ISSN: 2036-5330
DOI: 10.32076/RA12109

Identificare profili di apprendimento matematico di bambini tra 6 e 12 anni: la standardizzazione italiana della batteria MathPro

Identifying mathematical learning profiles of children between age 6 and 12: the Italian standardization of the MathPro battery

Anna Baccaglini-Frank[1]
Giannis Karagiannakis[2]
Cecilia Pini & Cristiano Termine[3]
Luisa Girelli[4]

Sintesi

Le difficoltà di apprendimento in matematica possono dipendere da una varietà di fattori. Tra i fattori cognitivi, vi sono molte abilità, di cui alcune emergono già in età prescolare, mentre altre si sviluppano a partire dai primi anni di scuola primaria. In questo contributo presentiamo una revisione critica delle principali ipotesi avanzate nella letteratura rispetto al disturbo specifico dell'apprendimento chiamato discalculia. In base a tale revisione è stato proposto un modello teorico utilizzato per sviluppare una batteria computerizzata per studenti di scuola primaria e del primo anno di scuola secondaria di primo grado. Scopo dello strumento è identificare profili di apprendimento matematico, portando alla luce punti di forza e di debolezza rispetto agli ambiti descritti nel modello teorico. In particolare, presentiamo dati relativi alla standardizzazione italiana della batteria MathPro e ne illustriamo il potenziale riportando i profili di apprendimento matematico di due alunni.

Parole chiave: Batteria MathPro; Disturbo dell'apprendimento in matematica; Discalculia evolutiva; Profili di apprendimento matematico.

Abstract

Learning difficulties in mathematics can depend on a variety of factors. Cognitive factors include several skills that partly develop at preschool age, while others are developed starting from the first years of primary school. In this paper we present a critical review of the main hypotheses made in literature about the specific learning disorder referred to as developmental dyscalculia. This review led to a theoretical model which was used to design a computer-based battery for children between the ages of 6 and 12, with the main objective of identifying mathematical learning profiles; such profiles show sets of stronger and weaker mathematical skills of each student, with respect to the model. We specifically present data from the Italian standardization of the MathPro battery and illustrate two examples of students' mathematical learning profiles.

Keywords: MathPro battery; Learning disorder in mathematics; Developmental dyscalculia; Mathematical learning profile.

1. Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Italia, anna.baccaglinifrank@unipi.it
2. Department of Primary Education, University of Athens, Grecia.
3. Dipartimento di Medicina e Chirurgia, Università dell'Insubria, Italia.
4. Dipartimento di Psicologia, Università di Milano "Bicocca", Italia.

1. Introduzione

La matematica è una disciplina complessa che richiede risorse di varia natura sia da parte di chi apprende sia da parte di chi insegna. Tale premessa rende evidente che l'allerta sul dilagante basso rendimento in matematica e sulla crescente incidenza di segnalazioni di alunni e studenti con difficoltà e con disturbi specifici di apprendimento in matematica (*Mathematical Learning Disability* nella letteratura internazionale), o discalculia evolutiva, richieda attenzione congiunta da parte degli psicologi dell'apprendimento e dei didattici della matematica.

Il presente contributo è espressione di questa integrazione di prospettive e, attraverso la presentazione ragionata di uno strumento utile all'identificazione dei profili di apprendimento, intende fornire un quadro necessariamente multi-componenziale delle abilità implicate nell'apprendimento della matematica.

Il fenomeno della cosiddetta "*low numeracy*" viene riconosciuto come un problema consistente e resistente (per es., Dowker, 2007) con il 21% degli alunni di 11 anni che non raggiungono il livello di prestazione matematica attesa al termine della scuola primaria, e il 5% che non raggiungono neanche il livello atteso a 7 anni (Gross, 2007). Infatti, è risaputo che in Europa troppi studenti terminano il percorso scolastico in uno stato preoccupante di analfabetismo matematico (OECD, 2014) senza sviluppare adeguate competenze matematiche per poter partecipare pienamente e contribuire alla società (si veda, per esempio, l'Agenda della European Educational Research Association per Horizon 2020). Secondo i risultati del 2012, in 15 Paesi OECD la proporzione di studenti che raggiungono un livello inferiore o pari a 1 è superiore al 50% (OECD, 2014, p. 69). Inoltre, in tutti i Paesi europei (tranne in Scandinavia) emerge una differenza di prestazione tra maschi e femmine (OECD, 2014, p. 73). Questi problemi perdurano fino all'età adulta, come indicato dagli studi che stimano che circa un quinto degli adulti ha competenze numeriche inferiori al livello minimo utile per la gestione di situazioni di vita quotidiana (per es., Williams *et al.,* 2003). Inoltre, gli studenti che completano la scuola secondaria di secondo grado con prestazioni basse in matematica hanno maggiore probabilità di ritrovarsi senza lavoro o avere stipendi più bassi (Rivera-Batiz, 1992; Aro *et al.,* 2018).

Alcuni recenti dati internazionali riportano addirittura una relazione diretta tra livello di competenza in matematica e prodotto interno lordo, suggerendo come uno sforzo volto ad aumentare l'efficacia didattica nella matematica, e ad intervenire in casi di franco disturbo, possa portare a benefici non solo individuali ma anche sociali (Butterworth *et al.,* 2011). Ne consegue che lo sviluppo di buone pratiche didattiche, in particolare nell'ambito della matematica, dovrebbe essere una priorità (Ianes, 2006; Ianes & Demo, 2013) mirata a colmare l'ancor troppo significativa distanza tra la teoria e la pratica (Lewis & Fisher, 2016; Karagiannakis *et al.,* 2017; Robotti & Baccaglini-Frank, 2017).

Per evitare il radicamento e la permanenza delle difficoltà in matematica e poter avviare attività di potenziamento mirate, è certamente utile individuare precocemente i punti di debolezza e di forza dei singoli rispetto al loro apprendimento matematico. Karagiannakis, Baccaglini-Frank e Papadatos hanno sviluppato un modello teorico (Karagiannnkis *et al.,* 2014) a partire dalla letteratura esistente, che esplicita le quattro componenti cognitive principali implicate nell'apprendimento matematico, vale a dire le abilità numeriche di base, la memoria, il ragionamento e le abilità visuo-spaziali. Alla luce di tale modello è stato sviluppata la batteria MathPro (Karagiannakis & Baccaglini-Frank, 2014; Karagiannakis *et al.,* 2017), computerizzata e multi-componenziale che consente di individuare profili di apprendimento matematico di alunni della scuola primaria e del primo anno di scuola secondaria di primo grado, mettendone in luce i punti di forza e i punti di debolezza.

In questo articolo presentiamo il modello teorico, lo strumento MathPro, e le analisi dei dati raccolti durante la standardizzazione italiana di tale batteria, somministrata a un campione italiano di 1728 studenti in scuole del nord, centro e sud Italia.

1.1. Traiettorie tipiche e atipiche nell'apprendimento della matematica

Nell'ultimo ventennio la matematica e le difficoltà di apprendimento a essa associate hanno ricevuto una crescente considerazione non solo in ambito di ricerca ma anche in ambito sociale, come dimostrato dall'attenzione mediatica a questi temi. Se da un lato tale riscontro ha favorito un legittimo riconoscimento di questi disturbi nei contesti scolastici e la necessità di promuovere percorsi di potenziamento e supporto per coloro che ne soffrono (vedi la Legge 170), dall'altro si è alimentata un'allerta non sempre fondata verso comuni e transitorie difficoltà nel percorso di apprendimento della matematica, molto spesso secondarie a fattori non cognitivi (ad esempio, didattici, familiari, socio-emotivi, …).

Ci sono molte ragioni che complicano l'analisi esaustiva dei fattori che rendono l'apprendimento della matematica un percorso troppo spesso accidentato, e ci sono altrettanti indicatori di quanto sia ridotta la concordanza di vedute su tale fenomeno (per una rassegna, Mazzocco & Räsänen, 2013). Ad esempio, nonostante l'aumento incessante degli studi internazionali e lo sforzo condiviso a comprendere il fenomeno, la varietà terminologica che si usa a tutt'oggi in questo ambito di ricerca riflette un aspetto sostanziale e critico della definizione del campo di indagine. Infatti è abitudine diffusa utilizzare quasi come sinonimi termini quali *abilità numeriche*, *calcolo*, *aritmetica* e *matematica* quando in realtà si riferiscono a competenze molto diverse, sia in termini disciplinari (e.g., l'*aritmetica* è una parte della *matematica* riguardante le proprietà dei numeri e le operazioni su di essi) che in termini cognitivi. La ridotta concordanza si estende anche ai termini che appaiono nella letteratura internazionale per riferirsi a condizioni apparentemente equivalenti di gravi e persistenti difficoltà di apprendimento in matematica: *developmental dyscalculia, mathematical difficulties, arithmetical learning disabilities* sono solo alcune tra le molte categorie diagnostiche utilizzate (ad esempio, Kaufmann *et al.,* 2013). In realtà, anche se troppo frequentemente sono usati come sinonimi, discalculia evolutiva e disturbi dell'apprendimento in matematica sono termini che hanno origine in due filoni di ricerca che, seppur in principio orientati alla comprensione dello stesso fenomeno, hanno a lungo proceduto paralleli e senza diretti confronti (Butterworth, 2005; Geary, 2005). In particolare, emergendo nell'ambito della neuropsicologia dello sviluppo e delle neuroscienze cognitive, il termine *discalculia evolutiva* è stato originariamente utilizzato per identificare un disturbo primario inerente la capacità innata di rappresentarsi l'informazione di numerosità, di cui si enfatizza l'origine neurobiologica e dominio-specifica (Butterworth, 2005). L'attenzione diagnostica è ricaduta quindi sulle competenze numeriche di base (ad esempio, confronto di numerosità, enumerazione), in cui le difficoltà insorgono, non tanto rispetto all'accuratezza, quanto per via del rallentamento selettivo nell'accesso e il recupero di informazioni numeriche. Anche se il disturbo affiora solo nel momento in cui il bambino si confronta con l'apprendimento formale interferendo con l'acquisizione fluida delle varie competenze richieste, il deficit sottostante riguarda solo processi molto basici relativi alla rappresentazione ed elaborazione della numerosità.

Il termine *disturbo dell'apprendimento in matematica* è stato invece a lungo privilegiato da coloro che, enfatizzando il concetto di apprendimento, riconoscono il ruolo che altre funzioni cognitive, tra cui la memoria di lavoro e le abilità fonologiche, giocano nell'apprendimento della matematica. L'attenzione diagnostica è diretta a misure comportamentali dell'abilità di transcodifica numerica, a misure della velocità e accuratezza nel recupero dei fatti aritmetici e nell'esecuzione di calcoli scritti (Shalev & Gross-Tsur, 2001) e all'incidenza estremamente elevata di discalculia in comorbidità con altri disturbi dell'apprendimento, come la dislessia e la disprassia, e con altri disturbi del neurosviluppo (ADHD).

In realtà, negli ultimi anni, è ricorrente che esperti autorevoli, pur riconoscendone la possibile distinzione, utilizzino i termini Developmental Discalculia (DD) e Mathematical Learning Disabilities (MLD) [in Italiano si parla di "discalculia evolutiva" e di "disturbi dell'apprendimento in matematica"; si veda sotto] come sinonimi per identificare un disturbo persistente di origine evolutiva nell'ambito delle abilità numeriche associato a fragilità in uno/più processi e/o rappresentazioni rilevanti per tale dominio (per es., Szucs & Goswami, 2013; Bartelet *et al.,* 2014; Mazzocco *et al.,* 2011).

Come per altri DSA, la Discalculia Evolutiva si definisce in termini di abilità notevolmente e quantificabilmente al di sotto di quelle attese per l'età cronologica dell'individuo, non meglio giustificate da disabilità intellettive (DSM 5), ma gli elementi da considerare sono numerosi e di diversa natura.

La diagnosi, che in Italia non può essere formulata prima del termine della terza classe della scuola primaria, è basata sulla soddisfazione dei seguenti elementi di base: a) una prestazione molto bassa a prove standardizzate con buone proprietà psicometriche; b) severe conseguenze adattive; c) persistenza del problema nella storia scolastica; d) esclusione di fattori estrinseci.

Le criticità del processo diagnostico sono molteplici: da un lato è evidente che, pur trattandosi di un disturbo di natura neurobiologica, non esistono marker neurali che ci permettano di identificarla e la diagnosi si formula unicamente sulla base di criteri comportamentali (Kaufmann *et al.,* 2013). Dall'altro, l'applicazione dei criteri di inclusione non è facilmente percorribile dato che ci troviamo a che fare con un ambito di apprendimento particolarmente a rischio di influenze da fattori intervenienti di diversa natura.

Il processo diagnostico, oltre a considerare attentamente fattori scolastici, socio-affettivi e familiari, si basa sull'analisi prestazionale a "prove standardizzate con buone proprietà psicometriche" (Accordo AID-AIRIPA, 2012); chiaramente, quello che è possibile osservare dipende criticamente da quello che si valuta. Tuttavia, in assenza di indicazioni specifiche rispetto agli strumenti e alle misure con cui valutare la competenza in oggetto, questo parametro risulta necessario ma non sufficiente.

1.2. Fattori (anche non cognitivi) che intervengono nell'apprendimento della matematica

Nonostante la crescente consapevolezza sul ruolo dei fattori psico-sociali sullo sviluppo e sull'apprendimento, la matematica è tuttora oggetto di misconcezioni che influenzano chi insegna e chi impara, favorendo un atteggiamento evitante e negativo oltre che rendendo più complesso il percorso di valutazione in presenza di persistenti difficoltà.

I falsi miti che la interessano sono numerosi e longevi come, ad esempio, considerare l'essere bravi in matematica come un indice di intelligenza o che l'essere portati per la matematica sia solo espressione di un talento innato. Tutto ciò ha condotto ad attribuire alla matematica una forte connotazione emotiva, per cui "la si odia" o "la si ama" e se ne può avere anche un'autentica paura (per es., Di Martino & Zan, 2011).

Non a caso uno dei costrutti che ha ricevuto grande attenzione nell'ultimo decennio, è la *math anxiety*, ovvero l'ansia della matematica (Maloney & Beilock, 2012). Si tratta di un costrutto multidimensionale, definito come malessere indotto da quelle situazioni dove si è esposti a compiti di matematica considerati minacciosi per la propria autostima. I fattori che entrano in gioco sono molteplici: fattori ambientali quali i metodi didattici, gli insegnanti, le aspettative familiari, ma anche fattori di personalità (Rubinstein & Tannock, 2010). È bene precisare che chi soffre di ansia in matematica non per forza soffre di ansia in generale: è un'ansia specifica che si combina ed è aggravata dalla presenza di alcuni fattori cognitivi e non cognitivi (Justicia-Galiano *et al.,* 2017). L'ansia della matematica non è infatti distribuita in modo uniforme nella popolazione, dato che le femmine mostrano molto più disagio nell'affrontare questa disciplina (Devine *et al.,* 2012). Questo fenomeno può non sorprendere se si considera che da sempre e da molti la matematica è ritenuta un dominio prevalentemente maschile. I dati relativi alle scelte scolastiche, universitarie e professionali consolidano questa percezione con una sotto-rappresentazione femminile in percorsi disciplinari caratterizzanti da requisiti cosiddetti delle *hard science* (per es., Hill *et al.,* 2010). La domanda ricorrente che la ricerca si è posta è se questa discrepanza di genere nell'orientamento formativo rifletta una reale differenza di genere a livello prestazionale (Stoet & Geary, 2013). In realtà diverse meta-analisi relative alle ricerche condotte su questo tema hanno riportato solo minime differenze tra maschi e femmine, la cui direzione e la cui entità è funzione del tipo di compito valutato (Hyde, 2005), della fascia d'età dei partecipanti e del decennio di riferimento, senza mai sostanziare una discrepanza realmente significativa (Hyde *et al.,* 1990). L'alta variabilità e la ridotta consistenza delle differenze di genere in matematica è avvallata dagli studi su ampia scala TIMMS e i risultati PISA in cui emerge come l'effetto genere sia fortemente mediato dal Paese di riferimento (Else-Quest *et al.,* 2010). Studi molto recenti condotti su ampi campioni di bambini sia in età scolare che prescolare mostrano che le differenze di genere in ambito numerico-matematico risultano un'eccezione transitoria o del tutto assente (Hutchinson *et al.,* 2019). Un convincente dato a sfavore dell'ipotesi che attribuisce a fattori biologici il *gender gap* (differenze nelle prestazioni legate al genere) in matematica proviene dallo studio della capacità di elaborare numerosità non simboliche in bambini di pochi mesi di vita. In particolare, è stato dimostrato che in bambini così piccoli non emerge alcuna differenza tra maschi e femmine né nella capacità discriminativa né nella distribuzione dei punteggi (Kersey *et al.,* 2018) e neanche nell'attivazione neurofunzionale associata allo sviluppo delle competenze numeriche (Kersey *et al.,* 2019). Perché, quindi, in assenza di evidenze a sostengo di differenze di genere in ambito matematico, questa disciplina continua a essere percepita come un dominio maschile? Oramai sappiamo che la responsabilità è ampliamente attribuibile a fattori culturali, in particolare agli stereotipi di genere secondo cui le femmine sarebbero più predisposte, e quindi più competenti, in ambito umanistico-letterario e gli studenti maschi più competenti nelle materie matematico-scientifiche (Tomasetto, 2013). Tali attribuzioni, in aggiunta alle aspettative degli insegnanti e a particolari periodi di transizione scolastica influenzano il rendimento scolastico degli studenti e il loro concetto di sé (Marsh & Martin, 2011). È stato dimostrato che a sei anni i bambini sono già a conoscenza di queste credenze (Cvencek *et al.,* 2011), e che già a partire da questa età le bambine si considerano meno abili dei coetanei maschi in matematica, ottenendo prestazioni peggiori nel momento in cui viene attivata la loro identità di genere, nonostante non vi sia ancora presente in loro la consapevolezza dello stereotipo di genere (Ambady *et al.,* 2001; Tomasetto *et al.,* 2011), raggiunta appieno verso i 9 anni (Passolunghi *et al.,* 2014). Sarebbe quindi questa consapevolezza a rendere le femmine più vulnerabili e a rischio di sviluppare un disturbo d'ansia legato alla matematica (Muzzatti & Agnoli, 2007; Galdi *et al.,* 2014)

È chiaro che l'influenza dei fattori non cognitivi sull'apprendimento della matematica è tanto riconosciuta in ambito di ricerca quanto difficile da contrastare in ambito educativo e familiare.

Ad esempio, è stato riportato che l'ansia dell'insegnante nei confronti della matematica è predittiva del rendimento matematico degli alunni, e che tale valore predittivo cresce con il passare del tempo e impatta sulla metà degli alunni dello stesso genere (Bialistock *et al.,* 2010). Non solo, ma questa relazione è mediata dal *gender-ability-belief* (la credenza che le abilità dipendano dal genere), cioè dal fatto che la bambina ha sviluppato lo stereotipo di genere rispetto all'apprendimento della matematica. L'ambiente scolastico e la didattica possono anche indurre cambiamenti positivi, come indicato da recenti studi italiani che hanno tentato di quantificare il peso di buone esperienze didattiche rispetto alla prevenzione dell'instaurarsi di difficoltà persistenti nell'ambito dell'aritmetica. In particolare, è stato trovato che l'uso di materiale didattico appropriato nel primo biennio della scuola primaria può portare a una diminuzione di circa il 50% dei bambini positivi ai test per la discalculia rispetto al numero di bambini positivi trovati nelle classi di controllo (Baccaglini-Frank, 2015; 2017). Inoltre, gli alunni che vengono seguiti e aiutati dagli insegnanti in modo appropriato migliorano notevolmente le loro prestazioni (Hawes *et al.,* 2019), mentre, quando l'ambiente è ostile, studenti più fragili peggiorano ulteriormente (Zhang *et al.,* 2019). L'importanza di un intervento efficace e tempestivo è consolidata anche dal fatto che l'identificazione precoce delle difficoltà in matematica sia positivamente correlata con il miglioramento prestazionale nelle classi successive (Nelson & Powell, 2018). Inoltre, se nelle fasi iniziali del percorso scolastico l'intelligenza sembra essere un buon predittore della traiettoria di apprendimento in matematica, alla lunga sono la motivazione e le strategie di studio a fare la differenza rinforzando il valore dei fattori educativi e contestuali su quelli innati (Murayama *et al.,* 2012).

Questa breve rassegna sui fattori non cognitivi che influenzano il percorso di apprendimento in matematica vuole mettere in luce il ruolo determinante che aspettative e attribuzioni ambientali hanno sul rendimento scolastico. In particolare, data la complessità disciplinare e le molte risorse richieste, è necessario che la scuola possa mettere in gioco ogni risorsa possibile per identificare le caratteristiche di funzionamento del singolo e predisporre, in caso di difficoltà o di disturbo, le opportune misure compensative.

La ricerca qui riportata costituisce un passo importante in questa direzione. Nella seguente sezione presentiamo il modello teorico su cui si fonda lo strumento di valutazione dell'apprendimento adottato nella ricerca.

2. Modello dei 4 domini

Il modello dei quattro domini nasce con l'obiettivo di mettere in relazione le ipotesi sulle cause di MLD conosciute in letteratura con le principali componenti funzionali implicate nell'apprendimento della matematica. Il modello è presentato nella Tab. 1 (una traduzione della tabella presente in Karagiannakis *et al.,* 2014; per i riferimenti bibliografici legati a tale tabella rimandiamo a tale articolo).

Dominio	**Meccanismi implicati**	**Difficoltà[5] matematiche associate**
NUMERICO di BASE	Rappresentazione interna di quantità: • ANS (*Approximate Number System*) • OTS (*Object Traking system*) • *coding* di numerosità • rappresentazione di simboli • deficit di accesso	Ambito aritmetico: 1. sensibilità alle numerosità non simbolica, percezione accurata di piccole numerosità (*subitizing*) 2. stima approssimativa di quantità 3. posizionare i numeri su una linea dei numeri, effetto SNARC 4. elaborare numeri arabi 5. tradurre un numero da una rappresentazione a un'altra (analogica-araba-verbale) 6. comprendere i principi di base del conteggio 7. comprendere il valore posizionale (anche nella notazione decimale) 8. comprendere i simboli delle operazioni aritmetiche di base (+, -, x, :)
MEMORIA (recupero ed elaborazione)	Memoria di lavoro (ML) • inibizione di informazioni irrilevanti • memoria semantica	Tutti gli ambiti matematici: 1. recupero di fatti numerici 2. decodificare-confondere la terminologia disciplinare (numeratore, denominatore, isoscele, equilatero, …) 3. elaborare consegne verbali o compiti presentati oralmente 4. eseguire calcoli mentali 5. ricordare procedure aritmetiche, formule e regole 6. problem solving aritmetico
RAGIONAMENTO	Diversi meccanismi esecutivi: • *entailment* • inibizione (non legata alla ML • *updating* di informazioni rilevanti, passaggio da una strategia operativa ad un'altra • *updating* e pianificazione strategica • prendere decisioni	Tutti gli ambiti matematici: 1. comprendere concetti, idee e relazioni matematiche 2. capire le procedure e gli algoritmi complessi 3. comprendere i principi logici di base 4. problem solving (*decision making*)

5. Queste possono anche essere interpretate come "abilità" se il modello è usato per identificare i punti di forza cognitivi dello studente rispetto all'apprendimento della matematica.

VISUO-SPAZIALE	Memoria di lavoro visuo-spaziale (MLVS) Ragionamento/ percezione visuo-spaziale	Ambito dell'aritmetica scritta, geometria, algebra, geometria analitica, analisi matematica: 1. interpretare e usare l'organizzazione spaziale di rappresentazioni di oggetti matematici (es. numeri in notazione posizionale decimale, esponenti) 2. posizionare numeri sulla linea dei numeri 3. riconoscere i numeri arabi e altri simboli matematici 4. calcolo scritto multi-digit 5. controllare le informazioni importanti rispetto a quelle irrilevanti 6. visualizzare e analizzare figure geometriche, in particolare visualizzare movimenti rigidi come le rotazioni 7. interpretare grafici e tabelle

Tab. 1 - *Modello dei quattro domini, tradotto da Karagiannakis et al. (2014).*

La bontà del modello è stata verificata tramite la versione preliminare del MathPro (Karagiannakis *et al.,* 2017), che è stata somministrata a un campione di 165 studenti greci dell'ultimo biennio della scuola primaria (età media 11 e 3 mesi). Il carattere innovativo di questa batteria non sta tanto nelle singole prove proposte ma nella loro combinazione in blocchi rappresentativi del tipo di risorse cognitive sottese prevalentemente implicate nelle prove. Ad esempio, si ipotizza che la buona prestazione in una prova associata al dominio visuo-spaziale sia indicativa di un punto di forza nelle abilità-visuospaziali.

Le analisi hanno supportato la bontà dello strumento, confermando a posteriori l'assegnazione ipotizzata a priori delle singole prove ai blocchi-domini del modello teorico[6] (Karaginnakis *et al.,* 2017). Inoltre, è stato possibile individuare *clusters* (gruppi identificati a posteriori grazie ad analisi statistiche) di studenti con caratteristiche prestazionali significativamente diverse[7]. Tali risultati suggeriscono che la batteria possa essere efficace per identificare punti di forza e di debolezza in matematica, indicativi della funzionalità di ciascuno studente rispetto ai quattro domini individuati dal modello teorico. In particolare, emerge che il *profilo individuale di apprendimento matematico* può essere caratterizzato attraverso le abilità riscontrate nei quattro domini, che risultano essere indipendenti: abilità numeriche di base, memoria di lavoro, ragionamento e abilità visuo-spaziali.

6. Questi risultati sono stati ottenuti mediante la principal component analysis e la confirmatory factor analysis. Per approfondimenti su tali analisi si veda l'articolo di Karaginnakis, Baccaglini-Frank e Roussos (2017), in particolare si vedano le sezioni 6.2, 6.3 e la discussione.

7. Questi risultati sono stati ottenuti mediante la k-means cluster analysis. Per approfondimenti su tale analisi si veda l'articolo di Karaginnakis, Baccaglini-Frank e Roussos (2017), in particolare si vedano le sezioni 6.4 e la discussione.

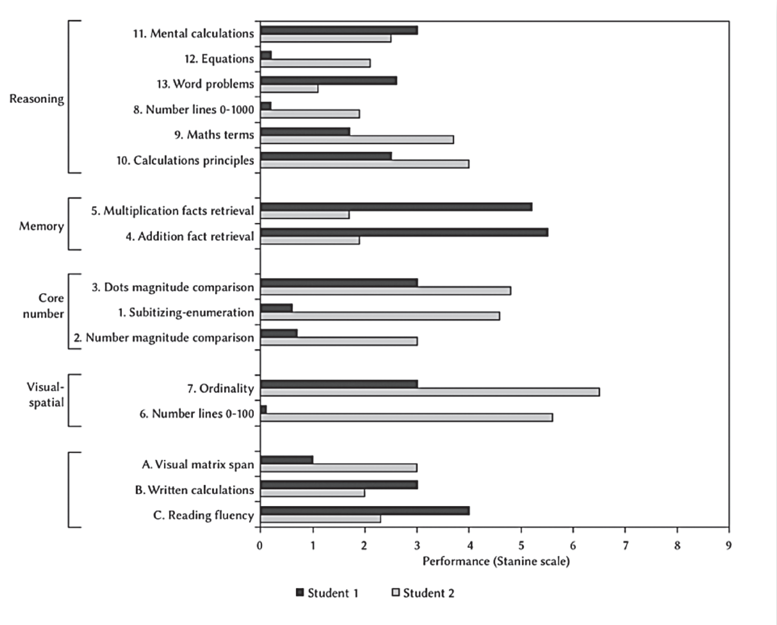

Fig. 1 - *Prestazioni a confronto sulla batteria sperimentale di due studenti con identico punteggio sul NUCALC (test diagnostico per la discalculia usato in Grecia).*

A titolo di esempio riportiamo il confronto tra i profili emergenti di due alunni greci, equivalenti rispetto al punteggio sotto norma ottenuto nel QI non verbale (Raven *et al.,* 2000) e sul NUCALC (Koumoula, 2004), presentati in precedenti pubblicazioni degli autori (Karagiannakis & Baccaglini-Frank, 2014; Karagiannakis *et al.,* 2017) (Fig. 1).

A dispetto di un punteggio equivalente nel NUCALC, il loro profilo emergente dalla batteria MathPro appare molto diverso con un'unica similitudine nella bassa prestazione nell'ambito del ragionamento matematico (per un approfondimento, si veda Karagiannakis & Baccaglini-Frank, 2014).

Tale evidenza è pienamente in accordo sia con il riconoscimento attuale dell'alta eterogeneità nei profili MLD (per es., Lewis & Fischer, 2016; Bartelet *et al.,* 2014) sia con l'importanza di adottare un approccio dimensionale e non categorico rispetto alla prestazione in matematica (per es., Reigosa-Crespo *et al.,* 2011).

Notiamo, infine, che questo approccio dimensionale è assolutamente in linea con ciò che viene proposto nel DSM-5 (APA, 2013) dove la categoria dei disturbi dell'apprendimento è stata unificata sotto il termine "Specific learning disorder (SLD)" che ora viene identificato come una difficoltà ad apprendere e usare le abilità scolastiche, persistente e resistente all'intervento e caratterizzata dalla presenza di "sintomi" corrispondenti a difficoltà specifiche nelle abilità strumentali di letto-scrittura e di ambito numerico, tra cui difficoltà a padroneggiare il senso del numero, i fatti aritmetici o il calcolo.

Recentemente è stata messa a punto una nuova versione della batteria MathPro, in cui è stato ampliato l'ambito visuo-spaziale (Karagiannakis & Noël, 2020). Come la versione precedente, consiste in una batteria digitalizzata, quindi somministrabile al computer, contenente prove afferenti alle abilità e ai processi cognitivi associati ai quattro domini presi in considerazione dal modello teorico di riferimento. In questo articolo vogliamo presentare dati ottenuti durante la standardizzazione italiana dell'ultima versione della batteria MathPro con un campione di 1728 studenti italiani tra gli 8 e gli 11 anni. Precedentemente, nelle ricerche sulla versione preliminare della batteria, non erano stati raccolti dati rispetto alla popolazione italiana. Con questo studio ci siamo prefissati gli obiettivi specifici e le domande di ricerca seguenti.

3. Obiettivi specifici e domande della ricerca presentata

L'obiettivo principale del presente studio è di presentare e discutere i risultati legati alla standardizzazione italiana della batteria MathPro. In particolare, intendiamo mettere in luce sia l'andamento della prestazione del campione sia la "bontà" dello strumento. Le analisi che abbiamo condotto hanno l'obiettivo di rispondere, specificamente, alle seguenti domande:

1. Come cambia la prestazione nei singoli compiti nelle diverse classi? Com'è la coerenza interna degli item di ogni compito (alpha di Cronbach)?
2. Emergono differenze di genere? Se sì, su quali prove?
3. Come variano le prestazioni nelle diverse prove nei diversi anni di scuola?
4. La batteria MathPro è uno strumento "valido"? Quali correlazioni ci sono tra le valutazioni degli insegnanti e le prestazioni degli studenti?
5. Come differiscono i profili degli alunni identificati dai propri insegnanti come "aventi basse prestazioni in matematica" rispetto ai profili degli altri alunni del campione?

4. Metodologia

4.1. Partecipanti

Sono stati coinvolti 1728 alunni, equamente distribuiti tra i due sessi e tra le diverse classi, provenienti dalla classe prima primaria alla classe prima di scuola secondaria di primo grado (età 6-12 anni). Gli alunni provenivano da scuole pubbliche del centro nord e centro sud e appartenevano alle più disparate classi socioeconomiche. I partecipanti sono stati reclutati contattando sia vari uffici scolastici regionali, sia diversi dirigenti scolastici. La partecipazione degli insegnanti e delle classi coinvolte è stata su base volontaria e solo gli alunni la cui partecipazione è stata autorizzata dai genitori hanno preso parte allo studio. Lo studio è stato approvato dal Comitato Etico dell'Università Milano-Bicocca e condotto secondo le norme etiche della Dichiarazione di Helsinki (World Medical Association, 2013).

La Tab. 2 presenta le caratteristiche della popolazione che ha partecipato alla standardizzazione italiana.

Classe	Età (anni)			Sesso			Totale
	M	DS	Range	Maschi	Femmine		
1	6.79	0.32	6.2-7.4	104	90		194
2	7.83	0.30	7.2-8.3	109	132		241
3	8.85	0.35	8.0-10.6	174	180		354
4	9.83	0.38	8.8-11.8	154	185		339
5	10.79	0.33	10.1-12.4	146	158		304
6	11.84	0.35	10.9-13.3	136	160		296
Totale				823	905		N= 1728

Tab. 2 - *Statistiche descrittive del campione.*

Le classi non differiscono statisticamente rispetto al numero di maschi e femmine presenti: X2(5, N=1,728) = 4.68, p = .46.

Hanno partecipato alla ricerca solo coloro di cui è stato ottenuto il consenso di entrambi i genitori, in accordo con le linee guida del Comitato Etico dell'Università degli Studi di Milano-Bicocca e nel rispetto dei principi etici stabiliti nella Dichiarazione di Helsinki. Per tutti i partecipanti è stato raccolto il consenso di insegnanti e di entrambi i genitori. Sono state registrate eventuali patologie concomitanti, come altri DSA, ADHD o disturbi dello spettro autistico.

Prima della somministrazione della batteria *MathPro* è stato richiesto agli insegnanti degli alunni partecipanti allo studio di valutare separatamente la competenza in Italiano e in Matematica, classificandole come ottima (5), distinta (4), buona (3), sufficiente (2-1), insufficiente (0).

4.2. La batteria MathPro

A ogni partecipante è stato chiesto di completare una serie di 18 compiti[8] al computer. Ogni compito includeva un numero variabile di stimoli (si veda la Tab. 4). La lista completa dei compiti nella batteria è pubblicata al seguente link: http://mathpro.education/en/mathpro-testthe-mathematical-profile-dyscalculia-test-en/.

I compiti sono associati ai diversi domini del modello (Tab. 3), sulla base di analisi a priori e a posteriori sui dati raccolti che non sono oggetto del presente articolo (cf. Karagiannakis *et al.* 2017).

L'intera batteria è stata programmata usando il linguaggio C++, la piattaforma open-source QT versione 4.7 e il compilatore gcc open-source GNU. Tutte le funzioni sono state implementate usando i tipici processi QT/C++, in modo che lo stesso codice sorgente potesse essere compilato da computer con diversi sistemi operativi come Windows, Mac OS X e Linux, con soltanto piccole differenze nella visualizzazione delle schermate. Per la raccolta dati descritta in questo articolo sono stati usati sempre computer con Windows.

8. Le effettive tipologie erano 20, ma 2 dei compiti sono stati introdotti per controllare i tempi di reazione di ciascun partecipante.

Numerico di base	Memoria	Ragionamento	Visuo-spaziale
1. Confronto di punti 3. Confronto di numeri a una cifra 9. Subitizing	6. Dettato di numeri 7. Numero successivo 8. Numero precedente 10. Enumerazione 11. Recupero di fatti additivi 12. Recupero di fatti moltiplicativi	4. Confronto di numeri a più cifre 13. Calcolo a mente 18. Problemi 19. Principi di calcolo 20. Pattern numerici	14. Linee dei numeri 0 -100 15. Linee dei numeri 0 -1000 16. Quadrati 11. Blocchetti

Tab. 3 - *Compiti MathPro suddivisi per dominio.*

NOTA: I compiti 2 (velocità nell'uso del mouse) e 5 (uso della tastiera virtuale) sono introdotti per controllare la velocità di elaborazione degli studenti.

Durante lo svolgimento della batteria le istruzioni sono fornite direttamente dal computer attraverso video, immagini, audio e in formato testuale. I compiti compaiono sia in formato testuale che audio per facilitarne la comprensione in caso di difficoltà di lettura. Inoltre, ogni compito è preceduto da tre item di prova su cui il partecipante riceve feedback immediato. In caso di errore il sistema ripete la consegna del compito, sottolineando possibili fonti di incomprensione. Per alcuni compiti il sistema registra il tempo di risposta e al partecipante viene ricordato il valore di rispondere velocemente senza fare errori. Le risposte sono direttamente registrate dalla piattaforma MathPro.

Vi sono diversi vantaggi nell'utilizzo di uno strumento informatizzato, tra cui la possibilità di misurare con precisione i tempi di reazione, registrare l'accuratezza di ciascuna risposta, generare automaticamente i profili individuali (a standardizzazione completata), modificare il numero di compiti assegnati a ciascun partecipante e il numero di item per compito a seconda della classe frequentata, adattare la batteria per la somministrazione in diverse lingue e permettere eventualmente il confronto internazionale e l'aggiornamento istantaneo del sistema.

La durata della batteria dipende dalla classe frequentata dallo studente (vedi Tab. 4) e dalla sua velocità di risposta, con una variabilità registrata da un minimo di 30 minuti a oltre 60 minuti.

	Classe 1	Classe 2	Classe 3	Classi 4-6
1. Confronto di punti	30	30	30	30
2. Velocità nell uso del mouse	10	10	10	10
3. Confronto di numeri a una cifra	24	24	24	24
4. Confronto di numeri a più cifre	-	6	9	12
5. Uso della tastiera virtuale	10	10	10	10
6. Dettato di numeri*	30	30	30	30
7. Numero successivo*	12	18	18	18
8. Numero precedente*	12	18	18	18
9. Subitizing	20	20	20	20
10. Enumerazione	14	14	14	14
11. Recupero di fatti additivi	12	12	12	12
12. Recupero di fatti moltiplicativi	-	-	14	14
13. Calcolo a mente	-	12	24	24
14. Linee dei numeri 0-100	22	22	22	22
15. Linee dei numeri 0-1000	-	-	22	22
16. Quadrati	10	10	10	10
17. Blocchetti	8	8	8	8
18. Problemi*	-	10	18	18
19. Principi di calcolo*	-	15	15	15
20. Pattern numerici*	18	18	18	18

Tab. 4 - *Numero di item in ciascun compito del MathPro per classe.*

*Il compito termina dopo 3 errori consecutivi.

La prestazione di ogni alunno è stata analizzata grazie alla registrazione dei tempi di risposta (TR) e/o l'accuratezza (AC) in ogni compito (Tab. 5). I due compiti di controllo ("velocità nell'uso del mouse" e "uso della tastiera virtuale") sono stati utilizzati per correggere il tempo di risposta individuale nelle prove a tempo (CTR).

	Classe 1	Classe 2	Classe 3-6
3. Confronto di numeri a una cifra	AC & TR	AC & TR	AC & TR
4. Confronto di numeri a più cifre[1]	-	AC & TR	AC & TR
6. Dettato di numeri[2]	AC	AC	AC & TR
7. Numero successivo[3]	AC	AC	AC & TR
8. Numero precedente[3]	AC	AC	AC & TR
10.Enumerazione	AC	AC & TR	AC & TR
11.Addition facts retrieval	AC	AC & TR	AC & TR
12.Mutiplication facts retrieval	-	-	AC & TR

Tab. 5 - *Misure analizzate per compito per classe.*

[1]esclusi gli item sui numeri decimali
[2]esclusi gli item con numeri di 5 cifre
[3] esclusi gli item con numeri di 3 cifre

La standardizzazione ha consentito di ottenere il profilo di ogni alunno esprimendo la prestazione in ogni compito in percentili (come esempi si vedano Fig. 7 e Fig. 8). Il percentile corrisponde alla percentuale di alunni della stessa classe, il cui punteggio era uguale o minore a quello dello studente in questione. Per semplificare, sono evidenziate tre fasce di prestazione: bassa (fino al 30° percentile), media (dal 31° al 70° percentile), alta (dal 71° percentile in avanti).

Le analisi statistiche usate per generare ciascuno dei risultati che presentiamo sono le seguenti:

- medie e deviazioni standard di ogni gruppo classe in ciascun compito;
- alpha di Cronbach per la coerenza interna degli item di ogni compito;
- ANOVA per l'effetto del genere;
- ANOVA, ANCOVA e test Tukey post-hoc per l'effetto classe;
- coefficienti di correlazione di Pearson per la correlazione tra le valutazioni degli insegnanti e alcuni compiti della batteria;
- T-test su campione singolo per valutare le differenze di prestazione tra alunni valutati come aventi prestazioni basse dai loro insegnanti e il resto del campione.

5. Analisi statistiche condotte sui dati raccolti

La Tab. 6 mostra le prestazioni degli alunni in funzione della classe nei singoli compiti. Le misure utilizzate per le analisi sono state ottenute applicando la seguente procedura: per ciascun compito sono stati presi in considerazione i TR quando l'AC era superiore a .85; in caso contrario, è stata utilizzata solo l'AC (più frequentemente nelle classi inferiori come mostrato nella Tab. 5); inoltre, sono stati esclusi dalle analisi dei TR gli item che hanno ottenuto un'AC complessiva inferiore a .85 (per es., stimoli con numeri decimali in "Confronto di numeri a più cifre"; stimoli di 5 cifre in "Dettato di numeri", e stimoli con numeri a tre cifre in "Numero precedente" e "Numero successivo").

5.1. Coerenza interna

Sono stati calcolati gli alpha di Cronbach per tutte le misure dipendenti (si veda la Tab. 6). Per tutti i compiti sì è ottenuta una coerenza interna buona o ottima (α>.8) con le seguenti eccezioni: il Compito "Quadrati" (compito 16 nella Tab. 3) e il compito "Blocchetti" (compito 11 nella Tab. 3) ottengono livelli quasi buoni (rispettivamente, α=.79 e .76), mentre coerenza interna più bassa è stata rilevata in "Confronto di punti" (compito 1 nella Tab. 3) (α=.42), "Confronto di numeri ad una cifra" (compito 3 nella Tab. 3) (α=.66), "Confronto di numeri a più cifre" (compito 4 nella Tab. 3) (α=.61) e "Velocità nell'uso della calcolatrice nello schermo) (compito 5 nella Tab. 3) (α=.68).

	Cronbach	Grade 1		Grade 2		Grade 3		Grade 4		Grade 5		Grade 6[9]	
		M	(SD)	M	(SD)	M	(SD)	M	(SD)	M	(SD)	M	(SD)
Dots comparison (AC)	.42	0.54	(0.09)	0.58	(0.11)	0.61	(0.10)	0.63	(0.09)	0.64	(0.09)	0.65	(0.09)
Computer mouse speed (AC)	.82												
Computer mouse speed (RT)	.89												
Single digit numbers comparison (AC)	.66	0.95	(0.08)	0.97	(0.05)	0.98	(0.06)	0.99	(0.03)	0.99	(0.03)	0.98	(0.03)
Single digit numbers comparison (RT)	.93	3268	(747)	2593	(794)	2319	(832)	2278	(786)	1979	(787)	2137	(691)
Multi-digit numbers comparison (AC)	.61	-		0.89	(0.16)	0.89	(0.12)	0.78	(0.14)	0.85	(0.13)	0.87	(0.12)
Multi-digit numbers comparison (RT)	.97	-		3619	(1308)	3115	(1166)	3073	(1126)	2617	(1042)	2806	(912)
Screen calculator use (AC)	.68												
Screen calculator use (RT)	.92												
Numbers dictation (AC)	.94	0.38	(0.17)	0.60	(0.18)	0.78	(0.17)	0.86	(0.17)	0.91	(0.12)	0.90	(0.12)
Numbers dictation (RT)	.96	5175	(1922)	4798	(1749)	4621	(2002)	4329	(1556)	3784	(1628)	3859	(1363)
Next number (AC)	.93	0.67	(0.28)	0.70	(0.24)	0.80	(0.25)	0.87	(0.21)	0.88	(0.19)	0.88	(0.21)
Next number (RT)	.94	5839	(2535)	5087	(1770)	4302	(1936)	3896	(1400)	3319	(1274)	3395	(1035)
Previous number (AC)	.93	0.70	(0.29)	0.73	(0.23)	0.85	(0.21)	0.90	(0.18)	0.93	(0.13)	0.93	(0.14)
Previous number (RT)	.92	7048	(5255)	5268	(1801)	4475	(2698)	3903	(1330)	3250	(1133)	3305	(957)
Subitizing (AC)	.81	0.64	(0.21)	0.72	(0.19)	0.79	(0.15)	0.84	(0.14)	0.86	(0.13)	0.85	(0.15)
Enumeration (AC)	.84	0.77	(0.24)	0.85	(0.20)	0.87	(0.17)	0.91	(0.13)	0.92	(0.12)	0.91	(0.14)
Enumeration (RT)	.91	10346	(3410)	8833	(2590)	7382	(2141)	6979	(1815)	5951	(1545)	5967	(1672)
Addition facts retrieval (AC)	.87	0.78	(0.24)	0.90	(0.17)	0.94	(0.13)	0.97	(0.09)	0.97	(0.10)	0.95	(0.12)
Addition facts retrieval (RT)	.88	11432	(5917)	7061	(3910)	4946	(2435)	4345	(2915)	3412	(1085)	3390	(1268)
Multiplication facts retrieval (AC)	.89	-		-		0.84	(0.21)	0.89	(0.17)	0.91	(0.16)	0.88	(0.20)
Multiplication facts retrieval (RT)	.86	-		-		8914	(4808)	7848	(5457)	6004	(3146)	3603	(2982)
Mental calculations (AC)	.91	-		0.52	(0.22)	0.57	(0.26)	0.66	(0.24)	0.74	(0.22)	0.69	(0.25)
Number Lines 0-100 (PAE)*	.93	17.86	(8.80)	11.03	(5.99)	7.85	(4.74)	6.45	(3.88)	5.25	(2.32)	5.16	(2.55)
Number Lines 0-1000 (PAE)*	.93	-		-		15.72	(8.23)	11.47	(7.70)	8.71	(6.05)	8.14	(6.16)
Squares (AC)	.79	0.32	0.20	0.43	0.26	0.52	(0.24)	0.61	(0.23)	0.69	(0.21)	0.72	(0.20)
Building blocks (AC)	.76	0.41	(0.24)	0.58	(0.26)	0.64	(0.26)	0.66	(0.25)	0.73	(0.23)	0.74	(0.24)
Word problems (AC)	.90	-		0.48	(0.29)	0.42	(0.24)	0.52	(0.25)	0.57	(0.24)	0.60	(0.22)
Calculation principles (AC)	.92	-		0.35	(0.28)	0.36	(0.29)	0.45	(0.31)	0.55	(0.30)	0.52	(0.31)
Numerical patterns (AC)	**.88**	**0.20**	**(0.17)**	**0.35**	**(0.20)**	**0.39**	**(0.21)**	**0.46**	**(0.21)**	**0.50**	**(0.21)**	**0.48**	**(0.21)**

Tab. 6 - *Alpha di Cronbach's e statistiche descrittive delle consegne MathPro per classe.*

*Per entrambi i compiti sulle linee dei numeri usiamo la percentuale assoluta degli errori commessi (PAE).

9. Indichiamo con "Grade 6" o "classe 6" la classe prima della scuola secondaria di primo grado.

5.2. *Effetto genere*

L'effetto genere è stato indagato attraverso analisi di tipo ANOVA. È risultato significativo in 6 dei 20 compiti.

Nel "Confronto dei numeri a più cifre" i maschi (M=0.87, SD=.14) hanno avuto prestazioni significativamente più accurate [$F(1, 1531)=15.638$, $p<.001$, $\eta^2=.01$] rispetto alle femmine (M=0.84, SD=.15) e hanno risposto in modo significativamente più veloce [maschi 1249±1067 ms, e delle femmine 3113±1243 ms, $F(1, 1528)=5.014$, $p=.251$, $\eta^2=.003$].

Nel compito "Linea dei numeri 0-100" i maschi sono stati più precisi [$F(1, 1650)=13.136$, $p<.001$, $\eta^2=.008$] rispetto alle femmine (M del PAE=7.74, SD=6.09 per i maschi e M=8.85, SD=6.37 per le femmine). Risultato analogo è stato riscontrato per il compito "Linea dei numeri 0-1000" [$F(1, 1209)=49.483$, $p<.001$, $\eta^2=.039$] (M=9.74, SD=7.26 per i maschi e M=12.82, SD=7.99 per le femmine). Tale risultato è stato confermato in tutte le classi (Fig. 2).

Infine nel compito "Blocchetti" i maschi [$F(1, 1600)=4.013$, $p=.045$, $\eta^2=.003$] sono stati più accurati (M=0.65, SD=.27) rispetto alle femmine (M=0.63, SD=.26) e il pattern si inverte nel "Numero successivo" [$F(1, 1726)=4.381$, $p=.036$, $\eta^2=.003$] rispetto a quelle dei maschi (grado di AC per le femmine .80±26, e per i maschi .77±.30).

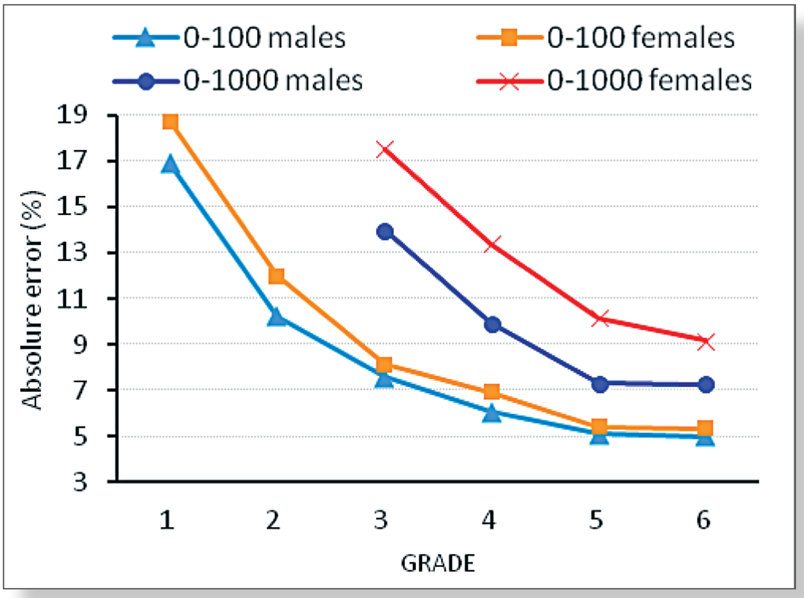

Fig. 2 - *Errori totali commessi da maschi e femmine in ogni classe sui compiti relativi alle linee dei numeri.*

5.3. *Effetto classe*

Per studiare l'effetto classe sono state usate analisi di tipo ANOVA (o ANCOVAs per i RT) separatamente per ogni compito. In tutti i compiti e per tutte le misure (AC e CRT) l'effetto classe è risultato significativo. Non sorprendentemente, la prestazione migliora all'aumentare della classe. Presentiamo separatamente per ciascun compito i risultati delle analisi.

Il compito "Confronto di punti" diventa più semplice all'aumentare della classe (Fig. 3) [$F(5, 1722)=39.157$, $p<.001$, $\eta^2=.10$] e il Test Tukey post-hoc ha indicato che questo è vero tranne nel passaggio tra la quinta primaria e la prima di scuola secondaria di primo grado (Grade1<Grade2<Grade3<Grade4<Grade5= Grade6).

Nel compito "Confronto di numeri ad una cifra" (compito 3 nella Tab. 3) sono state trovate differenze significative nell'AC [$F(5, 1722)=22.299$, $p<.001$, $\eta 2=.06$] tra le classi (Fig. 3a). I test Tukey post-hoc mostrano differenze significative tra le prime due classi (Grade1<Grade2) ma non tra le classi successive: seppure gli alunni più grandi hanno avuto prestazioni migliori dei più giovani, non sono emerse differenze tra le classi 4, 5 e 6 (Grade3<Grade4=Grade5=Grade6). In modo analogo, l'analisi dei TR ha indicato un graduale aumento di velocità con il crescere della classe frequentata [$F(5, 1720)=9.044$, $p<.001$, $\eta 2=.03$; Grade1<Grade2<Grade3=Grade4; Grade3<Grade5; Grade5=Grade6) (Fig. 3b).

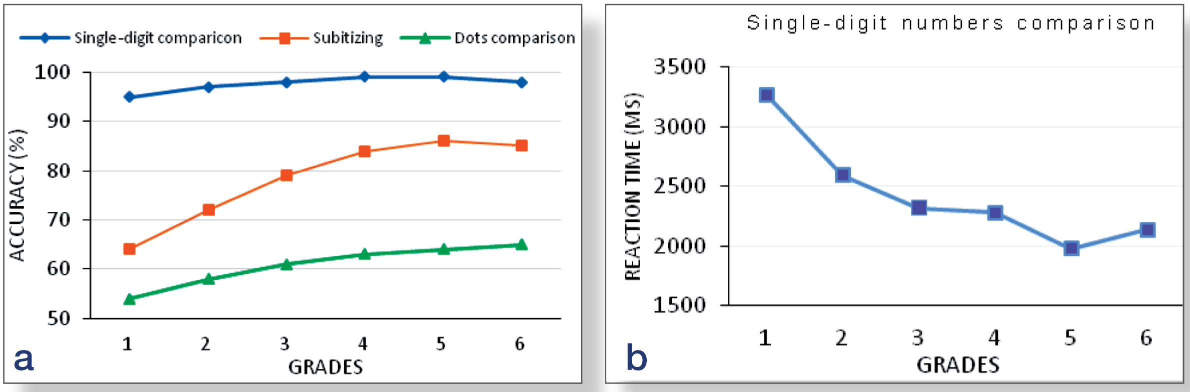

Fig. 3 - *a) Prestazioni medie per classe rispetto a AC (a) e RT (b) sui compiti: confronto di numeri ad una cifra, subitizing e confronto di punti.*

Nel compito “Confronto di numeri a più cifre” (compito 4 nella Tab. 3) sono emerse differenze significative nell’AC [F(5, 1722)=22.299, p<.001, η^2=.06]; con un miglioramento all’aumentare della classe (Fig. 6b), in particolare nelle classi 4, 5 e 6 (Grade4<Grade5<Grade6) che non si è replicato nell’analisi dei TR [F(3, 1287)=1.877, p=.1321].

Nel compito “Dettato di numeri” (compito 6 nella Tab. 3) sono emerse differenze significative nell’accuratezza con l’avanzare della classe [F(5, 1722)=412.160, p<.001, η^2=.55] fino alla 5 primaria (Grade1<Grade2<Grade 3<Grade4<Grade5=Grade6). Non sorprendentemente, la prestazione migliora anche in termini di velocità F(3, 1282)=7.694, p<.001, η^2=.02; (Grade3<Grade4<Grade5<Grade6).

Anche le prove “Numero successivo” e “Numero precedente” (Tab. 3) sono state svolte in modo più accurato con l’avanzare della classe [rispettivamente: F(5, 1722)=62.375, p<.001, η^2=.15; e F(5, 1721)=88.831, p<.001, η^2=.21] con un cambiamento più marcato nelle prime tre classi (Fig. 4a). La prestazione per gli alunni più grandi è stata analizzata anche in termini di velocità dove si nota un atteso miglioramento nei passaggi di classe [Numero successivo: F(3, 1270)=14.104, p<.001, η^2=.03; Grade3<Grade4<Grade5=Grade6, Fig. 4b; Numero precedente [F(3, 1264)=16.413, p<.001, η^2=.04] (Grade3<Grade4<Grade5=Grade6, si veda Fig. 4b).

Nella prova di “Subitizing” (Tab. 3) la prestazione migliora in accuratezza all’aumentare della classe [F(5, 1721)=67.456, p<.001, η^2=.16] (Fig. 3a), ma solo fino alla quarta classe (Grade1<Grade2<Grade3<Grade4=Grade5=Grade6).

Nel compito “Enumerazione” la prestazione migliora in termini di accuratezza con l’avanzare della classe [F(5, 1720)=25.149, p<.001, η^2=.07] (Fig. 5a), anche se non in modo lineare (Grade1<Grade2=Grade3<Grade4=Grade5=Grade6); tale pattern di replica anche per la velocità [F(5, 1700)=59.545, p<.001, η^2=.15], Grade1<Grade2<Grade3=Grade4; Grade3<Grade5; Grade5=Grade6) (Fig. 5b).

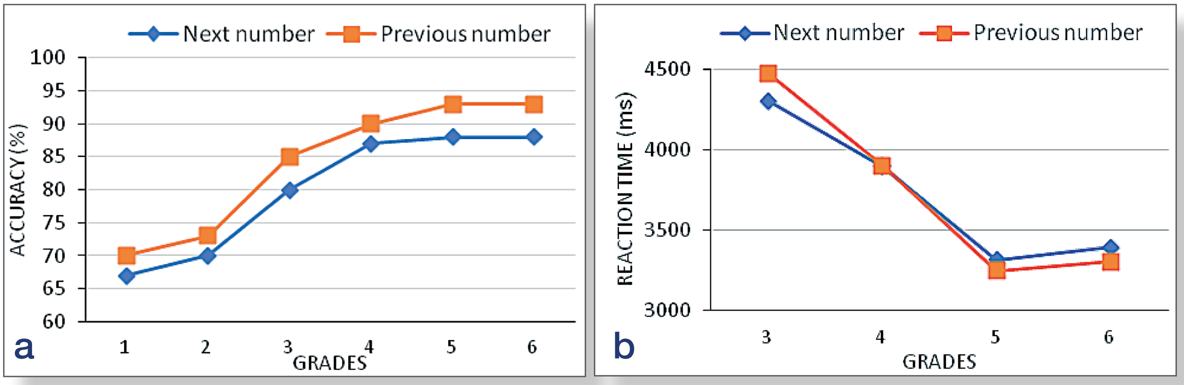

Fig. 4 - *a) Prestazioni medie per classe rispetto a AC (a) e RT (b) sui compiti: numero successivo e numero precedente.*

Nel compito “Recupero di fatti additivi” (compito 11 nella Tab. 3) la prestazione migliora in termini di accuratezza [F(5, 1716)=51.651, $p<.001$, $\eta 2=.13$], Grade1<Grade2<Grade3<Grade4) con un calo inatteso per gli alunni più grandi (Grade4>Grade5>Grade6, Fig. 5a). Similmente, per le classi 3-6 per cui è stato possibile analizzare i TR, si registra un miglioramento anche in termini di velocità [F(5, 1698)=117.489, $p<.001$, $\eta 2=.26$] (Grade1<Grade2<Grade3=Grade4<Grade5<Grade6, si veda Fig. 5b).

Un analogo profilo è emerso nell’analisi dei “Recupero di fatti moltiplicativi” ([F(3, 1274)=10.092, $p<.001$, $\eta^2=.02$] ove il miglioramento emerge con l’avanzare della classe ad eccezione degli alunni più grandi (Fig. 5a). Rispetto ai TR, hanno contribuito all’analisi solo le classi 3 e 6, ove l’effetto principale di classe è ancora significativo [F(3, 1249)=31.153, $p<.001$, $\eta^2=.07$] (Grade3<Grade4<Grade5=Grade6, si veda Fig. 5b).

Nei compiti della Linea numerica si replica un miglioramento della prestazione con l’aumentare dell’età sia nel range “0-100” (compito 14, Tab. 5) [F(5, 1652)=218.939, $p<.001$, $\eta^2=.40$; Grade1<Grade2<Grade3<Grade4=Grade5=Grade6)] sia nel range “0-1000” (compito 15 nella Tab. 5) F(3, 1207)=71.833, $p<.001$, $\eta^2=.15$;] (Grade3<Grade4<Grade5=Grade6, si veda Fig. 2).

Il compito “Calcolo a mente” (compito 13, Tab. 3) è risultato più accurato con l’aumentare della classe negli alunni di scuola primaria [F(3, 1260)=27.627, $p<.001$, $\eta^2=.06$] con un calo significativo negli alunni della prima classe di scuola secondaria (Grade3<Grade4<Grade5>Grade6).

Nel compito “Quadrati” (compito 16, Tab. 3) l’accuratezza migliora con il passaggio di classe (Fig. 6a) F(5, 1615)=109.897 $p<.001$, $\eta^2=.25$] fino alla quinta (Grade1<Grade2<Grade3<Grade4<Grade5=Grade6). Invece per il compito “Blocchetti” (compito 11, Tab. 3) il miglioramento procede per stadi [F(5, 1596)=51.552 $p<.001$, $\eta^2=.14$]: la differenza tra le classi 3 e 4 e tra le classi 5 e 6 non sono infatti significative (Fig. 6a) Grade1<Grade2<Grade3=Grade4<Grade5=Grade6).

Per quanto riguarda la prova “Problemi” (compito 18, Tab. 3) l’analisi ha interessato solo le classi 3-6 con un effetto classe significativo [F(3, 1153)=33.638 $p<.001$, $\eta^2=.08$] e un miglioramento a stadi, dato che le classi 3 e 4 e le classi 5 e 6 non differiscono tra loro (Grade3=Grade4<Grade5=Grade6). (Fig. 6b).

Nel compito “Principi di calcolo” (compito 19, Tab. 3) la prestazione è ancora una volta più accurata con il procedere delle classi [F(3, 1128)=21.182 $p<.001$, $\eta^2=.05$] (Grade3<Grade4<Grade5) con una equivalenza trai gruppi più grandi (Grade5=Grade6).

Infine, per il compito “Pattern numerici” (compito 20, Tab. 3) sono state riscontrate differenze significative [F(5, 1527)=65.302 $p<.001$, $\eta^2=.18$] all’aumentare della classe. Nonostante la prestazione media sia aumenta all’aumentare della classe, (Fig. 6a) la differenza tra le classi 2 e 3 e tra le classi 4 e 5 non è risultata essere significativa (Grade1<Grade2=Grade3<Grade4=Grade5=Grade 6).

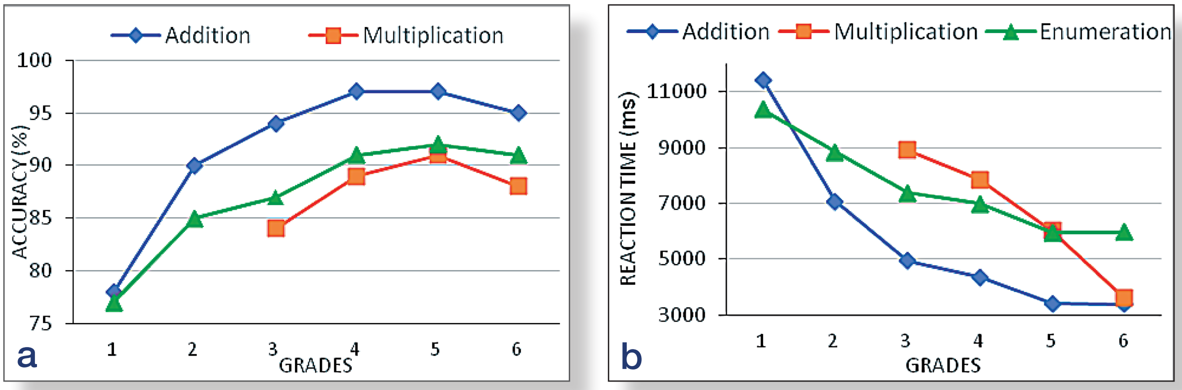

Fig. 5 - *medie dell'AC (a) e RT (b) per classe sui compiti recupero fatti additivi e moltiplicativi ed enumerazione.*

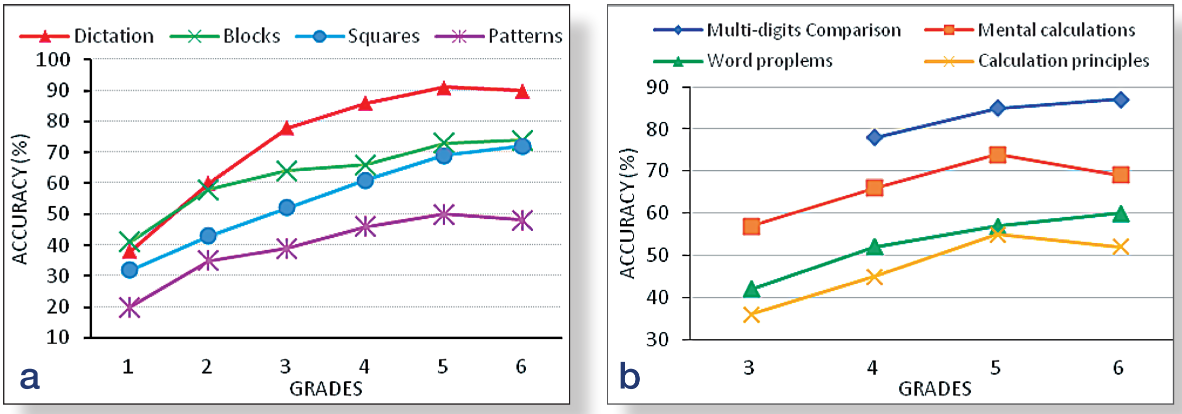

Fig. 6 - *Prestazioni medie degli studenti per classe nei compiti (a) dettato i numeri, blocchetti, quadrati, sequenze, e (b) confronto di numeri a più cifre, calcolo a mente, problemi a parole e principi di calcolo.*

5.4. Validità: coefficienti di correlazione di Pearson tra valutazioni degli insegnanti e prestazioni sui compiti della batteria

La Tab. 7 descrive le correlazioni tra compiti della batteria MathPro e le valutazioni da parte degli insegnanti degli studenti partecipanti. In grassetto sono evidenziate le correlazioni significative (coefficienti >.2; p<.001), discusse nella sezione 6.

Grade	1	2	3	4	5	6
Dots comparison (AC)	.112	.198**	.086	**.237****	.135*	.108
Single digit numbers comparison (AC)	**.272****	.152*	.050	.159**	.136*	.054
Single digit numbers comparison (CRT)	.035	.079	.044	.004	.070	.085
Multi-digit numbers comparison (AC)	-	**.282****	**.246****	**.327****	**.398****	**.370****
Multi-digit numbers comparison (CRT)		.061	.059	.175**	.205**	.127*
Numbers dictation (AC)	**.281****	**.305****	.165**	**247****	**.299****	**.257****
Numbers dictation (CRT)	-	-	.033	.078	.005	.023
Next number (AC)	**.265****	**.304****	.123*	**.244****	**.225****	.109
Next number (CRT)	-	-	.064	.027	.058	.032
Previous number (AC)	**.344****	**.257****	.178**	.180**	**.290****	.181*
Previous number (CRT)	-	-	.054	.130*	.173**	.034
Subitizing (AC)	**.223***	.159*	.144**	106	.098	.187**
Enumeration (AC)	.169*	.171*	.095	.118**	.177**	.093
Enumeration (CRT)	-	.075	.178**	.172**	.154**	.153*
Addition facts retrieval (AC)	**.251***	**.243****	.196**	.083	**.208****	.072
Addition facts retrieval (CRT)	.166*	.162*	**.376****	**.327****	**.230****	**.290****
Multiplication facts retrieval (AC)	-	-	**.442****	**.311****	**.414****	**.324****
Multiplication facts retrieval (CRT)	-	-	**.211****	**.308****	**.358****	.178**
Mental calculations (AC)	-	**.251****	**.419****	**.471****	**.497****	**.451****
Number Lines 0-100 (PAE)	**.382****	**.296****	**.474****	**.414****	**.372****	**.370****
Number Lines 0-1000 (PAE)	-	-	**.405****	**.445****	**.376****	**.351****
Squares (AC)	**.309****	**.204****	**.284****	**.310****	**.408****	**.328****
Building blocks (AC)	**.224****	.172**	.185**	**.248****	**.299****	**.339****
Word problems (AC)	-	.182**	**.421****	**.510****	**.498****	**.449****
Calculation principles (AC)	-	**.211****	**.350****	**.361****	**.470****	**.380****
Numerical patterns (AC)	**.315****	.157**	**.380****	**.406****	**.479****	**.499****

Tab. 7 - *Coefficienti di correlazione di Pearson tra i compiti del MathPro e le valutazioni degli insegnanti.*

**p<.001; *p<.01

5.5. Confronto tra le prestazioni degli studenti identificati dagli insegnanti come aventi "basse prestazioni" e il resto del campione

Per esaminare il potere della batteria MathPro di discriminare gli studenti identificati dai propri insegnanti come "aventi basse prestazioni in matematica" (n=40, n=38, n=32, n=23, n=27, n=60 rispettivamente per le classi 1, 2, 3, 4, 5, 6) abbiamo condotto dei T-test su campione unico confrontando, per ogni classe, la prestazione di questi alunni con quelle dell'intero campione. La Tab. 8 riporta i risultati di tali analisi.

	Grade 1	Grade 2	Grade 3	Grade 4	Grade 5	Grade 6
	t (40)	t (38)	t (32)	t (23)	t (27)	t (60)
Dots comparison (AC)	-1.064	-2.244*	-2.368*	-1.241	-0.775	-1.486
Single digit numbers comparison (AC)	-2.709**	-0.465	-1.473	-2.684**	-1.737	.513
Single digit numbers comparison (CRT1)	0.119	1.201	-2.571**	-0.969	-1.336	-2.559**
Multi-digit numbers comparison (AC)	-	-3.002**	-3.747***	-4.804***	-3.258**	-4.126***
Multi-digit numbers comparison (CRT1)	-	-0.192	-1.378	-1.620	-2.870**	-1.712
Numbers dictation (AC)	-2.677**	-3.120**	-2.297*	-2.476*	-4.329***	-2.483**
Numbers dictation (CRT2)	-	-	0.546	1.060		
Next number (AC)	-5.248***	-4.055***	-1.593	-2.686**	-2.150*	-1.556
Next number (CRT2)	-	-	0.219	2.339*		
Previous number (AC)	-6.187***	-3.122**	-2.917**	-2.014*	-2.648**	-2.243**
Previous number (CRT2)	-	-	-1.277	-2.621*		
Subitizing (AC)	-1.973*	-0.619	-1.740	-0.926	-0.384	-1.651
Enumeration (AC)	-2.627*	-1.663	-0.799	-2.015*	-0.729	-0.481
Enumeration (CRT2)	-	1.955	-2.794**	-2.197*	-2.189*	-2.545**
Addition facts retrieval (AC)	-2.941**	-2.335*	-2.213*	-1.751	-1.405	-0.256
Addition facts retrieval (CRT2)	-	-1.263	-3.035**	-1.860	-2.519*	-2.794**
Multiplication facts retrieval (AC)	-	-	-4.981***	-3.643**	-3.670***	-3.511***
Multiplication facts retrieval (CRT2)	-	-	-2.784**	-2.823**	-2.503**	-2.559**
Mental calculations (AC)	-	-3.362**	-5.986***	-6.319***	-4.791***	-5.225***
Number Lines 0-100 (PAE)	-3.918***	-4.249***	-4.787***	-2.812**	-2.735**	-3.104**
Number Lines 0-1000 (PAE)	-		-5.909***	-3.857***	-3.248**	-2.878**
Squares (AC)	-3.615***	-1.647	-4.271***	-3.416**	-3.857***	-2.983**
Building blocks (AC)	-3.070**	-2.197*	-3.204**	-2.790**	-2.468*	-3.486***
Word problems (AC)	-	-2.724**	-7.728***	-6.528***	-4.182***	-2.978**
Calculation principles (AC)	-	-3.334**	-6.180***	-4.828***	-5.681***	-4.419***
Numerical patterns (AC)	-3.777***	-3.095**	-6.029***	-5.848***	-4.691***	-5.021***

Tab. 8 - *Risultati del T-test che mostrano differenze significative nelle prestazioni su certi compiti da parte degli studenti identificati dai propri insegnanti come "aventi basse prestazioni in matematica".*

***p<.001; **p<.01; *p<.05;
[1] CRT: Median RT- Median RT of Computer mouse speed task
[2] CRT: Median RT- Median RT of Screen calculator use task

Nella sezione 6, dedicata alla discussione, presentiamo brevemente le differenze significative (p<.001; p<.01) evidenziate in grassetto nella tabella.

6. Discussione dei principali risultati delle analisi

In questa sezione presentiamo e discutiamo i principali risultati delle analisi condotte, per poi usarli per descrivere come possono essere individuati *profili di apprendimento matematico*. Quindi concludiamo con alcune implicazioni didattiche e la menzione di studi attualmente in corso per continuare il filone di ricerca descritto in questo studio.

6.1. Discussione dei risultati presentati nella sezione 5

Complessivamente, l'effetto genere non è risultato significativo se non in un limitato numero di compiti, prevalentemente in quelli di natura visuo-spaziale. Da studi precedenti ci aspettavamo prestazioni superiori dei maschi rispetto alle femmine nella consegna "Blocchetti", che valuta squisitamente le abilità di natura spaziale. Inoltre, abbiamo riscontrato prestazioni superiori dei maschi rispetto alle femmine solo in due prove numeriche, vale a dire i due compiti della linea numerica, in cui si chiede agli studenti di posizionare dei numeri su linee dei numeri in cui sono presenti soltanto la tacca dello 0 e quella del 100 o del 1000. Il vantaggio maschile per questo tipo di compito è stato già confermato in letteratura (Bull *et al.,* 2013; Gunderson *et al.,* 2012; Reinert *et al.,* 2016;) ma studi recenti (Hutchison *et al.,* 2018) suggeriscono che lo scarto tende a diminuire con l'età. I ricercatori in questi studi hanno fornito due possibili interpretazioni a tale effetto: da un lato è possibile che fattori culturali, come l'istruzione, siano utili per mitigare le differenze di genere nell'elaborazione visuo-spaziale; dall'altro è possibile che nel compito della linea numerica, con il passare dell'età, si faccia meno affidamento alle strategie spaziali (alla base delle differenze di genere) (Hutchison *et al.,* 2018). È possibile che tali interpretazioni siano applicabili anche al nostro studio.

Per quanto riguarda le analisi sull'effetto classe (sezione 5.3.), che hanno preso in considerazione le differenze tra classi, come atteso, abbiamo notato un generale miglioramento con l'avanzare del percorso scolastico. In alcuni compiti il miglioramento più rilevante è avvenuto nel corso del primo triennio della scuola primaria, per poi assestarsi nelle classi successive. Per esempio, nei compiti più semplici, come il compito di confronto di numeri, il subitizing o il compito di enumerazione si raggiunge una prestazione accurata già in classe 3, e la prestazione rimane tale nelle classi successive.

Sottolineiamo, poi, un interessante fenomeno rilevato in alcune prove relativamente alla prestazione della classe quinta primaria e la classe prima di scuola secondaria di primo grado. Nei compiti "Confronto di numeri a più cifre" (quando misuriamo il TR), "Dettato numeri", "Recupero di fatti additivi" (sia misurando l'AC che il TR) e "Calcolo a mente” si è rilevato un calo di prestazione degli alunni più grandi. Dato che tale fenomeno non è emerso negli altri Paesi in cui il MathPro è stato standardizzato, riteniamo che quanto osservato sia attribuibile al cambiamento, indotto dal sistema scolastico italiano, che coinvolge gli alunni nel passaggio dalla scuola primaria alla scuola secondaria di primo grado. In particolare gli alunni, cambiando grado di scuola, affrontano un mutamento importante nelle relazioni sociali, tra compagni di classe e insegnanti, che porta a investire molta energia in aspetti diversi, a volte a scapito delle prestazioni scolastiche. Invitiamo dunque gli educatori a tenere conto di questo appesantimento cognitivo momentaneo.

Osservando le correlazioni tra le prestazioni nel MathPro e le valutazioni degli insegnanti (Tab. 7), emerge chiaramente che alcune prove, per es., “Recupero di fatti additivi”, “Recupero di fatti moltiplicativi”, “Calcolo a mente”, “Linee dei numeri 0-100 e 0-1000”, “Quadrati”, “Blocchetti”, “Problemi”, “Principi di calcolo” e “Confronti di numeri a più cifre”, hanno correlazioni particolarmente forti con le valutazioni degli insegnanti, soprattutto nelle classi più avanzate (3, 4, 5 e 6[10]). Queste prove, che per natura sono più simili a quanto viene proposto nel contesto scolastico, afferiscono ai domini della memoria, del ragionamento e visuo-spaziale. Dunque, il profilo funzionale rispetto a questi domini sembra dare un grande valore aggiunto alla valutazione degli insegnanti sulle prestazioni dei propri alunni. Il potenziale di tale profilo funzionale sembra grande non solo da un punto di vista clinico, ma soprattutto da un punto di vista didattico in quanto, dopo ulteriori studi, dovrebbe consentire un’associazione efficace tra tipologie di proposte didattiche e profili di apprendimento degli studenti.

Nel primo biennio della scuola primaria la valutazione dell’insegnante correla con quasi tutte le prove, quindi anche con il dominio numerico di base: “Confronto di numeri a una cifra” (in classe 1), “Confronto di numeri a più cifre” (in classe 2), “Dettato di numeri”, “Numero successivo (AC)”, “Numero precedente (AC)”, “Recupero di fatti additivi (AC)”, “Calcolo a mente” (classe 2), “Linea dei numeri 0-100”, “Quadrati”, “Blocchetti” (classe 1), “Principi di calcolo” (classe 2) e “Pattern numerici” (classe 1). Questo risultato non stupisce se si pensa che molta della matematica insegnata in queste prime fasi di apprendimento a scuola riguarda ancora contenuti legati al dominio numerico di base.

Per quanto riguarda il confronto tra alunni identificati dagli insegnanti come scarsi e il restante campione, si nota che le differenze emergono in tutti i compiti afferenti al dominio della memoria: “Dettato di numeri”, “Numero precedente”, “Enumerazione” (dalla classe 3), “Recupero di fatti additivi” (AC fino alla classe 3 e CRT per classi 3, 5 e 6), “Recupero di fatti moltiplicativi (AC e CTR)” (a partire dalla classe 3 da quando è proposta), “Enumerazione (CRT)”. Tale discrepanza si estende a tutti i compiti afferenti al dominio del ragionamento e al dominio visuo-spaziale, ad eccezione che sul compito “Quadrati” (e solo in classe 2). Tali risultati sono in linea con quelli rilevati in relazione alla valutazione degli insegnanti, con

10. Indichiamo con “6” la classe prima della scuola secondaria di primo grado.

un numero maggiore di ambiti in cui gli alunni identificati come più deboli mostrano una caduta rilevante: "Confronto di punti" (ora significativo per classi 2 e 3), "Confronto di numeri a una cifra (AC o CRT)" (ora significativo per tutte le classi tranne 2 e 5), "Numero precedente (AC)" (prima significativo solo per classi 1, 2, 5, ora per tutte le classi), "Enumerazione" (prima non significativo per alcune classi, ora per tutte le classi tranne la classe 2), e "Recupero fatti additivi (AC)" (ora significativo anche per la classe 3).

Questi risultati suggeriscono che gli studenti identificati dagli insegnanti come aventi maggiori difficoltà in matematica falliscono di più non solo sulle prove maggiormente correlate con le valutazioni degli insegnanti ma anche su altre, tra cui alcune afferenti al dominio numerico di base. Dunque, soprattutto nei primi anni di scuola primaria, potrebbe essere utile promuovere una didattica che potenzi il dominio numerico di base parallelamente alle abilità implicate negli altri domini e già sostenute durante la regolare attività didattica. Inoltre, per ciascuno di questi alunni sarebbe opportuno analizzare il profilo individuale di apprendimento matematico (vedi sezione 6.2.). e proporre varianti alle attività di classe per adattarle alle specificità dei singoli.

6.2. Identificare profili di apprendimento matematico

Alla luce del lavoro di standardizzazione sulla popolazione italiana, la batteria MathPro consente di identificare *profili di apprendimento matematico*. Infatti, il sistema restituisce per ogni compito il percentile in cui si colloca la prestazione (rispetto agli studenti del campione italiano della stessa classe). Come esempio, riportiamo ora i profili ottenuti con il MathPro di due alunni italiani di classe prima di scuola secondaria di primo grado, con diagnosi clinica di DSA. I nomi dei compiti sono in inglese, ma corrispondono ai compiti del MathPro introdotti in italiano nella Tab. 3.

Esempio A

Notiamo come le prestazioni dell'ambito della memoria siano in norma o sopra norma (Fig. 7), e come siano le uniche - insieme al subitizing - a non essere scarse (sotto il 30-simo percentile). In particolare notiamo come le prestazioni nel confronto tra numeri arabi, in tutte le prove riguardanti il ragionamento numerico e nei due blocchi che riguardano il ragionamento spaziale in 2D e 3D, siano estremamente basse.

Il profilo di bassa prestazione in matematica emergente dall'esempio A descrive difficoltà nello sviluppo del ragionamento matematico, sia numerico che spaziale. Invece l'alunno pare aver sviluppato alcune abilità matematiche legate all'ambito della memoria, grazie, probabilmente, ad adeguate abilità linguistiche. Dunque, questo alunno, per apprendere, probabilmente attinge soprattutto da risorse verbali, che riesce anche a mantenere in memoria a lungo termine.

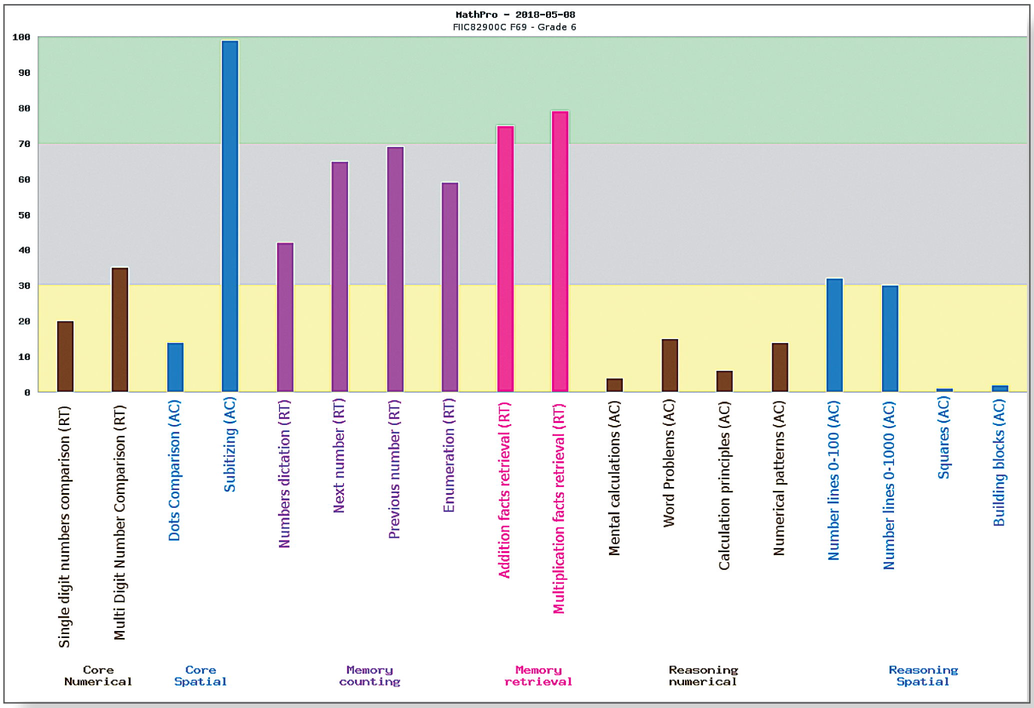

Fig. 7 - *Percentili delle prestazioni sui blocchi di item della batteria MathPro di uno studente di classe prima secondaria di primo grado.*

Esempio B

La prestazione sintetizzata nell'esempio B (Fig. 8) è, per certi aspetti, complementare rispetto a quella analizzata precedentemente.

In particolare, le prestazioni più basse sono nell'ambito della memoria: addirittura due prove (numero precedente e recupero di fatti moltiplicativi) non raggiungono il criterio minimo per essere analizzate. Nell'ambito numerico di base notiamo anche difficoltà con la gestione di numeri con più cifre. Le difficoltà legate alla memorizzazione (in questo caso mancata) di fatti numerici potrebbe essere dovuta anche a un insegnamento basato molto su aspetti verbali (questo è comune nell'insegnamento classico, soprattutto per le cosiddette tabelline). Notiamo, invece, come le prestazioni relative al dominio del ragionamento visuo-spaziale siano buone; come pure due delle quattro prestazioni relative al dominio del ragionamento numerico. Dunque, il profilo identifica diverse "abilità forti" su cui potrebbe essere costruito un intervento di recupero (o anche la regolare didattica in classe).

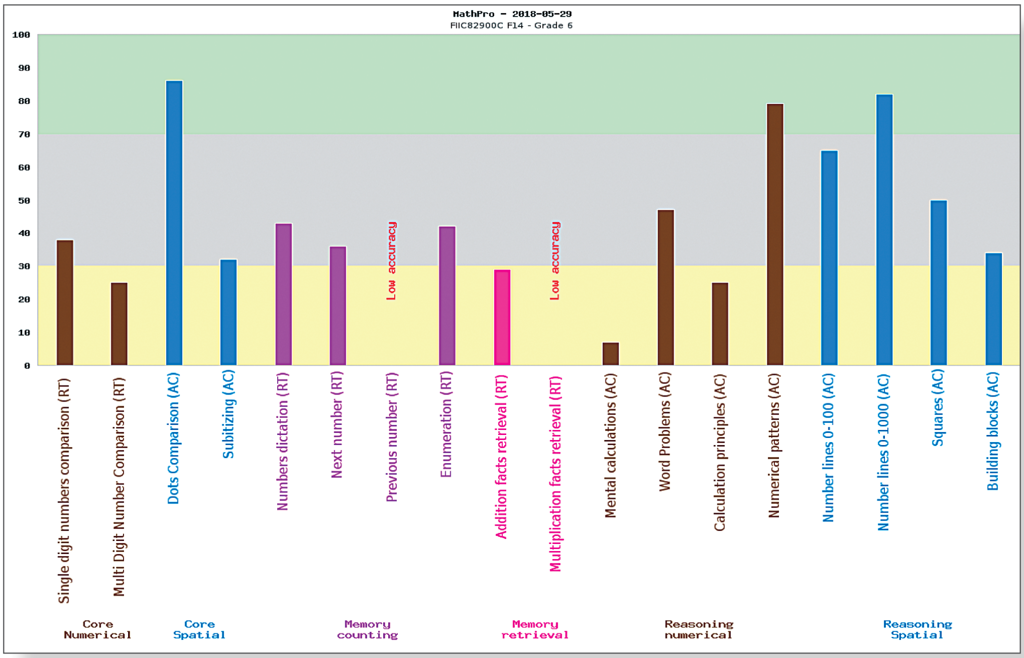

Fig. 8 - Percentili delle prestazioni sui blocchi di item del MathPro di uno studente di classe prima secondaria di primo grado, con diagnosi di dislessia.

Cogliamo l’occasione per sottolineare come, in generale le prove di confronto di punti e subitizing, associate all’ambito numerico di base, siano risultate essere meno predittive rispetto alle prestazioni degli studenti sul MathPro. Questo è un risultato interessante anche alla luce del fatto che le ipotesi iniziali sulla discalculia riguardano proprio questi “meccanismi di base”.

Riteniamo che un elemento di novità e unicità di questa direzione di ricerca sia che il modello confermato dai risultati sperimentali consente di correlare le difficoltà matematiche di ogni alunno con insiemi di abilità matematiche (che non riteniamo siano innate e immodificabili) più forti e più deboli sviluppate dall’alunno stesso. La nostra ipotesi è che in questo modo si potranno sviluppare attività didattiche e interventi di potenziamento più mirate e adatte alle peculiarità del singolo. In particolare, pensiamo che sia auspicabile, da un lato, utilizzare le abilità forti per migliorare le prestazioni matematiche dello studente favorendo l’apprendimento di strategie che le sfruttino maggiormente, e, dall’altro, potenziare, se possibile, le abilità più deboli progettando attività matematiche mirate (si veda anche Karagiannakis & Cooreman, 2014).

Per sperimentare tali ipotesi nell’ambito di una didattica inclusiva per l’intera classe, avremo bisogno di rendere “meno fine” la caratterizzazione di ciascun profilo, in modo da poter raggruppare studenti con profili “abbastanza simili” (identificati nella Tab. 9). Si potranno così studiare le modalità di apprendimento e le potenzialità di determinati materiali didattici appositamente progettati per tali macro-tipologie.

	Memoria (recupero fatti) ↑	Memoria (recupero fatti) ↓
Ragionamento ↑	1 (nessun particolare intervento didattico necessario)	3 (interventi basati sul ragionamento numerico o spaziale a supporto di processi di memorizzazione)
Ragionamento ↓	2 (interventi in cui la memoria supporta processi di ragionamento numerico e spaziale)	4 (è necessario approfondire la natura delle debolezze analizzando i processi di conteggio e numerici di base)

Tab. 9 - *Quattro macro-tipologie di profili di riferimento per la sperimentazione di materiale didattico inclusivo.*

Notiamo che il profilo nel nostro esempio A tende a collocarsi nella tipologia 2, mentre il profilo nell'esempio B nella tipologia 3. Stiamo attualmente studiando come associare in modo più automatico i profili emergenti dal MathPro alle tipologie 1, 2, 3, 4, con l'intento, in futuro, di valutare il valore da un punto di vista didattico.

In generale riteniamo che lo studio di profili di apprendimento matematico, basati sui quattro domini cognitivi identificati, sia un passo necessario per cominciare a sciogliere la complessità delle difficoltà di apprendimento in matematica e, nello specifico, della discalculia. Il percorso di apprendimento della matematica nella scuola primaria non si esaurisce infatti con l'aritmetica ma include ambiti più diversificati. Inoltre, questo studio ci pare una tappa fondamentale per raggiungere, eventualmente, maggiore inclusività nell'apprendimento matematico, sia a livello di classe che a livello individuale. È, infatti, questo, uno dei principali interessi di due progetti di ricerca recentemente realizzati: il progetto *"Per Contare"* (www.percontare.it) per classi terze e quarte di scuola primaria, e il progetto "Didattica della matematica inclusiva", promosso da IPRASE all'interno del progetto di sistema *"Le nuove frontiere del diritto all'istruzione. Rimuovere le difficoltà d'apprendimento, favorire una scuola inclusiva e preparare i cittadini responsabili e attivi del futuro"*, cofinanziato dal Fondo Sociale Europeo nell'ambito del PO 2014-2020 della Provincia autonoma di Trento. Entrambi i progetti, uno dedicato alla scuola primaria, e uno alla scuola secondaria di primo grado, si occupano della progettazione e sperimentazione di buone pratiche nella didattica della matematica, anche alla luce di particolari profili di apprendimento matematico, con l'obiettivo di rendere l'insegnamento della matematica il più inclusivo possibile.

Ringraziamenti

Ringraziamo di cuore tutti coloro che hanno collaborato alla ricerca nelle sedi di Varese, Milano e Pisa; in particolare: Simonetta Bralia, Giulia Bruni, Francesca Capello, Tommaso Cuviello, Barbara Fagiolini, Federica Maino, Rosaria Malafronte, Luigi Macchi, Maria Mellone, Eugenio Montefusco, Antonella Montone, Giulia Orlandi, Antonietta Serpillo. Infine, ringraziamo tutti gli studenti e gli insegnanti italiani che hanno partecipato per rendere possibile questa ricerca.

Bibliografia

AID-AIRIPA, (2012). *La diagnosi di discalculia.* Recuperato da: https://www.lineeguidadsa.it/download_documentiDSA/DocumentoDiscalculia_AID_AIRIPA.zip

Ambady, N., Shih, M., Kim, A., & Pittinsky, T. L. (2001). Stereotype Susceptibility in Children: Effects of Identity Activation on Quantitative Performance. *Psychological Science,* 12(5), pp. 385–390. DOI: 10.1111/1467-9280.00371

American Psychiatric Association (2013). *Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders*, 5 ed., DSM-5. (trad. it., 2014, Manuale diagnostico e statistico dei disturbi mentali, Quinta edizione, DSM-5. Milano: Raffaello Cortina Editore).

Aro, T., Eklund, K., Eloranta, A. K., Vesa, N., Korhonen, E., & Ahonen, T. (2018). Associations Between Childhood Learning Disabilities and Adult-Age Mental Health Problems, Lack of Education, and Unemployment. *Journal of Learning Disabilities*, 52(1), pp. 71–83. DOI: 10.1177/0022219418775118

Baccaglini-Frank, A. (2015). Preventing low achievement in arithmetic through the didactical materials of the PerContare project. In X. Sun, B. Kaur & J. Novotná (eds.), *ICMI Study 23 Conference Proceedings* (pp. 169-176.). Macau, China: University of Macau.

Baccaglini-Frank, A. (2017). Preventing learning difficulties in arithmetic: the approach of the PerContare project. *Mathematics Teaching,* 258, pp. 14-18.

Bartelet, D., Ansari, D., Vaessen, A., & Blomert, L. (2014). Cognitive subtypes of mathematics learning difficulties in primary education. *Research in Developmental Disabilities*, 35(3), pp. 657-670. DOI: 10.1016/j.ridd.2013.12.010

Beilock, S. L., Gunderson, E. A., Ramirez, G., & Levine, S. C. (2010). Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement. *Proceedings of the National Academy of Sciences,* 107(5), pp. 1860-1863.

Bull, R., Cleland, A. A., & Mitchell, T. (2013). Gender differences in the spatial representation of number. *Journal of Experimental Psychology: General,* 142, pp. 181–192.

Butterworth, B. (2005). Developmental dyscalculia. In J. I. D. Campbell (ed.), *Handbook of Mathematical Cognition* (pp. 455–468). New York: Psychology Press.

Butterworth, B. (2010). Foundational Numerical Capacities and the Origins of Dyscalculia. *Trends in Cognitive Sciences*, 14, pp. 534-541. DOI: 10.1016/j.tics.2010.09.007

Butterworth, B., Varma, S., & Laurillard, D. (2011). Dyscalculia: From Brain to Education. *Science,* 332, pp. 1049–1053.

Cvencek D., Meltzoff A. N., & Greenwald, A. G. (2011). Math-gender stereotypes in elementary school children. *Child Development*, 82(3), pp. 766–79. DOI:10.1111/j.1467-8624.2010.01529.x

Demo, H., & Ianes, D. (2013). What can be learned from the Italian experience? Some dispositive to improve inclusion. *Nouvelle Reveu de l'Adaptation et de la Scolarisation,* 61, 1.

Devine, A., Fawcett, K., Szűcs, D., & Dowker, A. (2012). Gender differences in mathematics anxiety and the relation to mathematics performance while controlling for test anxiety. *Behavioral and brain functions*, 8(1), 33. DOI: 10.1186/1744-9081-8-33

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: a bridge between beliefs and emotions. *ZDM Mathematics Education,* 43, pp. 471-483.

Dowker, A. (2007). What can intervention tell us about arithmetical difficulties?. *Educational and Child Psychology,* 24(2), pp. 64-75.

Else-Quest, N. M., Hyde, J. S., & Linn, M. C. (2010). Cross-National Patterns of Gender Differences in Mathematics: A Meta-Analysis. *Psychological Bulletin*, 136, pp. 103-127. DOI: 10.1037/a0018053

Galdi, S., Gadinu, M., & Tomasetto, C. (2014). The Roots of Stereotype Threat: When Automatic Associations Disrupt Girls' Math Performance. *Child Development*, 85(1), pp. 250-263 DOI: 10.1111/cdev.12128

Geary, D. C. (2005). *The origin of mind: Evolution of brain, cognition, and general intelligence*. American Psychological Association. DOI: 10.1037/10871-000

Gross, J. (2007). Supporting children with gaps in their mathematical understanding. *Educational and Child Psychology,* 24, pp. 146–156.

Gunderson, E. A., Ramirez, G., Beilock, S. L., & Levine, S. C. (2012). The relation between spatial skill and early number knowledge: The role of the linear number line. *Developmental Psychology,* 48(5), pp. 1229–1241. DOI: 10.1037/a0027433

Hawes, Z., Merkley, R., & Ansari, D. (2019) Integrating numerical cognition research and mathematics education to strengthen the teaching and learning of early number*. Numerical Cognition Teacher Professional Development*, pp. 1-59. DOI: 10.31234/osf.io/ta8gh

Hill, C., Corbett, C., & St. Rose, A. (2010). *Why So Few? Women in Science, Technology, Engineering, and Mathematics*. American Association of University Women. Retrieved from: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED509653.pdf [February 15, 2020]

Hutchison, J. E., Lyons, I. M., & Ansari, D. (2019). More Similar Than Different: Gender Differences in Children's Basic Numerical Skills Are the Exception Not the Rule. *Child Development*, 90, pp. 66–79. DOI: 10.1111/cdev.13044

Hyde, J. S., Fennema, E., & Lamon, S. J. (1990). Gender differences in mathematics performance: a meta-analysis. *Psychological Bulletin*, 107(2), pp. 139–55. DOI: 10.1037/0033-2909.107.2.139

Hyde, J. S. (2005). The gender similarities hypothesis. *American Psychologist*, 60, pp. 581–592. DOI: 10.1037/0003-066X.60.6.581

Ianes, D. (2006). La speciale normalità. *Strategie di integrazione e inclusione per le disabilità e i Bisogni Educativi Speciali.* Trento: Erickson.

Justicia-Galiano, M. J., Martin-Puga, M. E., Linares, R., & Pelegrina, S. (2017). Math anxiety and math performance in children: The mediating roles of working memory and math self-concept. *The British journal of educational psychology*, 87(4), pp. 573–589. DOI: 10.1111/bjep.12165

Karagiannakis, G., & Noël, M.-P. (2020). Mathematical Profile Test: A Preliminary Evaluation of an Online Assessment for Mathematics Skills of Children in Grades 1–6. *Behavioral Science, 10*(8), 126. https://doi.org/10.3390/bs10080126

Karagiannakis, G., & Baccaglini-Frank, A. (2014). The DeDiMa Battery: A Tool for Identifying Students' Mathematical Learning Profiles. *Health Psychology Review*, 2(4), pp. 291-297. DOI: 10.5114/hpr.2014.4632

Karagiannakis, G., Baccaglini-Frank, A., & Papadatos, Y. (2014). Mathematical learning difficulties subtypes classification. *Frontiers in Human Neuroscience*, 8, 57. DOI: 10.3389/fnhum.2014.00057

Karagiannakis, G., & Cooreman, A. (2014). Focused intervention based on a classification MLD model. In S. Chinn (ed.), *The Routledge international handbook of dyscalculia and mathematical learning difficulties* (pp. 265–276). London: Routledge.

Karagiannakis, G., Baccaglini-Frank, A., & Roussos, P. (2017). Detecting strengths and weaknesses in leraning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian Journal of Learn-*

ing Difficulties, 21(2), pp. 115-141. DOI:10.1080/19404158.2017.1289963

Kaufmann, L., Mazzocco, M. M., Dowker, A., von Aster, M., Göbel, S. M., Grabner, R. H., Henik, A., Jordan, N. C., Karmiloff-Smith, A. D., Kucian, K., Rubinsten, O., Szucs, D., Shalev, R., & Nuerk, H.-C. (2013). Dyscalculia from a developmental and differential perspective. *Front Psychol*. 4, 516. DOI: 10.3389/fpsyg.2013.00516

Kersey, A. J., Braham, E. J., Csumitta, K. D., Libertus, M. E., & Cantlon, J. F. (2018). No intrinsic gender differences in children's earliest numerical abilities. *npj Science of Learning,* 3, 12. DOI:10.1038/s41539-018-0028-7

Kersey, A. J., Csumitta, K. D., & Cantlon, J. F. (2019). Gender similarities in the brain during mathematics development. *npj Science of Learning, 4,* 19. DOI:10.1038/s41539-019-0057-x

Koumoula, A., Tsironi, V., Stamouli, V., Bardani, I., Siapati, S., Annika, G., Kafantaris, I., Charalambidou, I., Dellatolas, G., & von Aster, M. (2004). An epidemiological study of number processing and mental calculation in Greek schoolchildren. *Journal of learning disabilities,* 37, pp. 377-388.

Lewis, K. E., & Fisher, M. B. (2016). Taking stock of 40 years of research on mathematical learning disability: Methodological issues and future directions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47, pp. 338–371. DOI:10.5951/jresematheduc.47.4.0338

Maloney, E. A., & Beilock, S. L. (2012). Math anxiety: who has it, why it develops, and how to guard against it. *Trends Cogn Sci.,* 16(8), pp. 404-6. DOI: 10.1016/j.tics.2012.06.008

Marsh, H. W., & Martin, A. J. (2011). Academic self-concept and academic achievement: Relations and causal ordering. *British Journal of Educational Psychology,* 81(1), pp. 59-77.

Mazzocco, M. (2005). Challenges in Identifying Target Skills for Math Disability Screening and Intervention*. Journal of learning disabilities*, 38, pp. 318-323. DOI: 10.1177/00222194050380040701

Mazzocco, M. M. M., & Myers, G. F. (2003). Complexities in identifying and defning mathematics learning disability in the primary school-age years. *Annals of Dyslexia*, 53, pp. 218–253. DOI: 10.1007/s11881-003-0011-7

Mazzocco, M.M.M., Feigenson, L, & Halberda, J. (2011). Impaired acuity of the approximate number system underlies mathematical learning disability (dyscalculia). *Child Development, 82*, pp. 1224–1237. DOI: 10.1111/j.1467-8624.2011.01608.x

Mazzocco, M., & Räsänen, P. (2013). Contributions of longitudinal studies to evolving definitions and knowledge of developmental dyscalculia. *Trends in Neuroscience and Education*, 2, pp. 65–73. DOI: 10.1016/j.tine.2013.05.001

Murayama, K., Pekrun, R., Lichtenfeld, S., & Vom Hofe, R. (2012). Predicting long-term growth in students' mathematics achievement: the unique contributions of motivation and cognitive strategies. *Child Development*, 84(4), pp. 1475-90. DOI: 10.1111/cdev.12036

Muzzatti, B., & Agnoli, F. (2007). Gender and mathematics: Attitudes and stereotype threat susceptibility in Italian children. *Developmental Psychology*, 43(3), pp. 747–759. DOI: 10.1037/0012-1649.43.3.747

Nelson, G., & Powell, S. R. (2017). A systematic review of longitudinal studies of mathematics difficulty. *Journal of Learning Disabilities*, 51(6), pp. 523–539. DOI: 10.1177/0022219417714773

Organization for Economic Co-Operation and Development (OECD) (2014). *PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Mathematics, Reading and Science*, vol. 1 (Revised edition, February 2014). Pisa: OECD Publishing.

Passolunghi, M. C., Rueda Ferreira, T. I., & Tomasetto, C. (2014). Math–gender stereotypes and math-related beliefs in childhood and early adolescence. *Learning and Individual Differences*, 34, pp. 70–76. DOI: 10.1016/j.lindif.2014.05.005

Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A. N., Bertelletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., Dehaene, S., & Zorzi M. (2010) Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, 116, pp. 33–41. DOI: 10.1016/j.cognition.2010.03.012

Raven, J., Raven, J. C., & Court, J. H. (2000). *Manual for Raven's progressive matrices and vocabulary scales. Section 3: The standard progressive matrices*. Oxford, UK: Oxford Psychologists Press.

Reinert, R. M., Huber, S., Nuerk, H.-C., & Moeller, K. (2017). Sex differences in number line estimation: The role of numerical estimation. *British Journal of Psychology,* 108(2), pp. 334–350.

Rivera-Batiz, F. L. (1992). Quantitative literacy and the likelihood of employment among young adults in the United States. *The Journal of Human Resources,* 27, pp. 313–328.

Robotti, E., & Baccaglini-Frank, A. (2017). Using digital environments to address students' mathematical learning difficulties. In E. Faggiano, F. Ferrara & A. Montone (eds.), *Innovation and Technology Enhancing Mathematics Education. Mathematics Education in the Digital Era 10* (pp. 77-106). Springer International Publishing. ISBN 978-3-319-61487-8 and ISBN 978-3-319-61488-5

Rubinsten, O., & Tannock, R. (2010). Mathematics anxiety in children with developmental dyscalculia. *Behav Brain Funct*, 6, 46. DOI: 10.1186/1744-9081-6-46

Shalev, R. S., & Gross-Tsur, V. (2001). Developmental dyscalculia. *Pediatric Neurology,* 24(5), pp. 337–342.

Stoet, G., & Geary, D. C. (2013). Sex differences in mathematics and reading achievement are inversely related: within- and across-nation assessment of 10 years of PISA data. University of Glasgow. *PLoS ONE*, 8(3), e57988. DOI: 10.1371/journal.pone.0057988

Szűcs, D., & Goswami, U. (2013). Developmental dyscalculia: Fresh perspectives. *Trends in Neuroscience and Education*, 2, pp. 33–37. DOI: 10.1016/j.tine.2013.06.004

Thompson, C. A., & Opfer, J. E. (2008). The trouble with transfer: insights from microgenetic changes in the representation of numerical magnitude. *Child Development, 79*(3), pp. 788–804.

Tomasetto, C., Alparone, F. R., & Cadinu, M. (2011). Girls' math performance under stereotype threat: The moderating role of mothers' gender stereotypes. *De- velopmental Psychology*, *47*, pp. 943-949.

Tomasetto, C. (2013). Matematica per i maschi, italiano per le femmine: Stereotipi di genere e atteggiamenti verso le materie scolastiche tra genitori e figli. *The Inquisitive Mind Italia*, V, pp. 19-24. Recuperato da: http://www.igeacps.it/app/uploads/2018/10/Tomasetto-ticerca.pdf

Zhang, J., Zhao, N., & Kong, Q. P. (2019). The relationship between math anxiety and math performance: a meta-analytic investigation. *Frontiers in Psychology*, 10, 1613. DOI:10.3389/fpsyg.2019.01613