Prova di matematica

La prova che segue rappresenta un esempio del lavoro prodotto dal Dipartimento di Matematica del Liceo Scientifico “B. Russell” di Cles e sottoposto a revisione dal gruppo di ricerca IPRASE-CRESPI. Nel caso si intenda utilizzare la prova con finalità valutative, si sottolinea la parzialità di ciascuna prova rispetto alla copertura dei contenuti disciplinari e la necessità di verificare il corretto funzionamento degli stimoli proposti attraverso apposita validazione *ex post*. L’attribuzione dei punteggi riportata nelle prove rappresenta una proposta che necessita di revisione a seguito della validazione e della priorità attribuita a ciascun obiettivo di apprendimento che si intende valutare.

Informazioni generali sulla prova

Disciplina	Matematica
Indirizzo di scuola	Liceo Scientifico - Doppia Lingua
Destinatari	Classi prime
Parole chiave	Espressioni algebriche; potenze e monomi; scomposizione di polinomi: divisioni tra polinomi; frazioni algebriche; equazioni algebriche; equazioni parametriche; problemi di geometria (congruenza e parallelogrammi)

Struttura della prova

Obiettivi della prova	**O1.** Applicare correttamente le proprietà delle potenze e le regole di calcolo con monomi e polinomi. **O2.** Scomporre polinomi in fattori irriducibili utilizzando tecniche note (differenza di quadrati, raccoglimento parziale, Ruffini). **O3.** Determinare la divisibilità di un polinomio rispetto a un binomio lineare ed eseguire la divisione (ad esempio, applicando il teorema di Ruffini) **O4.** Analizzare frazioni algebriche: scomporre numeratore e denominatore, esplicitare le C.E. e semplificare quando possibile. **O5.** Trovare l’insieme delle soluzioni reali di equazioni algebriche semplici, fratte e letterali discutendo correttamente i casi del parametro **O6.** Trovare l’insieme delle soluzioni reali di equazioni di grado superiore scomponibili (con le tecniche studiate, ad esempio la sostituzione) **O7.** Rappresentare e modellizzare con equazioni una situazione-problema in ambito geometrico e interpretare la soluzione nel contesto del problema. **O8.** Conoscere e applicare proprietà geometriche e criteri di congruenza per costruire una dimostrazione. **O9.** Trasversalmente: presentare un procedimento leggibile, logicamente coerente e matematicamente corretto
Istruzioni	• Il tempo a disposizione per la prova è di 120 minuti.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

- Strumenti consentiti: penna, matita, righello e squadra [eventuale uso della calcolatrice da specificare nella versione da somministrare].
- Leggi tutti i quesiti prima di iniziare e decidi l’ordine di esecuzione.
- Mostra i passaggi essenziali in tutti i quesiti algebrici: non indicare solo il risultato finale.
- Nei problemi e nelle dimostrazioni, la correzione terrà conto di correttezza matematica, completezza, coerenza logica e chiarezza espositiva.
- Al termine della prova controlla di avere risposto a tutti i quesiti che hai scelto di svolgere.
- Punteggio totale della prova: 60 punti. Soglia minima per il superamento: 36/60 (equivalente a 6/10).

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Quesiti

</td>
<td>

<u>Parte 1 – Calcolo algebrico e polinomi</u>

Q1. Semplificazione di espressioni (6 punti: 3 punti per (a), 3 punti per (b))
Semplifica le seguenti espressioni. Applica le proprietà delle potenze e le regole di calcolo dei monomi. Mostra i passaggi essenziali.

a) $$\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(1-\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4\div\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]-\left(\frac{1}{3}-2\right)^2\div 5$$

b) $$\left(\frac{1}{2}xy^2\right)^2(-3x)^3:\left(-\frac{9}{2}x^2y\right)^2+\left[\frac{3}{2}x^2y^3-(5xy)^2\cdot\frac{1}{4}y\right]:\left(\frac{57}{2}xy\right)$$

Q2. Scomposizione in fattori (9 punti: 3 punti per ciascuna espressione)
Scomponi in fattori irriducibili i seguenti polinomi.
a) $(a^2 - 2)^2 - (3a^2 + 1)^2$
b) $(a^2+2b)(2x-y)-b(b+2)(2x-y)$
c) $2y^3 - y^2 - 5y - 2$

Q3. Divisibilità e divisione tra polinomi (6 punti)
Calcola il valore di k affinché il polinomio seguente sia divisibile per $(y - 2)$.
$$P(y) = (k + 1)y^3 - 5y^2 - (3 + k)y - 3/2\cdot k$$
Esegui poi la divisione e determina il quoziente.

Q4. Frazione algebrica (4 punti)
Determina le condizioni di esistenza e semplifica, quando possibile, la seguente frazione algebrica:
$$\frac{x^2-4x+4}{x^3-x^2-2x}$$

<u>Parte 2 – Equazioni</u>

</td>
</tr>
</table>

	Q5. Equazioni (6 punti: 3 punti per ciascuna equazione) Risolvi le seguenti equazioni. Dove necessario, indica le C.E. Mostra i passaggi principali. **a)** $2/3 \cdot [(x - 1/2)^2 - (x + 1/2)^2] + (x - 1/3)^2 - x^2 = (2 - x)/3$ **b)** $(x^2 - 7x - 18) / (6 - 2x) = 0$ **Q6. Equazione letterale (6 punti)** Risolvi la seguente equazione letterale rispetto a x e discuti i casi del parametro a. Mostra i passaggi principali. **c)** $-a - x = 1 - a^2x$ **Q7. Equazioni di grado superiore (9 punti: 3 punti per ciascuna equazione)** Risolvi le seguenti equazioni di grado superiore. **a)** $(x^3 - 1)(2x^2 - 4x) = 0$ **b)** $(y - 1)(y + 2) - y^2 - 2y = 0$ **c)** $x^5 + x^3 - 20x = 0$ **<u>Parte 3 – Problemi</u>** **Q8. Problema di modellizzazione algebrica (6 punti)** In un rettangolo la base supera di 3 cm la metà dell'altezza. Sapendo che il perimetro misura 30 cm: a) calcola le misure dei lati e l'area del rettangolo; b) determina di quanto si devono accorciare entrambi i lati, della stessa quantità, affinché l'area diminuisca del 25% rispetto a quella iniziale. Spiega il procedimento e interpreta la soluzione nel contesto del problema. **Q9. Problema di geometria (8 punti)** Nel quadrato ABCD, sia O il centro. Traccia una retta r passante per O che incontra BC e AD rispettivamente in P e Q. Per A e C traccia due rette parallele fra loro che incontrano r rispettivamente in R e S. a) Rappresenta la situazione del problema b) Dimostra che i triangoli SAO e OCR sono congruenti. c) Deduci che il quadrilatero ASCR è un parallelogramma. Nella correzione saranno considerate: correttezza matematica, uso coerente di proprietà e teoremi, completezza e chiarezza dell'argomentazione.
Risposte corrette	**RQ1. Semplificazione di espressioni** **a)** $[(1 - 1/3)^3 \cdot (1 - 3/2)^3 + (1/3)^4 : (1/3)^3 \cdot (1/3)^2] - (1/3 - 2)^2 : 5$ ● Si ha: $(1 - 1/3)^3 = (2/3)^3 = 8/27$ e $(1 - 3/2)^3 = (-1/2)^3 = -1/8$. Quindi il primo prodotto vale $(8/27)\cdot(-1/8) = -1/27$.

- Inoltre: $(1/3)^4 : (1/3)^3 \cdot (1/3)^2 = (1/3)^{(4-3+2)} = (1/3)^3 = 1/27$.

La parentesi quadra vale dunque 0.

- Infine: $(1/3 - 2)^2 : 5 = (-5/3)^2 : 5 = 25/9 : 5 = 5/9$.

Risultato: $-5/9$.

b) $(1/2 \cdot x \cdot y^2)^2 (-3x)^3 : (-9/2 \cdot x^2y)^2 + [3/2 \cdot x^2y^3 - (5xy)^2 \cdot 1/4 \cdot y] : (57/2 \cdot xy)$

- Sviluppando le potenze:
  - o $(1/2 \cdot x \cdot y^2)^2 = 1/4\, x^2y^4$
  - o $(-3x)^3 = -27x^3$
  - o $(-9/2 \cdot x^2y)^2 = 81/4\, x^4y^2$

  Il primo termine diventa: $(1/4\, x^2y^4 \cdot -27x^3) : (81/4\, x^4y^2) = -1/3\, xy^2$.

- Per la parentesi quadra:
  $(5xy)^2 \cdot 1/4 \cdot y = 25/4\, x^2y^3$, quindi $3/2\, x^2y^3 - 25/4\, x^2y^3 = -19/4\, x^2y^3$.

- Dividendo per $57/2 \cdot xy$ si ottiene: $(-19/4\, x^2y^3) : (57/2\, xy) = -1/6\, xy^2$.

Risultato complessivo: $-1/3\, xy^2 - 1/6\, xy^2 = -1/2\, xy^2$.

RQ2. Scomposizione in fattori

a) $(a^2 - 2)^2 - (3a^2 + 1)^2 =$
$[(a^2 - 2) - (3a^2 + 1)]\cdot[(a^2 - 2) + (3a^2 + 1)] =$
$(-2a^2 - 3)(4a^2 - 1) =$
$-(2a^2 + 3)(2a - 1)(2a + 1)$.

b) $(a^2+2b)(2x-y)-b(b+2)(2x-y)=$
$(2x-y)[(a^2+2b)-b(b+2)]=$
$(2x-y)[a^2+2b-(b^2+2b)]=$
$(2x-y)(a2-b2)=$
$(2x-y)(a-b)(a+b)$

c) Provando con $y = -1$ si annulla il polinomio. Con Ruffini si ottiene il quoziente $2y^2 - 3y - 2$, quindi:
$2y^3 - y^2 - 5y - 2 =$
$(y + 1)(2y^2 - 3y - 2) =$
$(y + 1)(2y + 1)(y - 2)$.

RQ3. Divisibilità e divisione tra polinomi

Imponiamo $P(2) = 0$ per calcolare k:
$(k + 1)\cdot 8 - 5\cdot 4 - (3 + k)\cdot 2 - 3/2\cdot k = 0$.
$8k + 8 - 20 - 6 - 2k - 3/2\, k = 0$
$(9/2)k - 18 = 0$.
Quindi $k = 4$.

Sostituendo $k = 4$: $P(y) = 5y^3 - 5y^2 - 7y - 6$
Dividiamo per $(y - 2)$
Facciamolo in modo esplicito con Ruffini, usando 2:

$$
\begin{array}{c|cccc}
2 & 5 & -5 & -7 & -6 \\
 & & 10 & 10 & 6 \\
\hline
 & 5 & 5 & 3 & 0
\end{array}
$$

- quoziente: $5y^2 + 5y + 3$
- resto: 0

Quindi $P(y) = (y - 2)(5y^2 + 5y + 3)$

Dividendo per $(y - 2)$ si ottiene il quoziente $Q(y) = 5y^2 + 5y + 3$.

RQ4. Frazione algebrica
Numeratore: $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.
Denominatore: $x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x - 2)(x + 1)$.
Condizioni di esistenza: $x \neq 0$, $x \neq 2$, $x \neq -1$.

Semplificando il fattore comune $(x - 2)$, si ottiene:
$(x^2 - 4x + 4) / (x^3 - x^2 - 2x) = (x - 2) / [x(x + 1)]$.

RQ5. Equazioni

a) $2/3 \cdot [(x - 1/2)^2 - (x + 1/2)^2] + (x - 1/3)^2 - x^2 = (2 - x)/3$

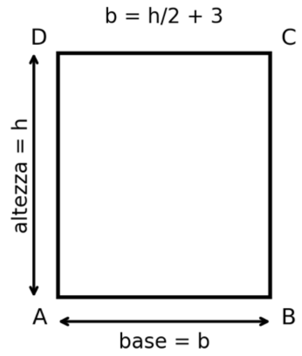
Si ha: $(x - 1/2)^2 - (x + 1/2)^2 = (x^2 - x + 1/4) - (x^2 + x + 1/4) = -2x$.
Quindi il primo termine vale $-4x/3$.

Inoltre: $(x - 1/3)^2 - x^2 = x^2 - 2x/3 + 1/9 - x^2 = -2x/3 + 1/9$.
Il membro sinistro diventa $-2x + 1/9$.
Risolvendo:
$-2x + 1/9 = (2 - x)/3$.
$-18x + 1 = 6 - 3x$
$-15x = 5$
$x = -1/3$.

b) $(x^2 - 7x - 18) / (6 - 2x) = 0$

C.E.: $6 - 2x \neq 0$, quindi $x \neq 3$.

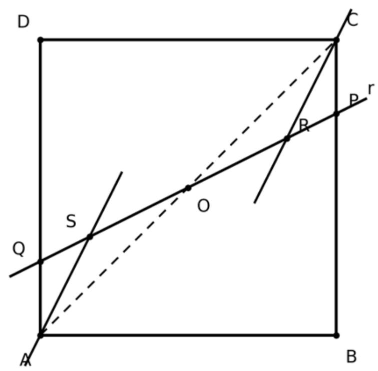
	Una frazione è uguale a 0 se e solo se il numeratore è nullo e il denominatore è diverso da 0. Risolvo dunque : $x^2 - 7x - 18 = 0$ $(x - 9)(x + 2) = 0$ Soluzioni: $x = 9$ e $x = -2$; entrambe sono accettabili perché diverse da 3. **RQ6. Equazione letterale** $-a - x = 1 - a^2x$ $(a^2 - 1)x = a + 1$ ● Se $a \neq 1$ e $a \neq -1$, allora $x = (a + 1)/(a^2 - 1) = 1/(a - 1)$: determinata. ● Se $a = 1$, l'equazione diventa $-1 - x = 1 - x$, cioè $-1 = 1$: impossibile. ● Se $a = -1$, l'equazione diventa $1 - x = 1 - x$: indeterminata. **RQ7. Equazioni di grado superiore** **a)** $(x^3 - 1)(2x^2 - 4x) = 0$ Si ha $x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$; inoltre $2x^2 - 4x = 2x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ oppure $x = 2$. Soluzioni: $x \in \{0, 1, 2\}$. **b)** $(y - 1)(y + 2) - y^2 - 2y = 0$ $y^2 + y - 2 - y^2 - 2y = 0$ $-y - 2 = 0$ $y = -2$. **b)** $x^5 + x^3 - 20x = 0$ $x(x^4 + x^2 - 20) = 0$. Pongo $t = x^2$. $t^2 + t - 20 = 0$ $(t + 5)(t - 4)=0$ Ho come soluzioni: $t=-5$ e $t=4$. ● Da $t = -5$ non si hanno soluzioni reali; ● Da $t = 4$ si ottiene $x = \pm 2$. Insieme soluzione: $x \in \{-2, 0, 2\}$. **RQ8. Problema di modellizzazione algebrica** Indico con b la base e con h l'altezza. Dato che la base supera di 3 cm la metà dell'altezza, si ha $b = h/2 + 3$.



Dai dati, il perimetro è 30 cm quindi:
$2(b + h) = 30cm$
$b + h = 15$ cm
Sostituendo b:
$h/2 + 3 + h = 15cm$
$3h/2 = 12cm$
$h = 8$ cm.
Allora $b = 7$ cm.

Area iniziale: $A = b·h = 7·8 = 56$ cm^2.
Se si accorciano entrambi i lati della stessa quantità t, la nuova area deve essere il 75% di 56, cioè 42 cm^2.
Si imposta allora:
$(7 − t)(8 − t) = 42cm^2$
$56 − 15t + t^2 = 42$ cm^2
$t^2 − 15t + 14$ cm^2 $= 0$ cm^2
$(t − 1)(t − 14) = 0$ cm^2.
La sola soluzione accettabile nel contesto è che l'accorciamento sia $t = 1$ cm perché t=14 non ha senso per le misure di b e h.

RQ9. Problema di geometria



Nel quadrato le diagonali si bisecano, quindi AO = OC.
Gli angoli $\angle SOA$ e $\angle ROC$ sono opposti al vertice, dunque congruenti.

	Le rette passanti per A e C sono parallele fra loro e la diagonale AC funge da trasversale; perciò gli angoli $\angle SAO$ e $\angle RCO$ sono alterni interni e quindi congruenti. I triangoli SAO e OCR risultano congruenti per il secondo criterio (ALA). Dalla congruenza segue in particolare che SO = OR e SA = CR. Poiché O è il punto medio sia di AC sia di SR, le diagonali del quadrilatero ASCR si bisecano nel punto O; quindi ASCR è un parallelogramma.
Criteri di correzione/valutazione	Possibili tabelle di attribuzione punteggio e griglie di valutazione presentate sotto.

Griglia analitica di correzione con attribuzione dei punteggi

Quesito	**Punti max**	**Descrittori**	**Credito parziale**
Q1	6	3 pt per ciascuna espressione: applicazione corretta delle proprietà delle potenze / delle regole sui monomi e risultato corretto.	2 pt per singola espressione se il procedimento è corretto ma c'è un errore di calcolo o di segno.
Q2	9	3 pt per ciascuna scomposizione corretta e completa fino ai fattori irriducibili.	1–2 pt per singolo item se la tecnica è impostata correttamente ma la scomposizione finale è incompleta o contiene un errore non concettuale.
Q3	6	2 pt per la determinazione corretta di k; 4 pt per divisione corretta e quoziente esatto.	1 pt se l'impostazione P(2)=0 è corretta ma i conti portano a un valore errato di k; fino a 2 pt per divisione coerente con il k trovato, anche se questo è errato.
Q4	4	1 pt scomposizione del numeratore; 1 pt scomposizione del denominatore; 1 pt C.E. corretta; 1 pt semplificazione corretta.	2–3 pt se la fattorizzazione è corretta ma manca una parte tra C.E. e semplificazione.
Q5	6	3 pt per ciascuna equazione: impostazione e passaggi essenziali corretti, soluzione corretta; nel caso letterale, discussione completa dei casi.	Fino a 2 pt per singolo item se il procedimento è sostanzialmente corretto ma con errore di calcolo.

Q6	6	6 pt per impostazione e passaggi essenziali corretti, e discussione completa dei casi.	Fino a 2 pt per singolo item se il procedimento è sostanzialmente corretto ma con errore di calcolo. 3 pt se si individua la soluzione generale ma non si discutono correttamente i casi $a = \pm 1$.
Q7	9	3 pt per ciascuna equazione di grado superiore risolta correttamente.	Fino a 2 pt per singolo item se la scomposizione/strategia è corretta ma incompleta o con errore di calcolo.
Q8	6	2 pt per determinazione delle misure del rettangolo; 1 pt per area iniziale; 2 pt per impostazione e risoluzione del secondo punto; 1 pt per interpretazione della soluzione accettabile.	Fino a 5 pt se la modellizzazione è corretta ma vi sono errori di calcolo non concettuali. Non si assegna il punto finale se non viene scartata la soluzione non accettabile.
Q9	8	2 pt per rappresentazione del problema 4 pt dimostrazione della congruenza con proprietà/angoli/criterio corretti; 2 pt deduzione corretta del fatto che ASCR è un parallelogramma.	Fino a 4 pt se l'idea dimostrativa è corretta ma manca un passaggio argomentativo o il criterio di congruenza non è esplicitato con chiarezza.
TOTALE	60		

Criteri di valutazione: indicatori minimi di superamento

Nucleo	**Descrittori (indicatori minimi)**	**Evidenze**	**Esito**
Calcolo algebrico	Applica in modo sostanzialmente corretto proprietà delle potenze, regole sui monomi e scomposizioni fondamentali.	Q1–Q2	☐ Sì ☐ No
Divisione di polinomi e frazioni algebriche	Individua il valore del parametro per la divisibilità, imposta almeno come si determina il quoziente del polinomio (Q3) e gestisce C.E. e semplificazioni essenziali nell'equazione fratta.	Q3–Q4	☐ Sì ☐ No
Equazioni (anche letterali)	Risolve correttamente almeno due equazioni tra quelle proposte in Q5, includendo almeno un caso con C.E. e	Q5-Q6	☐ Sì ☐ No

	effettuando almeno in parte correttamente la discussione del parametron a nell'equazione letterale in Q6.		
Equazioni di grado superiore	Riconosce la strategia di scomposizione o di sostituzione e risolve almeno due delle tre equazioni proposte.	Q7	☐ Sì ☐ No
Modellizzazione E rappresentazione	Imposta correttamente il problema algebrico (Q8) e interpreta la soluzione nel contesto. Rappresenta correttamente il problema geometrico (Q9).	Q8-Q9	☐ Sì ☐ No
Argomentazione geometrica (criteri di congruenza e proprietà geometriche relative ai poligoni)	Conosce e utilizza proprietà e teoremi in ambito geometrico (criteri di congruenza e proprietà geometriche relative ai poligoni) in modo coerente per sostenere una dimostrazione corretta e comprensibile.	Q9	☐ Sì ☐ No
Chiarezza del procedimento	Nella maggior parte dei quesiti risolti il procedimento risulta leggibile, ordinato e matematicamente coerente.	Trasversalmente	☐ Sì ☐ No

Questa iniziativa è realizzata nell'ambito del Programma FSE+ 2021-2027 della Provincia autonoma di Trento, con il cofinanziamento dell'Unione europea - Fondo sociale europeo plus, dello Stato italiano e della Provincia autonoma di Trento.