma esplicita l'equazione della retta, individuando la pendenza d/b .

Fonti dei documenti

La breve citazione compare in Boyer, 1976, p. 310. Il documento di Fermat è tratto da Manara e Lucchini, 1976, p. 117.

LA GEOMETRIA, DI EUCLIDE E NON

I teoremi della geometria euclidea sono rimasti per secoli delle verità incontrovertibili. Le dimostrazioni hanno costituito le conferme, ottenute con gli strumenti della logica, di fatti appartenenti alla realtà fisica e dei quali non si era disposti a dubitare. L'utilizzazione della geometria per lo studio dei fenomeni fisici nel quadro della scienza newtoniana forniva un'ulteriore giustificazione della sua validità. Le geometrie non euclidee hanno lottato con questa concezione e ne hanno prodotto lo scardinamento. Dal periodo della geometria greca, da cui è scaturita l'opera di Euclide, agli anni delle geometrie non euclidee sono passati due millenni.

Un'introduzione, autorevole ma...

Si riporta anzitutto l'autorevole introduzione di una citazione tratta da Aristotele che puntualizza alcuni aspetti del concetto di dimostrazione: essa può essere considerata un ausilio per interpretare il documento successivo, evidenziandone l'impostazione di fondo.

Gli *Elementi*: quasi una Bibbia

La parte dedicata agli *Elementi* di Euclide è centrata sulle prime pagine dell'opera che delineano il "metodo" euclideo (va segnalato che, molto probabilmente, viste le numerose trascrizioni, il documento giunto fino a noi è alterato rispetto all'originale). Questi documenti possono trovare collocazione didattica come introduzione ad un percorso sulla geometria oppure servire quale ripresa di alcuni aspetti della parte ini-

ziale di un percorso svolto utilizzando altri sussidi. I quesiti in forma di *item* di un questionario a risposta multipla, contenuti nella parte finalizzata all'interpretazione del documento, dovrebbero servire all'alunno ad analizzare l'elenco di "termini", "postulati" e "nozioni comuni", al quale dovrebbe sempre poter accedere quando sia chiamato a produrre una dimostrazione. Nella dimostrazione riportata nel documento e tratta dal *Libro primo* degli *Elementi* di Euclide compare l'esplicito riferimento a quelli che vengono di volta in volta utilizzati.

Due millenni dopo

La riflessione inizialmente tesa a produrre una dimostrazione di quello che Euclide riporta come quinto postulato ha uno sbocco inaspettato. I dettagli del ragionamento matematico di questa ricerca, anche riferendosi solo a parti dell'opera di un autore, sarebbero difficili da analizzare, per cui sono stati riportati due testi (di Saccheri e Lobacevskij) che chiariscono le idee di fondo del percorso, così come si è concretizzato nei secoli XVIII e XIX: compare solo un'attività di interpretazione dei documenti, che richiede all'alunno di riflettere anche alla luce della corposa introduzione che precede i due documenti e delinea lo svolgersi nei secoli delle vicende che hanno portato alle geometrie non euclidee.

Fonti dei documenti

I brani tratti dagli *Elementi* di Euclide sono presentati nella traduzione riportata in Manara e Lucchini, 1976, pp. 31-3; i documenti di Saccheri e Lobacevskij compaiono in Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, pp. 117, 119, 120.

TRIGONOMETRIA

I concetti di base della trigonometria sono molto antichi.

Nell'*Almagesto* di Tolomeo troviamo relazioni equivalenti a:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

Come si può vedere dal documento riportato, non si ricorreva ancora ad abbreviazioni, come si è soliti fare al giorno d'oggi. Esse vennero introdotte nell'opera *Trigonometry*, di William Oughtred (1574-1660): *s* (per *seno*), *t* (per *tangente*), *se* (per *secante*) e così via.

Da un manuale del 500

La prima edizione dell'opera di Pitiscus dalla quale è tratto il documento risale al 1595. Il testo è in latino e gli stralci riportati sono copia dell'originale. Ciò può suggerire una collaborazione pluridisciplinare per l'analisi del testo. Tuttavia, per l'alunno che non abbia già affrontato lo studio del latino si è preferito riportare alcune domande per mettere a fuoco i concetti essenziali, ricavandoli dal documento. Di quest'ultimo non vi è però la necessità di comprendere tutte le parti in quanto, a volte, tendono a risultare piuttosto prolisse. Dunque:

- a. il seno "retto" degli archi BC o BG è il segmento di retta BE;
- b. il seno "retto" degli archi BF o BH è BK;
- c. il seno "verso" dell'arco BC è EC;
- d. il seno "verso" dell'arco BG è GE;
- e. la tangente dell'arco BC è LC;
- f. la secante dell'arco BC è AL.

Esaminando l'attività 2, osserviamo che il "seno retto" corrisponde al seno come lo intendiamo oggi, ma non va dimenticato che solo nel Settecento, con Eulero, il cerchio goniometrico viene ad avere raggio unitario. Analoga corrispondenza vale, *mutatis mutandis*, per la tangente e la secante.

Viene fatto un implicito riferimento all'uguaglianza $\text{sen}\alpha = \text{sen}(\pi - \alpha)$ con la frase "sinus rectus arcus BC vel BG est recta BE" o anche "sinus rectus arcus BF vel BH est recta BK".

Fonti dei documenti

I documenti di Pitiscus sono estratti da *Trigonometriae*, Francoforte, Hoffmann, 1612, pp. 30-3.

COS'È LA TOPOLOGIA

Oltre alla soluzione del famoso problema dei sette ponti di Königsberg, Eulero fornisce le linee per un metodo che oggi troviamo in teoria dei grafi: le regioni sono punti detti vertici, i ponti sono archi che congiungono i vertici; un vertice è *pari* se da esso esce un numero pari di archi, altrimenti *dispari*...

L'importanza didattica del documento risiede nel fatto che propone un problema rilevante nella storia della matematica, accattivante e tutto sommato accessibile ad un buon numero dei nostri studenti.

Alcuni passi della soluzione, richiamati nelle attività di interpretazione del testo, possono essere destinati agli alunni della secondaria di primo grado, ma la dimostrazione nel suo complesso trova una più naturale collocazione in quella di secondo grado.

Una nuova geometria

La prima parte del documento di Eulero non è seguita da attività per l'alunno in quanto appare in sé molto chiara ed esplicativa degli orientamenti della nuova "geometria situs". Del grande matematico svizzero, in questa raccolta abbiamo già fornito altri esempi dell'efficacia come didatta: nella parte sui logaritmi ed in quella sulla soluzione di problemi con equazioni.

Il problema dei ponti di Königsberg

Come fatto nella parte sui problemi del primo capitolo, anche qui viene riportato anzitutto il problema, così come è delineato dall'autore. L'attività di interpretazione si pone proprio come stimolo all'alunno affinché provi lui direttamente a produrre una soluzione o almeno un parere sulla risolvibilità del problema.

Il ragionamento di Eulero

In effetti la soluzione è molto articolata e del testo originale vengono riportate solo alcune parti, quelle che, riteniamo, sono essenziali alla comprensione. L'alunno può cogliere, con un impegno adeguato nello studio del documento, un tratto della genialità di Eulero.

La dimostrazione si articola nelle seguenti fasi essenziali:

- per indicare l'attraversamento dei sette ponti una e una sola volta servono otto lettere;
- la lettera A (l'isola a cui arrivano cinque ponti) deve comparire tre volte, B (regione a cui arrivano tre ponti) deve comparire due volte, C due volte, D due volte: $3+2+2+2=9$ e quindi il problema è impossibile.

Eulero aggiunge: "Una tal passeggiata esiste se il numero dei ponti aumentato di una unità dà la somma dei numeri che indicano quante volte deve comparire ciascuna lettera."

Fonti dei documenti

I documenti sono riportati in Manara e Lucchini, 1976, da p. 167 a p. 171.

IN PIÙ... NUMERI SOLIDI

I documenti offrono ancora lo spunto per riflettere sulle successioni e per riutilizzare quanto visto nel caso dei numeri figurati poligonali. Le attività proposte agli alunni rispetto ai primi due documenti prevedono una riformulazione del testo e l'indicazione di altri elementi delle successioni.

Riguardo alla caratteristica dei cubi che Bachet de Méziriac fece notare nell'Appendice al Libro sui numeri poligonali di Diofanto (il primo cubo è costituito dall'unità; il secondo cubo è costituito dalla somma dei due dispari successivi; il terzo cubo è costituito dalla somma dei tre dispari successivi; e così di seguito), l'alunno può scrivere:

$$1^3=1$$

$$2^3=3+5$$

$$3^3=7+9+11$$

$$4^3=13+15+17+19$$

$$5^3=21+23+25+27+29$$

...

Suggeriamo anche un'attività di approfondimento che si collega a quelle indicate nella parte sui numeri figurati del presente fascicolo e che l'insegnante può farsi carico di proporre agli alunni. La relazione di Cartesio afferma che un cubo è sempre esprimibile come differenza tra il quadrato del numero triangolare di pari lato e il quadrato del triangolare che lo precede.

$$N^3=(T_N)^2 - (T_{N-1})^2$$

Per la dimostrazione, si possono utilizzare le relazioni viste nella parte precedente sui numeri poligonali:

$$N=T_N - T_{N-1}$$

$$N^2=T_N + T_{N-1}$$

Fonti dei documenti

I documenti sono riportati in Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, pp. 48-49-50.

Capitolo 3

Temî di matematica moderna

LA LOGICA: SCIENZA ANTICA MA ATTUALE

Forse più che nelle altre parti del volume, la scelta dei documenti è finalizzata a puntualizzare alcuni dei concetti di fondo di una possibile proposta didattica. In effetti la logica, nel suo sviluppo storico, merita un ampio spazio, considerandola un vasto capitolo della filosofia e non intendendola quindi solamente come *logica matematica*.

Cosa sono i connettivi logici

I brevi documenti introducono i principali connettivi logici. Didatticamente si prestano ad essere utilizzati in parallelo al libro di testo o come completamento di una presentazione dell'insegnante. Crediamo che sia significativo per l'alunno fare mente locale riguardo al periodo a cui i documenti appartengono, per cogliere come sia antica l'analisi del linguaggio.

Le attività di interpretazione del documento propongono una riflessione sull'uso dei connettivi, ed in alcune, le proposizioni connesse sono più di due.

L'attività di approfondimento numero 4 sviluppa un inciso presente nel documento di Galeno ("possono essere vere non soltanto una" delle proposizioni connesse) ed introduce il connettivo *aut* nella cui tabella di verità compare che $p \text{ aut } q$ è falsa anche se sia p che q sono vere. La stessa tabella di verità viene pure riportata, ma non nella forma schematica dei manuali. L'ultima attività propone però proprio una ricerca sui libri per stimolare l'alunno a individuare le corrispondenze con quanto proposto nei documenti.

L'arte di... ragionare

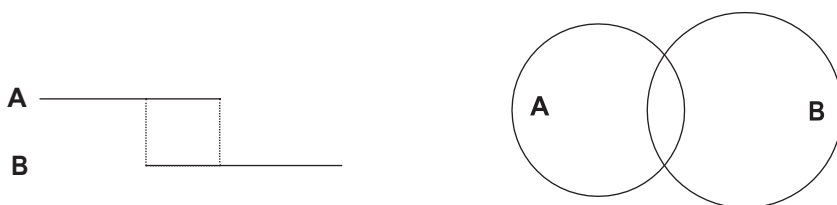
Il breve documento di Aristotele propone solo pochi esempi degli schemi di inferenza della logica antica e medioevale.

In *Per interpretare il documento*, al ragionamento del punto a. va associato il primo schema di Aristotele; al ragionamento b. va associato il quarto. Lasciamo all'insegnante il compito di verificare la correttezza degli esempi prodotti dagli alunni, come viene richiesto nella successiva attività (buon lavoro!).

La matematica si impadronisce della logica

La produzione degli esempi, richiesti nella prima consegna per interpretare il documento di Leibniz, può essere anche alla portata degli alunni della secondaria di primo grado.

All'affermazione «Alcuni cittadini europei sono nati in America» si può associare una rappresentazione come:



dove A indica l'insieme delle persone con cittadinanza europea e B quello delle persone nate sul suolo americano.

Analoga rappresentazione si può utilizzare per l'esercizio riguardante gli elefanti.

Le attività 4, 5 e 6 sono impregnate sull'utilizzo del termine "qualche" che nel linguaggio quotidiano ha un significato spesso diverso che in matematica.

L'ultima attività aiuta la risposta agli altri due quesiti. In particolare si potrà discutere con gli studenti perché anche i diagrammi relativi alla "Proposizione universale negativa" possono essere accettati per la risposta al quesito 4.

Per interpretare il documento di Boole, viene richiesto di enucleare il ruolo che l'autore attribuisce al linguaggio: esso non è considerato solamente un mezzo per esprimere il pensiero ma uno strumento della ragione. Sembra di capire che, allora, forme diverse di linguaggio determinano ragionamenti diversi...

Oggi si parla di linguaggi non verbali, di linguaggi figurativi che non sempre esprimono aspetti della "ragione umana" ma spesso mettono in evidenza i risvolti irrazionali. Boole fa capire che questo tipo di considerazioni è al di fuori degli scopi del suo trattato: a questo proposito, si può richiamare quanto detto nella lettera di Russell a Frege (in questo capitolo, nella successiva sezione dedicata alla logica per gli aspetti fondazionali della matematica) nella quale compare un accenno alla necessità di eliminare le considerazioni di tipo psicologico per un corretto approccio alla logica matematica.

Nell'algebra di Boole i simboli 0 e 1 possono essere interpretati come, rispettivamente "il nulla" (l'insieme vuoto) e "l'universo".

Nel testo si possono trovare uguaglianze del tutto analoghe a quelle proposte fra le attività di approfondimento: $yy=y$; $0 \cdot 1=0$ (come caso particolare di $0y=0$); $1xy=xy$; $0xy=0$.

Fonti dei documenti

I documenti presenti in *Cosa sono i connettivi logici*, ne *L'arte di... ragionare* e quello di Leibniz sono tratti da Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, pp. 403-5 e pp.412-3; il documento di Boole è tratto da Manara e Lucchini, 1976, pp. 299-206.

LA LOGICA PER COSTRUIRE I NUMERI

Il carteggio fra Frege e Russell fornisce lo spunto per affiancare aspetti concettuali - a onor del vero piuttosto impegnativi nel quadro della secondaria superiore - ad aspetti aneddotici. Questi ultimi possono contribuire a dare l'idea dell'impegno e del travaglio che hanno accompagnato le indagini di Frege: in questo senso contribuiscono a "umanizzare" la matematica e a connotarla come processo radicato nella realtà vissuta.

Gottlob Frege e Bertrand Russell

Frege è l'ideatore di un simbolismo logico che ha costituito la struttura portante del suo tentativo fondazionale. Tuttavia, oggi esso è abbandonato, a causa dell'infelice scelta delle notazioni. Russell ha ripreso il tentativo avviato da Frege di ricostruire la matematica sulle basi della logica, cercando di ovviare agli inconvenienti determinati dalle *antinomie* (di esse si vedano gli alcuni esempi presenti nei documenti).

Unitamente alla precedente parte sulla logica, questa, relativa alla costruzione dei numeri, va considerata per le sue potenzialità didattiche in chiave interdisciplinare, viste le sue valenze filosofiche.

Nei documenti, va fissata l'attenzione sull'uso da parte di Frege del termine "concetto". Essi riguardano la definizione del numero 0 (associato ai concetti contraddittori) e quindi del numero 1 (associato al concetto "uguale a zero" perché un unico oggetto cade sotto questo concetto). È pure riportata la definizione di un numero naturale che segue immediatamente un altro. Per chi non ha avuto modo di leggere in precedenza testi che riguardano gli aspetti logico-fondazionali ci potrà essere un iniziale sconcerto ma, e una raccomandazione va fatta ai nostri studenti, un'attenta (ri)lettura consentirà di recuperare i punti centrali.

Le attività di *Per interpretare il documento* tendono proprio a focalizzare questi tre punti. Per quanto riguarda il succedersi di due numeri naturali, viene riportato un esempio relativo alla quotidianità.

I quesiti che seguono richiedono allo studente di produrre a sua volta degli esempi (riteniamo che nella didattica della matematica questo tipo di attività vada rivalutato).

Nella successiva lettera di Russell, la parte più impegnativa riguarda l'analisi delle antinomie, e su di essa sono centrate le attività di interpretazione del documento.

L'approfondimento di Grelling va considerato un aspetto complementare che conclude il discorso sulle antinomie con un esempio dovuto ad un altro autore.

Nell'approfondimento numero 3 è posto un interrogativo di natura prettamente filosofica. In effetti il dibattito sull'eliminazione dalla logica degli aspetti psicologici è storicamente stato cruciale nella fase in cui i matematici hanno portato a compimento la loro "appropriazione" degli aspetti dai quali ha avuto origine appunto la *logica matematica*. Anche i filosofi possono riconoscere ciò come un merito dei matematici (i quali saranno ben lungi dall'affermare che la filosofia non possa dire la propria per quanto riguarda il ruolo della psicologia). Sull'argomento si possono trovare testimonianze dirette in altri scritti di Frege che in edizione italiana sono presenti in Frege 1965, *Logica e aritmetica* (scritti raccolti a cura di Corrado Mangione), Boringhieri, Torino. Fornirà elementi di riflessione allo studente rivedere, nella parte sulla logica in questo volume, il documento di Boole nel quale l'autore parla di "leggi del pensiero".

Fonti dei documenti

I documenti sono riportati in Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, pp. 441-6.

MISURIAMO LA CASUALITÀ

Il calcolo delle probabilità è una delle parti della matematica più recenti. Varie sono le cause che storicamente hanno ostacolato il suo sviluppo: il fatalismo, ad esempio, che si opponeva all'idea che fosse utile conoscere il futuro ed era alimentato anche da fattori religiosi legati al manifestarsi del volere divino nella natura. Va pure rilevata la circostanza che il calcolo delle probabilità ha iniziato il suo sviluppo come branca moderna della matematica proprio nel periodo in cui la disponibilità di un adeguato simbolismo favoriva la nascita della geometria analitica e del calcolo infinitesimale.

La raccolta di testi per gli alunni è rappresentativa dei diversi modi, storicamente documentati, di concepire la probabilità. Viene anzitutto proposto uno scritto di Galileo in cui egli affronta un problema di natura combinatoria legato al gioco dei dadi. Segue l'analisi di un problema, ancora riferito al gioco d'azzardo, tratto dalla corrispondenza intercorsa fra Pascal e Fermat nella quale appaiono considerazioni

che appartengono ad una visione moderna della probabilità. Il documento di Laplace è degno di nota in quanto in esso appare la definizione che, all'inizio del Diciannovesimo secolo, contribuì a fare chiarezza rispetto ad un concetto di probabilità rimasto fino ad allora ambiguo. Quella di Laplace è divenuta la concezione classica, ma nel Ventesimo secolo si sono venute affermando altre concezioni, due delle quali (la frequentista e la soggettivista) sono presenti in questo volume con altrettanti documenti. Alcune parti possono essere adattate per l'utilizzo nella secondaria di primo grado.

Galileo e un problema sul lancio di tre dadi

Il problema era stato sottoposto a Galileo da alcuni giocatori fiorentini. Essi avevano notato che, con tre dadi, i punteggi 9, 10, 11, 12 si ottengono con lo stesso numero di “triplicità” diverse prescindendo dall'ordine ($9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3$, $10 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+3+5 = 2+4+4 = 3+3+4$, $11 = \dots$), e tuttavia avevano osservato che risultava più conveniente scommettere sull'uscita dei punteggi 10 e 11. In effetti a questi due punteggi competono 27 casi favorevoli mentre a 9 e 12 solo 25 (infatti, permutando: $9 = 1+2+6 = 1+6+2 = 2+1+6 = 2+6+1 = 6+1+2 = 6+2+1 = \dots$, $10 = 1+3+6 = 1+6+3 = 3+1+6 = 3+6+1 = 6+1+3 = 6+3+1 = \dots$). La differenza così esigua nel numero dei casi favorevoli avrà fatto sì che, per accorgersi della maggiore convenienza a scommettere su 10 e 11, i giocatori avranno dovuto tener nota di un numero davvero rilevante di esiti di lanci.

Centrale nel documento è la tabella: nelle colonne intestate con i diversi punteggi sono riportate le “triplicità”; accanto ad ognuna di esse compare il numero di terne diverse che si ottiene considerando l'ordine (per quanto visto poco sopra, accanto a “6 3 1” compare 6, accanto a “6 2 2” compare 3 in quanto, permutando, $10 = 6+2+2 = 2+6+2 = 2+2+6$). Completando con la parte che riguarda i punteggi maggiori di 10 si ottiene:

18		17		16		15		14		13		12		11	
6 6 6	1	6 6 5	3	6 6 4	3	6 6 3	3	6 6 2	3	6 6 1	3	6 5 1	6	6 4 1	6
				6 5 5	3	6 5 4	6	6 5 3	6	6 5 2	6	6 4 2	6	6 3 2	6
						5 5 5	1	6 4 4	3	6 4 3	6	6 3 3	3	5 5 1	3
								5 5 4	3	5 5 3	3	5 5 2	3	5 4 2	6
										5 4 4	3	5 4 3	6	5 3 3	3
												4 4 4	1	4 4 3	3
	1		3		6		10		15		21		25		27

Presumibilmente non tutti gli alunni riusciranno a cogliere a pieno, fin da subito, i termini del problema, ma comunque troveranno stimolante l'analisi dei casi possibili che compaiono nella tabella e, al termine, per molti il problema si chiarirà. Va raccomandato loro di rileggere anche più volte il documento per cogliere i pregi della prosa di Galileo.

Scambi epistolari

Il problema “delle parti” sul quale verte il documento viene riportato nella presentazione al documento ed è formulato in una versione leggermente adattata rispetto all'originale di Pascal. All'insegnante si suggerisce di chiedere agli alunni di provare a risolverlo autonomamente, ma senza aspettarsi che siano molte le soluzioni corrette: si tratta infatti di un quesito che ha tratto in inganno matematici di peso come fra' Luca Pacioli... Solitamente gli studenti si fanno coinvolgere e sono disposti a formulare congetture personali. Su di esse si potrà riflettere in classe. Come è emerso in esperienze precedenti, l'errore più frequente è dovuto all'utilizzo di strategie risolutive legate alla proporzionalità.

Seguendo il ragionamento di Pascal, le attività di interpretazione del documento forniscono una guida dettagliata alla risoluzione del problema. Va tuttavia tenuto presente che Pascal utilizza un modo non usuale (anche se utile alla comprensione del problema) per calcolare la media aritmetica fra due valori: ciò offre lo spunto per la successiva attività di approfondimento.

La concezione classica della probabilità

Il documento tratto dall'opera di Laplace si presta ad attività in collaborazione con l'insegnante di filosofia. Nella prima parte del brano l'autore giustifica il ricorso a considerazioni probabilistiche per supplire alla limitatezza della conoscenza umana, che non è in grado di cogliere, in un determinato istante, le posizioni di tutti i corpi e le forze che agiscono su di essi. Da queste considerazioni e sviluppando il concetto di determinismo (meccanicismo) può scaturire la risposta al quesito di approfondimento.

L'enunciato della concezione classica (o, per l'appunto, *laplaciana*) costituisce, dal punto di vista strettamente matematico, la parte rilevante del documento. L'osservazione di Laplace sulla lotteria francese può servire come spunto didattico per una riflessione sul gioco del lotto e sui numeri ritardatari che, se l'imbussolamento ed il sorteggio vengono fatti in modo corretto, ad ogni estrazione non hanno una probabilità di uscita diversa dagli altri.

Altre considerazioni riguardano l'induzione con un interessante esempio di Fermat sui numeri primi. Questo passo approfondisce il tema dell'avvicinamento progressivo alla certezza in matematica, e dal punto di vista del contenuto disciplinare si può considerare una digressione. Si pone, tuttavia, su una linea di continuità con la riflessione di tipo filosofico a cui si accennava poc'anzi, così come le riflessioni richieste agli studenti nei quesiti 3 e 6. Nel complesso, si tratta dunque di un documento molto ricco di sollecitazioni per inserire le conoscenze matematiche in un quadro interdisciplinare.

Altre concezioni di probabilità

In questa sezione vengono riportati due documenti che introducono alle recenti concezioni di probabilità soggettivista e frequentista (esistono altre definizioni di probabilità, come quella assiomatica di Kolmogorov che stabilisce un collegamento con la teoria degli insiemi).

I due documenti non presentano difficoltà dal punto di vista matematico: solo quello di von Mises richiede la conoscenza della notazione riguardante i limiti di funzioni.

Nelle attività di interpretazione del testo è richiesto agli alunni di soffermarsi sul concetto di "sequenze infinite di esperienze uniformi" che richiama la necessità di ripetere le prove (idealmente un numero infinito di volte) sempre nelle stesse condizioni.

In un'attività di approfondimento viene richiesto agli alunni di descrivere una situazione in cui si utilizza un approccio frequentista alla probabilità: per rispondere, l'insegnante potrà, ad esempio, richiamare come viene stabilita la probabilità di sopravvivenza fino ad una certa età. Si potrà ripetere la stessa richiesta anche a proposito della concezione soggettivista (in questo caso si potrà pensare alle scommesse in campo sportivo); l'ultimo quesito stabilisce proprio un collegamento con il successivo testo di de Finetti.

Il documento di de Finetti, pur nella sua brevità, mette a fuoco la collocazione di quella soggettivista rispetto alle altre concezioni di probabilità. Al termine, viene proposta agli alunni, come approfondimento, una riflessione sulla soggettività in matematica: evidentemente si tratta di uno stimolo destinato a raccogliere rare risposte soddisfacenti ma si ritiene che valga la pena di proporlo se non altro per evidenziare l'originalità dell'idea di de Finetti.

Fonti dei documenti

Il testo di Galileo è riportato in Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, pp. 344-5-6- 7 e così pure quelli di Pascal alle pp. 351-2, di von Mises alle pp. 388-9 e di de Finetti alle pp. 390-1. Il documento di Laplace è stato ricavato da Manara e Lucchini, 1976, pp. 173-187.

INFINITO

Sul concetto di infinito gli alunni hanno avuto modo di riflettere fin dalla scuola primaria: la successione dei numeri naturali, i numeri frazionari, la retta, il piano ecc. Definire quando un insieme è infinito è un compito difficile, ma nella secondaria superiore si può tentare di affrontarlo. I brani proposti intendono fornire una traccia per riflettere su alcuni aspetti del concetto multiforme di infinito. Questa è stata la scelta di fondo ed è quindi risultato praticamente inevitabile che la parte assumesse un certo carattere di frammentarietà. Due linee guida sono comunque costituite dalla ricerca di spunti interdisciplinari e dal riferimento agli insiemi numerici.

Corridori, frecce, lepri, tartarughe,...

Il documento iniziale è quello più antico e richiama i paradossi di Zenone (quello di Achille e della tartaruga e quello della freccia) noti agli studenti che abbiano già affrontato i loro primi studi filosofici. In effetti tutta la parte sull'infinito si presta a raccordi interdisciplinari con la filosofia.

I concetti di infinito attuale ed infinito potenziale seguono i nostri alunni nel loro itinerario di formazione matematica e con essi devono rapportarsi in maniera corretta, pena l'instaurarsi di misconcetti. Gli alunni si dimostrano in genere propensi a recepire l'infinito potenziale: lo utilizzano fin dai primi anni di scuola ragionando sul fatto che la successione dei numeri naturali 'prosegue senza mai arrestarsi'; se ne servono poi operando con i limiti di funzioni reali. Quando però devono esaminare una scrittura come $0,\overline{9}$, difficilmente sono disposti ad ammettere che indichi il numero 1. Nelle loro argomentazioni riferiscono che $0,\overline{9}$ significa scrivere 9 dopo la virgola e poi ancora 9... ragionando, così, in termini di infinito potenziale: non sono disposti ad accettare che $0,\overline{9}$ comprenda già infiniti 9.

Gli ulteriori approfondimenti ed estensioni potranno riguardare le somme di infiniti termini come, appunto, $0,9+0,09+0,009+\dots$ ovvero $9/10+9/100+9/1000+\dots$. Detta s questa somma, per determinarne il valore si può ragionare così:

$$\begin{aligned} s &= 9/10 + 9/100 + 9/1000 + \dots = \\ &= 1/10 \cdot (9 + 9/10 + 9/100 + 9/1000 + \dots) = \\ &= 1/10 \cdot (9 + s). \end{aligned}$$

Si tratterà quindi di risolvere l'equazione:

$$s = 1/10 \cdot (9 + s) \text{ da cui } s = 1.$$

Analogamente, nel caso del paradosso della freccia si tratterà di calcolare $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots$

Gli alunni stessi rilevano paradossi dell'infinito come quando, ragionando sugli asintoti, qualcuno dice: 'Ma il grafico a un certo punto si stabilizzerà, smetterà di avvicinarsi alla retta: come può continuare ad avvicinarsi senza mai toccarla?' Appare particolarmente significativo affrontare un discorso specifico sul tema dell'infinito anche per ricercare risposte ad interrogativi come questo.

Quando il tutto non è maggiore della parte

Che il tutto sia maggiore della parte è una delle "Nozioni comuni" degli *Elementi* di Euclide. Un insieme infinito, secondo la definizione di Dedekind (si veda oltre), invece, è 'grande' quanto una sua parte propria. È quello che mette in risalto in maniera esplicita Galileo mostrando che i numeri quadrati sono tanti quanti i numeri naturali. È quello che illustra Farey descrivendo come è possibile mettere in corrispondenza biunivoca i razionali positivi ed i naturali (cominciando a contare da 1...).

Nelle attività per interpretare il contenuto dei documenti, è richiesto di passare dalle frazioni ai numeri razionali considerando che $1/1$ è equivalente a $2/2$, che $1/2$ è equivalente a $2/4$ ecc.: rifacendo l'elenco riportato in tabella, 3 diventerebbe il quarto termine, $1/4$ il quinto ecc.

Approfondendo, è facile costruire un elenco che mostri come i numeri interi siano a loro volta numerabili:

0 +1 -1 +2 -2 +3 ...

Analogamente, si può mostrare che anche i razionali lo sono:

0 +1 -1 +1/2 -1/2 +2 -2 ...

L'infinito, fonte di altri paradossi

Bolzano ha realizzato un'opera interamente dedicata ai paradossi dell'infinito. Nel documento presentato in questa raccolta, compare un'affermazione ("non tutti gli insiemi infiniti possono essere considerati uguali tra loro") che, nei decenni successivi, verrà ad assumere significati sorprendenti con la teoria dei numeri *transfiniti* di Cantor. In effetti però, l'argomentazione di Bolzano si contrappone, con un esempio tratto dalla geometria, a quanti "definiscono l'infinito come qualcosa non suscettibile di ulteriore aumento": il passo può risultare ambiguo nel senso che, come suggerisce l'attività 2, le due semirette a cui fa riferimento Bolzano si possono mettere in corrispondenza biunivoca e quindi non è vero che una contenga 'più punti' dell'altra.

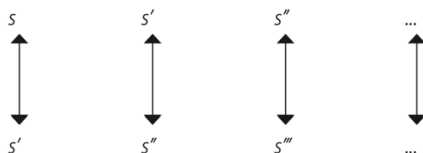
Sistemiamo le conoscenze

Questo titolo è motivato dal fatto che con Dedekind si giunge alla fondamentale definizione, riportata nel primo documento, sulla distinzione fra insiemi finiti ed infiniti che racchiude e spiega gli esempi paradossali degli autori precedenti.

Più avanti viene inoltre presentata la sua celebre “creazione dei numeri irrazionali” attraverso le “sezioni”, che completa i cospicui riferimenti agli insiemi numerici contenuti nei documenti visti sopra.

Le attività di interpretazione del primo documento sono centrate sul concetto di corrispondenza biunivoca, che con esse viene perfezionato ma che si ritiene debba essere preliminarmente rivisto dagli studenti con l’aiuto dell’insegnante o con l’ausilio del libro di testo.

Con una rappresentazione sagittale, la corrispondenza biunivoca fra l’insieme $\{s, s', s'', s''', \dots\}$ e una sua parte propria può essere visualizzata come segue:



Le attività di approfondimento richiedono un’applicazione diligente dei concetti di *iniettività* e *suriettività* che si possono trovare illustrati in forma analoga su molti libri di testo. L’ultima domanda chiede di riflettere sull’impossibilità, nel caso specifico, di costruire una corrispondenza biunivoca.

Le attività di interpretazione del successivo documento, che ha come aspetto centrale il concetto di “sezione”, comprendono alcune considerazioni sui numeri razionali e sul concetto di “misura comune”, assolutamente rilevanti nelle matematiche elementari. Nelle uguaglianze numeriche riportate, si ottiene:

$$1/4 \cdot 3 = 3/4 \text{ e } 1/4 \cdot 4 = 1; \text{ e inoltre } 1/8 \cdot 6 = 3/4 \text{ e } 1/8 \cdot 8 = 1$$

Per quanto riguarda l’introduzione dei numeri irrazionali, $\sqrt{2}$, ad esempio, produce una “sezione” in quanto “determina una ripartizione del sistema $\mathbb{R}$ in due classi A_1, A_2 [che hanno come unione $\mathbb{R}$] di tale natura che ogni numero a_1 della prima classe A_1 è minore di ogni numero a_2 della seconda classe A_2 ”.

Le attività di approfondimento stimolano l’alunno, con considerazioni che rinviavano anche ad altre fonti bibliografiche, a documentare il fatto che “esistono infinite lunghezze incommensurabili con la data lunghezza unitaria”. L’affermazione che $k \cdot \sqrt{2}$ è incommensurabile con la lunghezza unitaria se $\sqrt{2}$ lo è può far sorgere negli studenti l’esigenza di una piccola dimostrazione. L’ultimo quesito rinvia ad una riflessione

sull'aspetto delle “sezioni essenzialmente distinte” già analizzato nelle precedenti attività di interpretazione del documento.

Fonti dei documenti

Il primo documento è tratto da Aristotele, *La fisica*, libro VI (Z), 9, 239 b, trad. di A. Russo, Edizioni Laterza, Bari, 1968. Il brano di Galileo sui numeri quadrati è riportato in Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, p. 247. La citazione di Farey è riportata in Odifreddi, 2003, p. 208. Il documento sui paradossi dell'infinito di Bolzano è riportato in Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, p. 422. In Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, pp. 426-7, 337 e 339-40, compaiono pure i brani di Dedekind sull'infinito e su continuità e numeri irrazionali.

IL PARADISO DI CANTOR

La parte dedicata a Cantor si configura come un approfondimento per lo studente ed un completamento dell'itinerario sull'infinito. Cantor merita di essere trattato a parte per la singolarità degli apporti che ha saputo fornire alla matematica. Hilbert, nel secondo documento, mette in risalto la grandezza della sua figura. Molti autori attribuiscono a Cantor anche la dimostrazione della numerabilità dei razionali, che in questo volume abbiamo accreditato a Farey.

I numeri reali sono di più dei naturali

La dimostrazione di Cantor utilizza la *reductio ad absurdum* portandoci a concludere che i numeri di un intervallo reale non possono venire scritti in un elenco, vale a dire che non hanno “la potenza della serie 1, 2, 3, ... v , ...”. In realtà egli non fa riferimento agli sviluppi decimali ma utilizza due soli simboli, per cui nelle attività per gli studenti ci si è serviti della scrittura binaria dei numeri. Gli alunni vengono guidati nell'interpretazione del documento suggerendo la trascrizione dei passi salienti della dimostrazione e richiedendo la produzione di esempi specifici che contribuiscano a fissare le idee.

Cantor, secondo Hilbert

Di altra impostazione è il brano di Hilbert: egli non riporta dimostrazioni ma richiama alcuni dei risultati più notevoli dell'opera di Cantor. Per lo studente, il documento può costituire una valida sintesi per toccare alcuni aspetti dell'infinito matematico che forniscono, oltretutto, richiami interdisciplinari: infinito attuale e potenziale, numerabilità dei razionali, non numerabilità dei punti di un segmento reale.

Fonti dei documenti

Il documento di Cantor è tratto da Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992, p. 430; quello di Hilbert è una nostra traduzione di passi tratti da Hilbert, 1926, *Über das Unendliche*, *Mathematische Annalen*, n. 95, pp. 167-8-9.

INFINITESIMI PRIMA DI NEWTON E LEIBNIZ

I problemi che affrontarono molti matematici del Cinque-Seicento (determinazione di massimi e minimi, ricerca di tangenti e quadrature) sono serviti come base di partenza per le indagini di Newton e Leibniz. Anche dal punto di vista didattico, l'esame di alcuni di questi problemi può essere una valida propedeutica allo studio dell'analisi infinitesimale, fin dalla secondaria di primo grado.

Il cerchio

Di Kepler riportiamo anzitutto la dimostrazione della formula per l'area del cerchio, alla quale era giunto anche Archimede e della quale si era parlato a proposito del metodo di *esaustione*. Si può osservare che l'enunciato della proposizione nei due autori è del tutto analogo. Kepler utilizza però un approccio, se vogliamo dir così, divulgativo, maggiormente accessibile: la sua dimostrazione appare alla portata di un alunno della scuola secondaria di primo grado, anche se il lavoro con il documento originale potrà essere limitato all'interpretazione della figura; nella preparazione dei ragazzi, un prerequisito che dovrà essere curato con attenzione è saper individuare un'altezza esterna ad un triangolo ottusangolo.

I quesiti di interpretazione del testo riguardano la puntualizzazione dei passi fondamentali della dimostrazione di Kepler e la formalizzazione dell'area (A) di un cerchio moltiplicando per il raggio (r) la circonferenza e dividendo per 2:

$$A = 2\pi r \cdot r / 2 = \pi r^2$$

Il toro

Di Kepler riportiamo un altro documento nel quale egli utilizza considerazioni infinitesimali per determinare il volume del toro a sezione circolare od ellittica. Il ragionamento è basato sulla osservazione che i "dischi sottilissimi" nei quali il toro si può immaginare suddiviso hanno nel loro centro uno spessore medio, dato che negli "estremi, cioè D e E, considerati insieme, assume il doppio dello spessore, che ha nel mezzo dei dischi". Ecco che allora appare del tutto legittimo pensare che il toro sia equivalente ad un cilindro che ha come base la sezione dell'anello e "la cui altezza è uguale alla lunghezza della circonferenza descritta dal centro della figura ruotante".

Al di là di qualche piccola parte del documento che uno studente potrebbe non trovare immediatamente chiara ad una prima lettura, il ragionamento di Kepler sembra poter essere condiviso dagli alunni ed appare interessante in vista degli utilizzi del calcolo integrale per la determinazione dei volumi.

Gli indivisibili

Vengono riportati due brani tratti da parti differenti dell'opera principale di Cavalieri. Nei quesiti di interpretazione del documento viene puntualizzata l'osservazione che, a detta dell'autore, ha dato l'avvio alla sua ricerca sugli *indivisibili*: facendo ruotare un parallelogramma e un triangolo che abbiano rapporto 2 si possono ottenere un cilindro e un cono che hanno rapporto 3; facendo ruotare due segmenti di rapporto due si ottengono cerchi di rapporto 4 e così via (vedere i dettagli nel documento). Cavalieri osserva che ciò dipende da come si prendono le sezioni: il parallelogramma nel caso del cilindro e il triangolo nel caso del cono appartengono a sezioni passanti per l'asse e queste sezioni si intersecano. Analogamente, il raggio appartiene ad una "porzione intercetta" del cerchio passante per il centro.

Cavalieri introduce quindi il principio che anche al giorno d'oggi è ricordato con il suo nome. L'enunciato originale appare di non agevole interpretazione ma l'alunno potrà essere facilitato dall'esame delle figure inserite nelle attività successive, che sarà in grado di affrontare anche se la comprensione del documento non fosse completa.

I quesiti conclusivi sono tratti da proposizioni che compaiono in molti libri di geometria: a tutti si può dare una risposta grazie al principio di Cavalieri e all'individuazione di sezioni equivalenti, ottenute con rette o piani paralleli.

Fonti dei documenti

I documenti sono riportati in Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, 1992: quelli di Kepler su cerchio e toro alle pp. 229-30; quelli di Cavalieri alle pp. 231 e 239.

LIMITI, DERIVATE, INTEGRALI

La creazione dell'analisi infinitesimale è legata ai nomi di Leibniz e Newton (al primo dobbiamo buona parte del simbolismo attualmente in uso). Volendo individuare alcune tappe preliminari dell'evoluzione storica, dovremmo risalire fino ad Archimede, alla riscoperta di quest'ultimo nel Cinquecento, allo studio dei problemi di massimo e minimo, di quadratura, di determinazione del volume e della tangente nel Seicento.

È nota anche la polemica che nacque fra i due grandi pensatori, in seguito alla quale si determinò una spaccatura nella comunità matematica europea: anglosassoni da una parte e continentali dall'altra.

Il successo dell'analisi infinitesimale è legato alla sua efficacia come strumento per l'interpretazione dei fenomeni naturali e le critiche che vennero mosse, riguardo ad una presunta mancanza di rigore, non compromisero il suo progressivo affermarsi.

Fra i nomi dei matematici che contribuirono allo sviluppo del calcolo infinitesimale ricordiamo i fratelli Bernoulli (Jakob (1654-1705) e Johann (1667-1748), Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813), Cauchy (1789-1857).

Linee e integrali

Osserviamo che, se x_0 fosse un numero razionale, con il metodo proposto da Roberval non si avrebbero ascisse irrazionali. Egli inoltre usa l'espressione "pour n infini" e così appare evidente che considera un infinito attuale, interpretato come fosse un numero. Per quanto riguarda le soluzioni dei quesiti proposti agli alunni, in dettaglio:

1) $h, 2h, 3h, \dots, nh$.

2) $ah^2 + a(2h)^2 + \dots + a(nh)^2 = ah^2 + 4ah^2 + \dots + n^2 ah^2$.

3) $n\overline{AB} = nan^2 h^2 = an^3 h^2$.

4)
$$\frac{ah^2 + 4ah^2 + \dots + n^2 ah^2}{an^3 h^2} = \frac{ah^2(1 + 4 + \dots + n^2)}{an^3 h^2} = \frac{\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}}{n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

5) I termini $\frac{1}{2n}$ e $\frac{1}{6n^2}$ tendono entrambi a 0 quando n tende all'infinito e perciò il precedente rapporto tende a $1/3$.

Leibniz: "Differentiae" o Incrementi infinitesimi

Come riportato in Dupont, 1979-80, pp. 774-5, Leibniz accetta l'infinitesimo attuale (congiunge, infatti, due punti della curva infinitamente vicini). Questo ci crea delle difficoltà per quanto riguarda la retta tangente che noi consideriamo come posizione limite della retta secante. Ma in realtà cosa rappresenta dx ? Ancora Dupont ne parla a p. 778: "Nella *Nova Methodus*, si ha l'impressione [...] che sia un segmento arbitrario, ma fisso, cioè arbitrariamente fissato. Ma il dx , come segmento,

ed anche come lunghezza, finirà per essere variabile [...] potremmo considerarlo al pari della h che di solito appare nella definizione di derivata di una funzione”. Si noti il continuo alternarsi di riferimenti al pensiero di Leibniz e alla possibile interpretazione moderna. Questo suggerisce quale possa essere la sensibilità dello storico. In questi esempi, può essere spunto di riflessione anche per l’insegnante il quale può constatare come gli alunni stessi tendano a fare riferimento a infinito e infinitesimo attuali.

Per quanto riguarda la risposta ai quesiti riguardanti il primo documento di Leibniz presente nel volume per gli alunni:

- 1) $dv:dx=v:BX$.
- 2) Le proporzioni precedenti si giustificano poiché il triangolo rettangolo BVX è simile al triangolo avente un vertice in V e due lati dx e dv (basterà considerare due coppie di rette parallele tagliate dalla trasversale BV e gli angoli corrispondenti congruenti).

Per quanto riguarda il secondo:

- 1) utilizzando la regola del prodotto, otterremo $dax=adx+xda$ ed essendo $da=0$ avremo $dax=adx$.
- 2) $dx^2=dxx=xdx+xdx=2xdx$.
- 3) La scrittura $\frac{dy}{dx}$ suggerisce un significato geometrico riferito a “segmenti presi

ad arbitrio”, come dice lo stesso Leibniz. Egli non fa riferimento esplicito a quantità infinitesime, tuttavia in alto nella figura precedente appare un segmento indicato con dx che modernamente richiama proprio l’idea di infinitesimo. In sintesi, potremmo dire che la scrittura $\frac{dy}{dx}$ indica ‘un passaggio al limite’, come in effetti avviene nella

definizione di derivata: si tratta di un’interpretazione moderna che didatticamente sembra opportuno ribadire. La riflessione storica tratta da Dupont e riportata poc’anzi può essere utilizzata con gli stessi studenti per discutere punti di vista diversi da quello attuale che appaiono nella storia.

Newton: grandezze e moti continui

L’idea delle grandezze “generate da un moto continuo” si contrappone, interpretando quanto riferisce Newton nelle prime righe del documento, agli indivisibili di Cavalieri. Appare utile che gli alunni mettano a fuoco questa differenza, ma nella loro formazione matematica entrambi i punti di vista riteniamo che possano proficuamente coesistere ed integrarsi.

Il secondo punto delle attività di interpretazione è una riproposizione dei passi della costruzione geometrica illustrata all’interno del documento e l’alunno è chiamato semplicemente a leggere e rimeditare.

Nella sua argomentazione, Newton fa riferimento ad aree e a “flussioni”, in sostanza ad integrali e derivate. Con il terzo punto, all’alunno è offerto uno stimolo per estendere il significato che è in grado di attribuire alla relazione fra i due fondamentali concetti dell’analisi matematica: la complessità di tale relazione va ben oltre quanto espresso dal teorema fondamentale del calcolo infinitesimale, fino a richiedere allo studente forme nuove del suo pensiero matematico. Gli è richiesto di andare oltre gli aspetti calcolistico-operativi per ricercare una denotazione dei nuovi oggetti matematici (limite, derivata, integrale,...).

D’Alembert (1717-1783) rilevava che la teoria dei limiti è la base del calcolo infinitesimale. Nel secondo documento, vengono utilizzati termini come “quantità decrescenti”, e “limiti” che richiamano il rapporto incrementale e la definizione di derivata. Parlando di “velocità” e “ultimo rapporto” viene evocato il problema della velocità istantanea e in particolare della “velocità ultima di un corpo che giunga in un luogo dove il moto finisce”. La seconda attività di interpretazione del documento si basa sull’esame di una tabella di dati riguardanti due funzioni il cui rapporto non abbia un limite troppo facilmente individuabile a livello intuitivo da parte dell’alunno. La tabella ha un ruolo se vogliamo “metaforico” rispetto ai concetti matematici esaminati. Lakoff e Núñez, nel loro libro citato nella Bibliografia riportata al termine della presentazione di questo fascicolo, sostengono che “i concetti astratti sono compresi tipicamente in termini di concetti più concreti, attraverso le metafore”. In questo senso anche l’esame in modo intuitivo dei dati presenti in tabella può aiutare lo studente a fissare in punti essenziali del documento di Newton come l’osservazione sul fatto che i rapporti delle “quantità evanescenti” si avvicinano progressivamente al limite e possono farlo al di là di “qualunque differenza data”.

L’ultimo quesito va affrontato considerando le “fluente” (funzioni) come dipendenti dal tempo ed il limite del rapporto incrementale mostra i loro incrementi riferiti ad intervalli di tempo “piccoli a piacere” (a proposito di espressioni come, appunto, “piacere”, oppure “giacere” (una retta giace su un piano) ecc., c’è oggi chi parla scherzosamente di filone... “edonistico” della matematica!...).

Un limite notevole

- a) $\frac{(x+1)^m}{x^m} = \frac{\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^{m-i}}{x^m} = \frac{x^m + mx^{m-1} + etc.}{x^m} = \frac{x^m}{x^m} + \frac{mx^{m-1} + etc.}{x^m} = 1 + \frac{mx^{m-1} + etc.}{x^m}.$
- b) Nell’ultimo quoziente, il numeratore è un polinomio di grado minore del denominatore e perciò il limite è uguale a zero. Quindi
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^m}{x^m} = 1.$$

Fonti dei documenti

I documenti di Roberval, Leibniz e De Morgan sono stati utilizzati in Bergamini, Barozzi e Trifone, 2016, per attività di storia della matematica con sviluppi online; la figura tratta dall'opera di Roberval appare in Dupont, 1979-80, Vol. II Parte Prima, p. 219, le figure di Leibniz in Dupont, 1979-80, Vol. II Parte Seconda, pp. 765 e 771. Entrambi i documenti di Newton sono una selezione dagli originali riportati in Manara e Lucchini, 1976, pp. 131-5.

NON CI FERMIAMO QUI... E LA STORIA CONTINUA...

Chiudere un libro sulla storia della matematica con un fatto recente e con un elenco di problemi per gli anni a venire ha un significato ben preciso.

Come tutte le iniziative didattiche, così anche l'utilizzo della storia della matematica può produrre degli effetti non desiderati e il presente volume può inavvertitamente contribuire a produrne uno. Come tutti i libri di storia, si caratterizza ovviamente per l'attenzione rivolta al passato; in quanto libro riguardante la matematica per la didattica, riporta materiali attinenti ai contenuti oggi oggetto di studio nelle nostre scuole. L'effetto non desiderato può essere quello di portare a vedere la matematica come prodotto del passato che ha in quella che si studia a scuola il proprio punto di arrivo. Il fatto che esista una ricerca attuale, con le prospettive per il futuro che comporta, rimane misterioso.

In un'intervista di pochi anni fa, la stragrande maggioranza degli alunni della scuola secondaria di secondo grado era disposta a riconoscere che la matematica è una scienza ancor oggi in evoluzione. Gli esempi riportati a sostegno di questa convinzione erano però riferiti ad ambiti che con la matematica hanno solo un'indiretta attinenza: scienze sperimentali, tecnologia, medicina ecc. Ecco, quindi, l'esigenza di utilizzare la storia per sottolineare la "diacronicità" del "fenomeno-matematica" che spinga oltre il dato presente: il piccolo spunto fornito dalle ultime due pagine del volume per gli studenti è solo l'abbozzo di un'idea da sviluppare.

BIBLIOGRAFIA RAGIONATA

Anonimo (1478), *Larte de Labbacho*, Treviso, 125 pagine. L'opera è scaricabile dalla rete: <https://www.centromorin.it/info/abacho/abacho.htm>.

L'Autore è un "maestro d'abaco", secondo qualcuno un ecclesiastico. Lo scopo dell'opera è ben delineato nell'introduzione: fornire le conoscenze e le abilità a chi vuole inserirsi in attività commerciali. Comprende una parte sulla numerazione, una sulle operazioni cosiddette elementari, una su quesiti e problemi mercantili.

Bagni G.T. (1996), *Storia della matematica*, Vol. I, *Dall'Antichità al Rinascimento*, Pitagora Editrice, 228 pagine.

Bagni G.T. (1996), *Storia della matematica*, Vol. II, *Dal Rinascimento ai giorni nostri*, Pitagora Editrice, 205 pagine.

Dalla prefazione: "Questo libro propone una presentazione cronologica della storia della matematica, con particolare riferimento alle applicazioni didattiche. Ogni capitolo è stato corredato da alcuni 'temi di matematica', ovvero da alcune citazioni riguardanti il contenuto del capitolo, che il lettore è invitato a commentare".

Bergamini M., Barozzi G. e Trifone A. (2016). *Matematica.blu*, vol.4. Zanichelli, 378 pagine.

Il libro che Massimo Bergamini ha realizzato assieme a altri autori ha un successo che dura da molti anni. L'edizione pubblicata negli anni intorno al 2016 presenta schede di lavoro basate su documenti tratti dalla storia della matematica, con sviluppi online.

Rafael Bombelli da Bologna (1966), *L'ALGEBRA*, Prima edizione integrale, introduzione di U. Forti, prefazione di E. Bortolotti, Feltrinelli Editore, 669 pagine.

L'opera risulta accessibile anche ad un lettore del giorno d'oggi. Scritta intorno al 1550 è stata pubblicata in parte nel 1572 e poi nel 1579. Vi compare un accenno all'uso dei simboli per indicare le potenze dell'incognita, però in una forma diversa da quella attualmente in uso. Il *Libro primo* tratta del campo numerico per la risoluzione delle equazioni riducibili al primo e al secondo grado. Il *Libro secondo* studia le equazioni algebriche dei primi quattro gradi. Il *Libro terzo* è costituito da una raccolta di problemi di primo, secondo, terzo e quarto grado. Il *Libro quarto* comprende l'esame di problemi geometrici. Il *Libro quinto* contiene una raccolta di problemi tratti da Diofanto. Gli ultimi due non sono stati pubblicati fino al 1929.

Bottazzini U., Freguglia P. e Toti-Rigatelli L. (1992), *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, 521 pagine.

Raccolta di brani tratti dalla letteratura matematica, suddivisa in capitoli dedicati ad aritmetica, geometria, algebra, analisi infinitesimale, calcolo delle probabilità, logica e fondamenti: dalle origini al giorno d'oggi. Ciascun brano è corredato da un'introduzione e da note esplicative. Conclude l'opera una breve biografia dei matematici citati.

Il volume è di assoluto rilievo nel panorama della letteratura scientifica e avrebbe sicuramente meritato una maggiore diffusione.

Boyer C.B. (1976), *Storia della matematica*, ISEDI, trad. italiana, 752 pagine.

È forse il libro di storia della matematica più diffuso e conosciuto in Italia. Esso fornisce una ricca documentazione, dalle origini del pensiero matematico fin quasi ai giorni nostri.

Castelnuovo E. (1983a), *La matematica - I numeri*, La Nuova Italia, ristampa, 464 pagine.

Castelnuovo E. (1983b), *La matematica - La geometria*, La Nuova Italia, ristampa, 463 pagine e un'appendice di 15 tavole a colori.

Testo in due volumi per la scuola secondaria di primo grado che ha avuto negli anni numerose edizioni e ristampe. In esso la storia viene utilizzata come introduzione a ciascun capitolo.

Cerasaro S., e Salvatori S. (2025). La moltiplicazione di numeri rotti: un'esperienza didattica sulle frazioni ispirata al *Liber Abbaci* di Fibonacci. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 17, 132-153. Disponibile in www.rivistaddm.ch

L'articolo offre un interessante esempio di come un documento storico possa fornire lo spunto per attività didattiche su temi specifici. La lettura del documento risulta dunque orientata alle esigenze educative degli alunni a cui l'attività è destinata.

Demattè A. (2022). Relazione etica degli studenti con un documento tratto dalla storia della matematica. *Didattica della Matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, 12, 22-44. Disponibile in: www.rivistaddm.ch

Il resoconto di un'esperienza nella scuola secondaria superiore è preceduto da una parte teorica che riguarda l'approccio etico a un testo matematico. Viene sottolineato come un documento storico sia un "luogo" privilegiato per lo sviluppo di relazioni etiche.

Demattè A. e Tomasi L. (2022). La formula di Eulero per i poliedri: una proposta didattica di uso delle fonti originali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 45B, 69-93.

La celebre formula $V+F=S+2$ viene illustrata con riferimento all'articolo originale di Eulero (in latino). È offerta una gamma di possibili collegamenti interdisciplinari: storici, linguistici, matematici.

Demattè A. e Tomasi L. (2025). Terne pitagoriche: obiettivi e contenuti di un percorso didattico. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 48B, 177-203, Prima Parte; 231-249, Seconda Parte.

Il tema delle terne pitagoriche viene affrontato attraverso varie risorse matematiche e numerosi riferimenti storici.

Dunham W. (1992), *Viaggio attraverso il genio*, Zanichelli, 353 pagine.

Piacevole libro di divulgazione sulla storia della matematica, che racconta in modo appassionante la storia delle scoperte matematiche attraverso le vicende umane dei matematici protagonisti.

Dupont P. (1979-80). *Appunti di storia dell'analisi infinitesimale*, Levrotto e Bella. Vol. I, 376 pagine, Voll. II.1 e II.2, 921 pagine.

Il Volume Primo tratta delle Origini dell'analisi infinitesimale. Il Volume Secondo è diviso in due Parti: la Prima parla di Nascita e Sviluppo, la Seconda si sofferma su Newton e Leibniz. Si tratta di un'opera ampia, avvincente, scritta in modo vivace e personalissimo. La documentazione storica si integra con frequenti considerazioni didattiche e con riflessioni che mettono il lettore in sintonia con l'intento dell'autore.

Euler [The] Archive: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/>

Eccezionale raccolta di documenti, originali ma non solo: riferimento fondamentale per chi voglia accostarsi ad Eulero o realizzare approfondimenti. Si veda, ad esempio, l'articolo del 1748 *Elementa doctrina solidorum*, pubblicato nei *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 4, pp. 109-140.

Fauvel J. and Van Maanen J. (editors) (2000), *History in mathematics education: The ICMI Study*, Kluwer, Dordrecht-Boston-London, 437 pagine.

Il volume raccoglie contributi di numerosi autori, di vari paesi. Vengono esaminati i possibili utilizzi della storia della matematica per il lavoro in classe e ne vengono illustrati i riferimenti teorici. Continua ad essere un importante riferimento per i ricercatori.

Fibonacci (Leonardo Pisano) (1202), *Liber Abbaci*. Prima traduzione integrale in italiano disponibile in https://www.progettofibonacci.it/liber_Abbaci.html

I curatori del sito, Laura Catastini e Franco Ghione, hanno il merito di aver reso disponibile anche ai non specialisti un'opera che nella storia ha avuto una rilevanza forse unica. L'insegnante può trovare anche l'elaborazione di varie proposte per la classe.

Furinghetti F. (2002). *Matematica come processo socioculturale*. Studi e ricerche IPRASE Trentino, 191 pagine.

Il volume comprende una parte teorica e una riguardante i resoconti di esperienze realizzate in classe. La matematica viene considerata come prodotto della cultura.

Guedj D. (1997), *L'impero dei numeri*, Einaudi-Gallimard, 128 pagine e in più una raccolta di testimonianze e documenti a firma di Autori diversi.

Le prime 128 pagine sono riccamente illustrate con belle immagini a colori di documenti storici, di opere d'arte, di ritratti di scienziati, cosa che rende il volumetto pregevole al di là di alcune imprecisioni contenute nel testo.

Hersch R. (2001), *Cos'è davvero la matematica*, Baldini & Castoldi, 385 pagine.

Facendo il verso al famoso libro di Courant e Robbins, "che non spiega cos'è la matematica, ma cosa fa", presenta la disciplina in termini socio-storico-culturali.

Ilfrah G. (1983), *Storia universale dei numeri*, Arnoldo Mondadori, 585 pagine.

Volume eccezionale (anche se non esente da critiche) se si considera che è stato realizzato da un "ricercatore solitario". Esteso nella trattazione, raccoglie un gran numero di illustrazioni realizzate dall'Autore. Copre un arco temporale molto ampio che va dalla preistoria all'affermarsi del sistema posizionale decimale di origine indiana.

- Jacopo da Firenze** (1307) *Tractatus Algorismi*. Disponibile in traduzione inglese in http://akira.ruc.dk/~jensh/Publications/1999%7bc%7d_Jacopo-Tractatus_transcription.pdf e in versione originale in https://digi.vatlib.it/view/MSS_Vat.lat.4826, Circa un secolo dopo il *Liber Abbaci* di Fibonacci, Jacopo da Firenze ha realizzato un'opera che contiene vari aspetti che la distinguono da quella del suo più famoso predecessore.
- Joseph G.G.** (2003), *C'era una volta un numero*, Il Saggiatore, 444 pagine.
L'autore, di origine indiana, ha vissuto in Kenya e compiuto gli studi universitari in Inghilterra. Nel volume illustra "la vera storia della matematica", come recita il sottotitolo, soffermandosi approfonditamente sugli apporti delle civiltà extraeuropee. Ne deriva un quadro molto complesso e ricco di spunti di riflessione. Indicata come opera di divulgazione, per la comprensione di alcune sue parti richiede però buone conoscenze matematiche.
- Malisani E.** (1996), Storia del pensiero algebrico fino al Cinquecento, *Quaderni di Ricerca in Didattica*, n. 6 - "Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche" di Palermo.
Articolo ricco di citazioni dai documenti, scaricabile da internet.
- Manara C.F. e Lucchini G.** (1976), *Momenti del pensiero matematico - Letture su aspetti e problemi delle scienze matematiche*, Mursia, 269 pagine.
Interessante raccolta di scritti degli Autori storicamente più rilevanti, scelti con criteri di divulgazione. Alcuni possono essere adatti ai nostri alunni, altri risultano un po' prolissi. Il volume costituisce una valida traccia per chi desidera operare approfondimenti autonomi, anche servendosi della bibliografia riportata.
- Millán Gasca A., Mazzitelli A., Neri Macchiaverna F. e Spagnoletti Zeuli E.** (2017), Storia e racconto della Matematica nella scuola primaria: basi didattiche e sequenza operativa, in <https://annali.unife.it>.
Si tratta della presentazione di un progetto per l'introduzione di elementi della storia della matematica nelle classi della scuola primaria
- Neugebauer O.** (1974), *Le scienze esatte nell'Antichità*, Feltrinelli, 270 pagine.
Volume che non può mancare in una biblioteca considerato che l'autore è uno dei maggiori storici della Scienza di ogni tempo.
- Odifreddi P.** (2003), *Il diavolo in cattedra - La logica da Aristotele a Gödel*, Einaudi, 208 pagine.
Il volume comprende un approccio divulgativo alla logica ed alcune parti più impegnative, destinate ad un approfondimento dei temi trattati. Contiene numerose citazioni tratte dagli originali di logici e matematici.
- Percival I.** (2001), An Artefactual Approach to Ancient Arithmetic, *For the Learning of Mathematics* 21,3, pp. 16-21.
L'articolo illustra un interessante approccio ad alcuni documenti storici. In base ad esso, l'alunno al quale l'attività è destinata viene posto nel "ruolo dell'archeologo", viene chiamato, cioè, ad interpretare i dettagli dopo aver avuto un quadro del contenuto.

Schwartz R.K. (2002), *Finite Mathematics - Combinations and Their Sums*, dattiloscritto.

Accanto al lavoro sulla combinatoria il dattiloscritto prevede altre parti dedicate ai problemi di ottimizzazione e al metodo di falsa posizione. Si tratta del resoconto di esperienze didattiche attuate nel contesto multietnico dei College statunitensi: ecco quindi che il riferimento va non solo alle antiche Civiltà occidentali ma anche all'India, alla Cina, al Mondo arabo. Gli studenti sono stati chiamati ad analizzare documenti nel quadro della soluzione di problemi inizialmente posti in termini moderni.

Smith D.E. (1958), 1. *General Survey of the History of Elementary Mathematics*, 2. *Special Topics of Elementary Mathematics*, Dover Publications, inc. New York, 596 e 725 pagine.

L'opera è divisa in due volumi. La prima edizione risale agli anni Venti del secolo scorso. Il pregio principale consiste nella presenza di numerosi documenti originali accanto alla ricostruzione storica, che comunque è ampia ed esauriente e consente riferimenti pressoché a tutti i temi delle matematiche elementari affrontati nella nostra scuola primaria e secondaria.

Strijk D.J. (1986), *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Princeton University Press, 427 pagine.

Raccolta di brani che vanno dal XIII al XIX secolo, con poche eccezioni una delle quali è rappresentata dall'opera di Al-Khuwarizmi. Il lettore italiano, rispetto ad esempio al volume di Bottazzini, Freguglia e Toti-Rigatelli, deve tener conto degli adattamenti operati nella traduzione dei brani in lingua inglese. Sono comunque presenti numerosi, ampi commenti che aiutano la comprensione dei documenti ed il loro inquadramento storico.

La matematica su CD-rom. Una collezione di volumi antichi e rari di matematica e scienze affini. *Il giardino di Archimede - Un Museo per la Matematica*.

Nelle migliaia di pagine raccolte nella versione in dieci CD disponibile presso IPRA-SE, figurano opere di molti Autori. Spiccano l'*Opera omnia* di Cardano, gli *Éléments d'algebre* di Eulero, la *Mécanique analytique* di Lagrange. Il materiale si presta ad un lavoro di analisi storica su temi specifici. La raccolta è stata successivamente ampliata con la realizzazione di altri CD.

