

Prova di matematica

La prova che segue rappresenta un esempio del lavoro prodotto dal Dipartimento di Matematica del Liceo Artistico “Vittoria” di Trento e sottoposto a revisione dal gruppo di ricerca IPRASE-CRESPI. Nel caso si intenda utilizzare la prova con finalità valutative, si sottolinea la parzialità di ciascuna prova rispetto alla copertura dei contenuti disciplinari e la necessità di verificare il corretto funzionamento degli stimoli proposti attraverso apposita validazione *ex post*. L’attribuzione dei punteggi riportata nelle prove rappresenta una proposta che necessita di revisione a seguito della validazione e della priorità attribuita a ciascun obiettivo di apprendimento che si intende valutare.

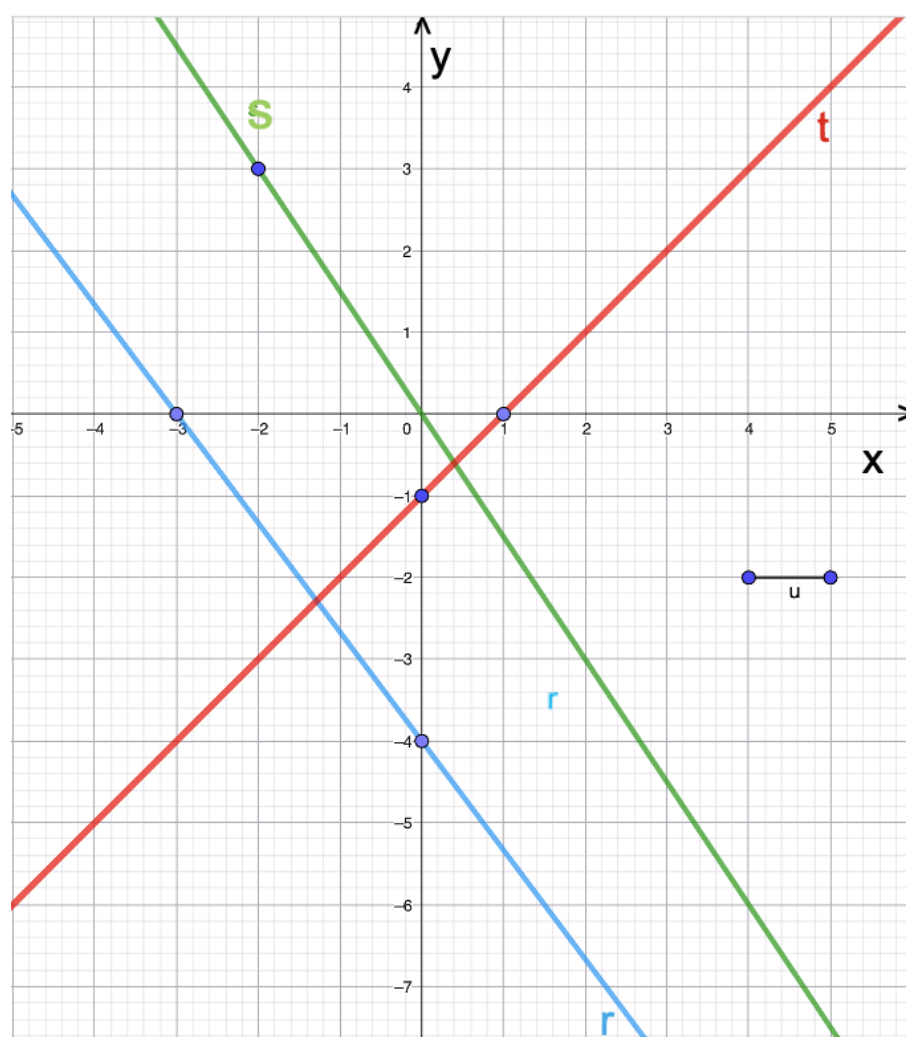
Informazioni generali sulla prova

Disciplina	Matematica
Indirizzo di scuola	Liceo artistico
Destinatari	Classi seconde
Parole chiave	Equazioni lineari, sistemi lineari e loro rappresentazione e interpretazione grafica; disequazioni lineari; proprietà, perimetro e area di triangolo rettangolo e quadrato

Struttura della prova

Obiettivi della prova	<p>Macro-Obiettivi (che la prova intende valutare):</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Interpretare e rappresentare graficamente rette e sistemi di rette, con coerenza tra la forma algebrica dell’equazione e la rappresentazione nel grafico cartesiano (O1, O2, O3) ● Applicare i metodi risolutivi di sistemi lineari (almeno uno) e riconoscere l’insieme soluzione (O4) ● Risolvere disequazioni lineari applicando prodotti notevoli e semplificazioni, ove opportune (O5) ● Interpretando i dati riportati sulle rappresentazioni delle figure, riconoscere e applicare proprietà note e formule per il calcolo di area e perimetro dei triangoli e dei quadrati (O6) ● Giustificare le strategie e i processi risolutivi adottati (O7) <p><u>Parte 1: Equazioni lineari, sistemi lineari e loro rappresentazione grafica</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ● O1. Rappresentare rette nel piano cartesiano e interpretare geometricamente i termini algebrici dell’equazione di una retta ● O2. Ricavare l’equazione di una retta interpretando il grafico che la rappresenta (lettura di coefficiente angolare/intercetta o della retta passante per due punti).
------------------------------	--

	<ul style="list-style-type: none"> ● O3. Rappresentare sistemi di equazioni lineari su un grafico cartesiano e interpretare la sua soluzione. ● O4. Risolvere sistemi lineari di due equazioni in due incognite attraverso manipolazione algebrica adottando un metodo risolutivo tra quelli studiati e riconoscendo l'insieme delle soluzioni: vuoto (Sistema impossibile), infinito (Sistema indeterminato), unica soluzione (Sistema determinato) <p><u>Parte 2: disequazioni lineari</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ● O5. Risolvere disequazioni lineari e disequazioni riducibili mediante sviluppo e semplificazione. <p><u>Parte 3: Geometria</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ● O6. Conoscere e applicare proprietà di figure note (triangolo rettangolo isoscele, quadrato) e formule di area/perimetro. <p><u>Trasversalmente:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> ● O7. Esplicitare un procedimento corretto e comprensibile, dimostrando la gestione dei vari passaggi di calcolo.
<p>Istruzioni</p>	<ul style="list-style-type: none"> ● Il tempo per eseguire la prova è di 120 minuti ● Prima di iniziare la prova, leggi tutti i quesiti e decidi l'ordine di esecuzione. ● Riporta le risposte nel protocollo a quadretti allegato alla prova. ● Mostra i passaggi essenziali in tutti i quesiti algebrici. ● Nei quesiti che richiedono di disegnare la soluzione usa una riga e fornisci, per quanto possibile, una rappresentazione ordinata degli assi cartesiani. ● Nel quesito di geometria indica proprietà e formule utilizzate prima di applicarle. ● Al termine della prova controlla di avere inserito tutte le informazioni richieste relative ai quesiti che hai risolto. ● Punteggio totale della prova: 50 punti. Soglia minima per il superamento: 30/50 (equivalente a 6/10).
<p>Quesiti</p>	<p><u>Parte 1: Equazioni lineari, sistemi lineari e loro rappresentazione grafica</u></p> <p>Q1. Equazioni di rette a partire dal grafico (9 punti: 3 per ogni equazione della retta individuata e corredata dalle informazioni richieste) Scrivi le equazioni delle rette r, s, t rappresentate in figura.</p>



Per ciascuna retta indica:

- i) l'equazione
- ii) il coefficiente angolare
- iii) l'intercetta
- iv) due punti appartenenti alla retta.

Q2. Rappresentazione grafica di una retta data l'equazione algebrica (3 punti)

- i) Disegna nel piano cartesiano la retta di equazione

$$y = 3x + \frac{1}{2}$$

- ii) Evidenzia nel grafico almeno due punti utilizzati per il tracciamento, indicandone le coordinate.

Q3. Sistema lineare: risoluzione algebrica e rappresentazione grafica della soluzione (10 punti: 4 punti per a) e 6 punti per b)

- i) Trovare l'insieme dei valori di x reali per cui il seguente sistema di equazioni ha soluzioni, utilizzando un metodo

algebrico (a scelta tra quelli studiati). Indica se il sistema è determinato, indeterminato o impossibile.

$$\begin{cases} -3x + y = -2 \\ 6x - 2y = 9 \end{cases}$$

- ii) Rappresenta graficamente le due rette nel piano cartesiano e indica l'insieme soluzione del sistema.

Q4. Sistema lineare: risoluzione algebrica (4 punti)

Risolvi algebricamente il seguente sistema, mostrando i passaggi principali. Indica se il sistema è determinato, indeterminato o impossibile.

$$\begin{cases} 2(x - 12) + 3y = -3y \\ 2(x - y - 6) = -(x - y) \end{cases}$$

Parte 2: Disequazioni

Q5. Disequazioni (12 punti: 3 punti per ogni disequazione)

Indica l'insieme dei valori di x reali che rendono vere le seguenti disequazioni. Dove possibile, applica i prodotti notevoli.

a) $\frac{1}{6} - \frac{(11-x)}{12} \geq -\frac{1}{12} + \frac{x}{6}$

b) $(5x - 2)^2 < (5x - 1)(5x + 1)$

c) $3[-(1 + x) + 5x] \leq x^1 + 2(1 - x)$

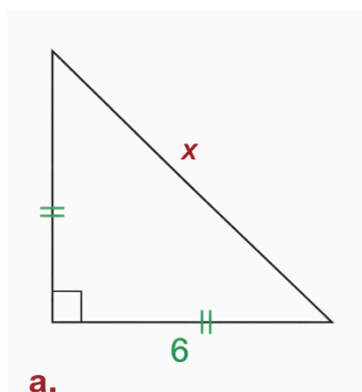
d) $(x - 1)(x + 1) > x^2 + 1$

Parte 3: Geometria

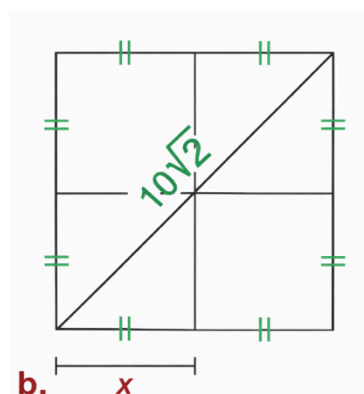
Q6. Geometria: calcolo di x, area e perimetro (12 punti: 6 punti per la Fig. a) e 6 punti per la Fig. b)

Per le due figure geometriche disegnate (Triangolo Fig. a e Quadrato Fig. b)

- i) calcola il valore di x
- ii) calcola area e perimetro



a.



b.

Giustifica le strategie e i procedimenti utilizzati per ricavare il valore di x e per calcolare area e perimetro, indicando:

- le proprietà delle figure e le formule di area e perimetro utilizzate
- esplicitando come si applicano al caso numerico specifico
- indicando chiaramente il risultato finale, accompagnato dall'unità di misura.

Risposte corrette

Q1. Equazioni delle rette r , s , t a partire dal grafico

[Una possibile risoluzione a partire dall'identificazione di due punti per cui passano le rette, esplicitando m e q . Si potrebbe anche calcolare direttamente l'equazione della retta dati due punti]

Nella figura si leggono alcuni punti appartenenti alle rette.

Per ogni retta calcolo il coefficiente angolare m e l'intercetta q per riportarmi all'equazione delle rette della forma $y = mx + q$.

- Retta r :

$$m = \frac{(-4-0)}{(0-(-3))} = -\frac{4}{3}; \text{ l'intercetta è } q = -4 \text{ perché per } x = 0 \text{ si ha } y = -4.$$

- Retta s :

La retta passa per l'origine $(0, 0)$, quindi $q = 0$; usando il punto $(-2, 3)$:

$$m = \frac{(3-0)}{(-2-0)} = -\frac{3}{2}$$

- Retta t:

Considerando i punti $(0, -1)$ e $(1, 0)$ appartenenti alla retta:

$$m = \frac{(0 - (-1))}{(1 - 0)} = 1; \text{ quindi } q = -1.$$

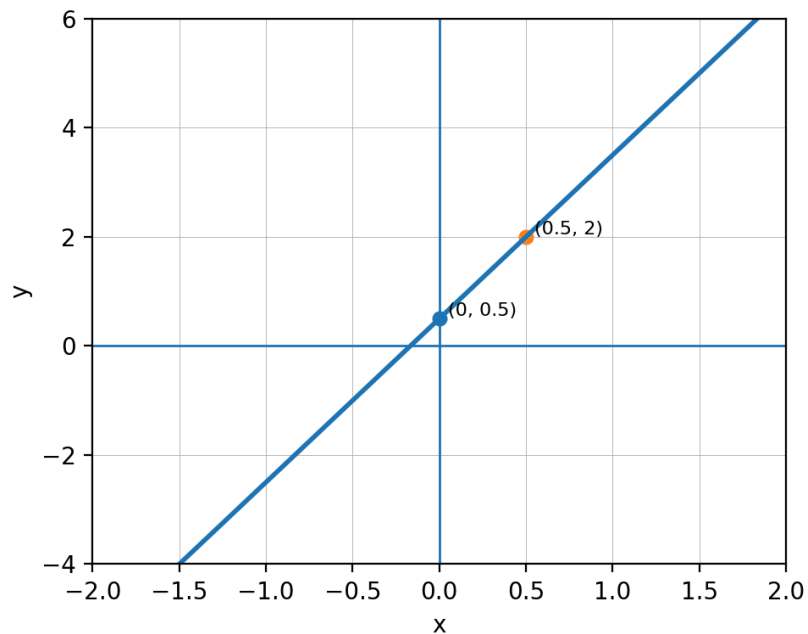
Retta	Equazione	m	q	Due punti (esempi)
r	$y = \frac{-4}{3}x - 4y$	-4/3	-4	$(-3, 0)$; $(0, -4)$
s	$y = \frac{-3}{2}x$	-3/2	0	$(0, 0)$; $(-2, 3)$
t	$y = x - 1$	1	-1	$(0, -1)$; $(1, 0)$

Q2. Rappresentazione grafica della retta $y = 3x + 1/2$

Per disegnare la retta, scelgo di trovare due punti appartenenti alla retta:

- Se $x = 0$ allora $y = 1/2$, quindi $A=(0, 1/2)$ è un punto appartenente alla retta
- Se $x = 1/2$ allora $y = 3 \cdot (1/2) + 1/2 = 2$, quindi $B=(1/2, 2)$ è un punto appartenente alla retta

Dato che per due punti passa una e una sola retta, posso tracciare nel grafico cartesiano la retta che passa per A e B.



Q3. Sistema lineare: risoluzione algebrica e rappresentazione grafica

Sistema:

$$\begin{cases} -3x + y = -2 \\ 6x - 2y = 9 \end{cases}$$

a) Risoluzione algebrica con (per esempio) il metodo risolutivo di eliminazione.

Moltiplico quindi la prima eq per 2 così elimino il termine y

$$2(-3x + y) = 2(-2) \Rightarrow -6x + 2y = -4$$

Sommando le due equazioni ottengo:

$$(-6x + 2y) + (6x - 2y) = -4 + 9 \Rightarrow 0 = 5 \text{ ovvero il sistema non ha soluzioni, } S = \emptyset.$$

b) Esempio di risoluzione

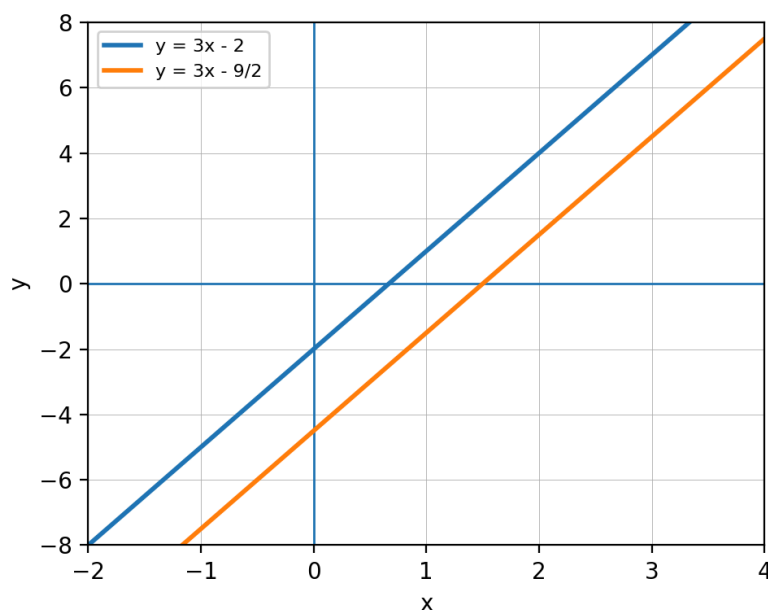
Riscrivo entrambe le equazioni in forma esplicita $y = mx + q$:

$$1) -3x + y = -2 \Rightarrow y = 3x - 2.$$

$$2) 6x - 2y = 9 \Rightarrow -2y = 9 - 6x \Rightarrow y = (6x - 9)/2 = 3x - 9/2.$$

Le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare $m = 3$ e quindi sono parallele. Hanno però intercette diverse (la prima -2 e la seconda $-9/2$), quindi non si incontrano e non hanno perciò una intersezione.

Il sistema risulta impossibile e l'insieme soluzione è $S = \emptyset$.



Come possiamo vedere anche tracciando le due rette corrispondenti alla prima e alla seconda equazione, queste sono parallele non coincidenti e quindi non si incontrano mai. Non può essere dunque indicato nel disegno l'insieme delle soluzioni perché risulta vuoto.

Q4. Sistema lineare: risoluzione algebrica

Sistema:

$$\begin{cases} 2(x - 12) + 3y = -3y \\ 2(x - y - 6) = -(x - y) \end{cases}$$

[ESEMPIO DI RISOLUZIONE, altri metodi possono essere applicati]

Semplifico le due equazioni:

$$1) 2(x - 12) + 3y = -3y \Rightarrow 2x - 24 + 6y = 0 \Rightarrow x + 3y = 12.$$

$$2) 2(x - y - 6) = -(x - y) \Rightarrow 2x - 2y - 12 = -x + y \Rightarrow x - y = 4.$$

Applico il metodo risolutivo di sostituzione.

Dall'equazione 2 ricavo l'uguaglianza che esprime il valore di x:

$$x = y + 4$$

Sostituendo nella prima equazione ottengo il valore di y:

$$(y + 4) + 3y = 12 \Rightarrow 4y = 8 \Rightarrow y = 2.$$

Quindi, sostituendo il valore di y nella seconda equazione, ho che:

$$x = 2 + 4 = 6.$$

Il sistema è quindi determinato e l'insieme soluzione è $S = \{(6, 2)\}$.

Q5. Disequazioni

$$a) \frac{1}{6} - \frac{(11-x)}{12} 2 \leq -\frac{1}{12} + \frac{x}{6}$$

$$\frac{1}{6} - \frac{(11-x)}{6} \leq -\frac{1}{12} + \frac{x}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{(1-11+x)}{6} \leq -\frac{1}{12} + \frac{x}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-10)}{6} \leq -\frac{1}{12} + \frac{x}{6}$$

Moltiplicando per 12 entrambi i membri della disequazione:

$$\Rightarrow 2(x - 10) \leq -1 + 2x$$

$$\Rightarrow 2x - 20 \leq -1 + 2x$$

$$\Rightarrow -20 \leq -1 \text{ (sempre vera).}$$

Soluzione: $S = \mathbb{R}$.

$$b) (5x - 2)^2 < (5x - 1)(5x + 1)$$

- $(5x - 2)^2 = 25x^2 - 20x + 4$ (quadrato di un binomio)

- $(5x - 1)(5x + 1) = 25x^2 - 1$ (differenza di quadrati).

Quindi la disequazione diventa

$$25x^2 - 20x + 4 < 25x^2 - 1$$

$$\Rightarrow -20x < -5$$

$$\Rightarrow x > 1/4.$$

Soluzione: $S = (1/4, +\infty)$.

$$c) 3[-(1 + x) + 5x] \leq x + 2(1 - x)$$

- $3[-(1 + x) + 5x] = 3(-1 + 4x) = -3 + 12x.$

- $x + 2(1 - x) = x + 2 - 2x = 2 - x.$

Quindi la disequazione diventa:

$$-3 + 12x \leq 2 - x$$

	<p> $\Rightarrow 13x \leq 5$ $\Rightarrow x \leq 5/13$. Soluzione: $S = (-\infty, 5/13]$. </p> <p> d) $(x - 1)(x + 1) > x^2 + 1$ </p> <p> Applicando il prodotto notevole $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, otteniamo $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$. Quindi la disequazione diventa $x^2 - 1 > x^2 + 1$ \Rightarrow (togliendo x^2 da entrambi i membri della disequazione) otteniamo $-1 > 1$ (impossibile). Soluzione: $S = \emptyset$. </p> <p> Q6. Geometria: calcolo di x, area e perimetro </p> <p> <u>Figura a) Triangolo rettangolo isoscele</u> </p> <p> a) Nel triangolo rettangolo i due cateti sono congruenti (il triangolo è isoscele) e misurano ciascuno 6 unità; l'ipotenusa è x. Applicando il Teorema di Pitagora, ovvero sapendo che il quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti, abbiamo che $x^2 = 6^2 + 6^2 = 72$ unità al quadrato, da cui ne deriviamo che $x = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ unità. </p> <p> b) Per trovare l'area, dato che si tratta di un triangolo rettangolo e che un cateto rappresenta la base del triangolo e l'altro l'altezza, abbiamo che, applicando la formula dell'area del triangolo, ovvero [(base x altezza): 2], l'area del triangolo sarà $A = (6 \cdot 6)/2 = 18$ unità². </p> <p> c) Il perimetro, ovvero la somma delle lunghezze dei lati del triangolo, sarà $P = 6 + 6 + 6\sqrt{2} = 12 + 6\sqrt{2}$ unità. </p> <p> <u>Figura b) Quadrato</u> </p> <p> a) In un quadrato, la diagonale è $d = \text{lato} \cdot \sqrt{2}$ unità. Dato che nella figura la diagonale è $d = 10\sqrt{2}$ unità, abbiamo che il lato del quadrato è $l = d/\sqrt{2} = 10$ unità. </p> <p> b) Nel disegno x rappresenta metà del lato l, allora $x = 10/2 = 5$. Applicando la formula dell'area del quadrato [$A = \text{lato}^2$] abbiamo che $A = 10^2 = 100$ unità². </p> <p> c) Poiché il perimetro è rappresentato dalla somma delle lunghezze dei 4 lati, $P = 4 \cdot \text{lato} = 40$ unità. </p>
Criteria di correzione/valutazione	Di seguito le griglie di correzione e le tabelle di attribuzione del punteggio

Griglia analitica di correzione con attribuzione dei punteggi

Quesito	Punti max	Descrittori	Credito parziale
---------	-----------	-------------	------------------

Q1	9	3 pt per ogni retta (r, s, t): scrittura dell'equazione e corretta indicazione di coefficiente angolare, intercetta, due punti appartenenti alla retta.	1 pt se retta con coefficiente corretto ma intercetta errata (o viceversa). 2 punti per equazione corretta ma mancata indicazione degli altri elementi richiesti (se mancano due tra i punti ii, iii, iv).
Q2	3	2 pt tracciamento coerente della retta, 1 pt scelta e indicazione di almeno due punti corretti	1 pt se i punti sono corretti ma il grafico è impreciso. 2 pt se la retta è tracciata approssimativamente ma i punti non sono indicati
Q3	10	4 pt risoluzione algebrica corretta, di cui: 2 pt procedimento: applicazione di un metodo risolutivo 2 pt conclusione: sistema impossibile; 6 pt rappresentazione grafica coerente delle due rette parallele distinte.	1 pt se metodo corretto ma errore di calcolo; 2 pt se procedimento corretto ma non si discute l'insieme delle soluzioni; fino a 2 pt grafico Parziale/impreciso ma coerente.
Q4	4	2 pt impostazione/riduzione del sistema; 2 pt soluzione corretta (x, y) e discussione della soluzione.	2 pt se procedimento risolutivo corretto ma errore di calcolo
Q5A	3	Sviluppo/semplificazione corretti e insieme soluzione.	Fino a 2 pt con procedimento corretto ma errore aritmetico finale.
Q5B	3	Espansione e confronto corretti; soluzione della disequazione.	Fino a 2 pt con prodotto notevole corretto ma errore nei passaggi finali.
Q5C	3	Riduzione corretta e soluzione della disequazione.	Fino a 2 pt con sviluppo corretto ma errore di segno.
Q5D	3	Riduzione corretta e conclusione (impossibilità).	Fino a 2 pt se applicato prodotto notevole e il confronto finale è impostato correttamente.
Q6a	6	2 pt calcolo x; 2 pt area; 2 pt perimetro del triangolo Tutti correttamente giustificati, proprietà e formule esplicitate	Fino a 5 pt se uso corretto di Pitagora anche con errore

			<p>numerico e si esplicitano e applicano correttamente le formule di area e perimetro. 4 pt Se risposte tutte corrette ma non giustificate adeguatamente</p>
Q6b	6	2 pt calcolo x; 2 pt area; 2 pt perimetro del quadrato. Tutti correttamente giustificati, proprietà e formule esplicitate	<p>Fino a 5 pt se viene riconosciuta la relazione diagonale-lato del quadrato e si esplicitano correttamente le formule di area e perimetro. 4 pt Se risposte tutte corrette ma non giustificate adeguatamente</p>

Criteria di valutazione: Indicatori minimi di superamento della prova

Nucleo	Descrittori	Evidenze	Esito
Rette nel piano	<p>Interpreta e rappresenta graficamente rette e sistemi di rette, con coerenza tra la forma algebrica dell'equazione e la rappresentazione nel grafico cartesiano:</p> <ul style="list-style-type: none"> - fornendo l'equazione almeno di una retta in Q1 - rappresentando almeno una retta tra Q1, Q4 	Q1-Q2-Q4	<input type="checkbox"/> Sì <input type="checkbox"/> No
Sistemi lineari	<p>Applica i metodi risolutivi di sistemi lineari (almeno uno) e riconosce l'insieme soluzione almeno in uno dei due casi proposti.</p>	Q3-Q4	<input type="checkbox"/> Sì <input type="checkbox"/> No

Disequazioni	Risolve correttamente o in modo sostanzialmente corretto almeno la maggioranza delle disequazioni lineari proposte applicando prodotti notevoli e semplificazioni, ove opportune (O5)	Q5	<input type="checkbox"/> Sì <input type="checkbox"/> No
Geometria e misure	Interpreta i dati riportati sulle due figure; Riconosce e applica correttamente proprietà/formule per ottenere x, area e perimetro in almeno una figura Fornisce giustificazioni sufficienti alla comprensione della strategia risolutiva adottata.	Q6	<input type="checkbox"/> Sì <input type="checkbox"/> No
Argomentazione	Negli esercizi algebrici e geometrici risolti: mostra i passaggi in modo leggibile e logicamente coerente	Trasversale	<input type="checkbox"/> Sì <input type="checkbox"/> No

Questa iniziativa è realizzata nell'ambito del Programma FSE+ 2021-2027 della Provincia autonoma di Trento, con il cofinanziamento dell'Unione europea - Fondo sociale europeo plus, dello Stato italiano e della Provincia autonoma di Trento.