



## **PROGETTO**

“LE NUOVE FRONTIERE DEL DIRITTO ALL’ISTRUZIONE - fase 2 – Rimuovere le difficoltà d’apprendimento, favorire una scuola inclusiva e preparare i cittadini responsabili e attivi del futuro” - (ASSE 3 – Priorità 10i - RA 10.1 – Azione 10.1.1)

CUP C69E18000140001 codice progetto 2018\_3\_1011\_IP.01

# **VEDERE E CONGETTURARE IN GEOMETRIA**

Questa iniziativa è realizzata nell'ambito del Programma operativo FSE 2014 – 2020 della Provincia autonoma di Trento grazie al sostegno finanziario del Fondo sociale europeo, dello Stato italiano e della Provincia autonoma di Trento

La Commissione europea e la Provincia autonoma di Trento declinano ogni responsabilità sull'uso che potrà essere fatto delle informazioni contenute nei presenti materiali

**Competenze legate alla visualizzazione e alla manipolazione di oggetti matematici, mantenendo invarianti le proprietà secondo cui sono definiti, sono fondamentali in matematica. In particolare, queste sono al cuore dell'attività in ambito geometrico. In questo materiale metteremo in luce come varie attività facenti uso di software di geometria dinamica possano favorire la costruzione di queste competenze chiave.**

### Distinzione disegno-costruzione

Una distinzione utile da fare nell'ambito della geometria dinamica (ma utile anche altrove) è quella tra *disegno* e *costruzione*. Un disegno è la rappresentazione di una figura geometrica (che invece è l'oggetto matematico ideale) in cui gli elementi sono disposti "a occhio" in modo da mantenere le proprietà che le mettono in relazione solo apparentemente (non si sa dall'esterno se il costruttore del disegno le abbia concettualizzate o meno). Per esempio, eseguendo 4 click sullo schermo dopo aver selezionato il comando "punto" e congiungendoli per formare un quadrato, otterrò 4 punti che "a occhio" sembrano formare i vertici di un quadrato (magari sono stata attentissima a porli a due a due su rette parallele e perpendicolari seguendo i pixel in orizzontale e verticale sullo schermo) ma che non contengono, secondo il software, alcuna relazione tra loro. Infatti, prendendone uno qualsiasi posso trascinarlo e deformare il quadrato, anche se a occhio sembrava perfetto. Invece una costruzione prevede che anche le relazioni tra gli oggetti posti sullo schermo siano esplicitate e impostate al momento della costruzione. Dunque, se parto da due punti qualsiasi, i successivi dovranno essere costruiti imponendo esplicitamente (con i comandi dai menù del software) le condizioni, per esempio, di parallelismo/perpendicolarità delle rette e di congruenza di segmenti consecutivi.

Il software consente di controllare la bontà di una costruzione di figura geometrica con il *test di trascinamento*: muovendo qualsiasi punto trascinabile, se la costruzione è buona, nel suo complesso rappresenterà sempre una figura della classe definita (nell'esempio sopra la costruzione rappresenterà sempre un quadrato). Una figura dinamica (la rappresentazione nel software di una figura geometrica realizzata con costruzione) si dirà *robusta* o *stabile* se passa il test di trascinamento; altrimenti si dirà *instabile*.

A questo punto ha senso introdurre una distinzione fondamentale tra punto base (o indipendente) e punto dipendente.

#### Punto base/indipendente

Un punto base (o indipendente) è un punto che può essere trascinato e da cui dipendono altre parti della costruzione. In un software di geometria dinamica 2D questi punti possono avere libertà totale (2 gradi di libertà) oppure possono essere vincolati ad un altro oggetto (1 grado di libertà). Questi ultimi sono anche oggetti dipendenti, in quanto hanno bisogno di un vincolo unidimensionale sui cui spostarsi, per esempio un punto su una circonferenza.

#### Punto dipendente

È un punto costruito a partire dall'intersezione di altri oggetti. Non può essere spostato direttamente, ma eventualmente solo in modo indiretto, agendo su altri punti, che sono invece punti base. Un punto vincolato, invece, ha caratteristiche intermedie perché può essere trascinato lungo l'ente su cui è stato definito, ma può anche essere mosso indirettamente se il movimento di un punto base implica lo spostamento dell'oggetto su cui è vincolato.

Come i punti indipendenti e dipendenti, le proprietà possono essere indipendenti o dipendenti. Per esempio, se costruisco due rette tra loro perpendicolari, la loro perpendicolarità è una proprietà indipendente, o di costruzione; ma se costruisco una seconda retta perpendicolare alla prima, il suo parallelismo rispetto alla seconda retta (quella perpendicolare alla prima) è una proprietà dipendente, o conseguenza di quelle di costruzione. Le proprietà di costruzione e tutte le proprietà da esse dipendenti, che sono conseguenza logica di quelle di costruzione, vengono mantenute invarianti per qualsiasi trascinamento dei punti base.

Parliamo ora del rapporto tra una costruzione di una figura geometrica, sue possibili definizioni, e le sue proprietà. Consideriamo, per esempio, le consegne:

- 1) Sia AB un segmento qualsiasi; rappresentare un quadrato ABCD.
- 2) Dati due punti A, O, rappresentare un quadrato con vertice in A e centro in O.

Nel primo caso si può procedere costruendo un segmento AB, con due punti indipendenti, poi due rette ad esso perpendicolari, passanti per i vertici A e B, e una circonferenza di centro B a e raggio BA. Scegliendo uno dei punti d'intersezione di questa circonferenza con la retta per B, si

può costruire per esso la perpendicolare alla retta e ottenere il quarto vertice del quadrato. In questo modo si avrà costruito un quadrato stabile o robusto. Il quadrato avrà come proprietà di costruzione le seguenti: due lati consecutivi congruenti, due lati opposti (adiacenti ad AB) perpendicolari ad AB (quindi 2 angoli retti), il quarto lato perpendicolare ad uno dei precedenti (quindi un terzo angolo retto). In definitiva, il quadrato sarà stato costruito con le proprietà indipendenti: due lati consecutivi congruenti e 3 angoli retti; tutte le altre proprietà del quadrato sono dipendenti, e quindi dimostrabili attraverso teoremi della geometria euclidea.

Nel secondo caso, il quadrato si può costruire costruendo il segmento AO e la retta che lo contiene, poi la perpendicolare ad AO per O e la circonferenza di centro O e raggio OA. Le due rette perpendicolari intersecano la circonferenza nei quattro vertici del quadrato. In questo caso le proprietà di costruzione sono: diagonali perpendicolari, intersecantisi nei rispettivi punti medi. Tutte le altre proprietà, come per esempio i quattro angoli retti tra i lati del quadrato, sono tutte dimostrabili a partire da queste proprietà.

Quali definizioni abbiamo usato per effettuare le due costruzioni di quadrati robusti?

Nel primo caso una definizione frequentemente richiamata è quella del quadrato come “quadrilatero con tutti i lati congruenti e gli angoli retti”; notiamo che di questa definizione soltanto una parte delle proprietà sono state incluse come proprietà di costruzione. Nel secondo caso una definizione equivalente che potrebbe essere stata richiamata è quella di “parallelogramma con le diagonali perpendicolari e congruenti”. In questo caso, la proprietà tra quelle del “parallelogramma” costruita è l’intersezione delle diagonali nei rispettivi punti medi; infatti, tra le definizioni equivalenti di parallelogramma vi è quella di quadrilatero con le diagonali intersecantisi nei rispettivi punti medi.

In definitiva, possiamo osservare che l’ambiente di geometria dinamica ci consente di esplicitare le proprietà di costruzione (questo si può fare anche osservando i protocolli di costruzione in alcuni software come GeoGebra) e di visualizzare e sperimentare interagendoci dinamicamente tutte le altre proprietà della classe di figure costruita. A livello di scuola secondaria di primo grado può essere troppo avanzato parlare dei legami logici tra le proprietà e dei teoremi che consentono di dimostrare le proprietà dipendenti a partire da quelle di costruzione, ma è bene

che l'insegnante sia consapevole di tale gerarchia logica. In ogni caso, il software può essere usato dagli studenti per cogliere, attraverso un'interazione dinamica, proprietà di una classe di figure. In particolare, giocando su diverse costruzioni robuste di figure geometriche, l'insegnante può predisporre attività in cui dalle esplorazioni dinamiche emergono proprietà fondamentali di quella che può diventare una "carta d'identità" di una figura geometrica.

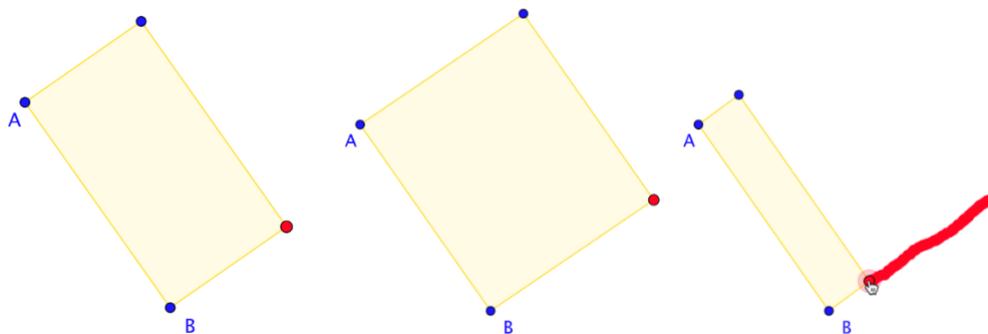
Per esempio, nella consegna "esploriamo il quadrato" articolata nella relativa scheda e file GeoGebra, sono state effettuate diverse costruzioni che rappresentano il quadrato. Si può notare come il movimento e l'individuazione di invarianti costituisca il motore dell'attività. Le diverse costruzioni incorporano diverse proprietà di partenza e dunque diverse definizioni di partenza, seppure la lista delle proprietà della "carta d'identità" della figura sia sempre la stessa. Infatti, ciascuna costruzione si comporta in maniera diversa: si può "tirare" in modo diverso, i punti base sono diversi. Ricordiamo che i diversi comportamenti corrispondono matematicamente a teoremi diversi, rappresentati tramite le figure: le ipotesi sono le proprietà di costruzione e le tesi tutte le proprietà da esse dipendenti, e sempre percepite come invarianti robuste della figura dinamica.

Un aspetto del software che ora è utile introdurre è lo strumento "traccia". Si può notare come in queste attività la traccia sia stata attivata su certi punti per mettere in evidenza visivamente particolari proprietà. La traccia può anche essere usata nel contesto di formulazione di congetture, attivandola su particolari punti. A tal proposito<sup>1</sup> analizziamo la consegna seguente:

*Trascina il punto rosso e trova una buona posizione affinché il PARALLELOGRAMMA diventi un RETTANGOLO NON QUADRATO. È possibile? Giustifica la risposta. Nel caso sia possibile, quale proprietà deve avere il punto rosso? Quanti rettangoli puoi disegnare (mantenendo fissata la distanza la distanza AB)?*

---

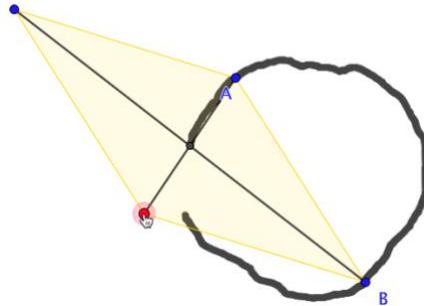
<sup>1</sup> Questo uso dello strumento traccia per formulare congetture potrebbe essere avanzato per il livello di scuola secondaria di primo grado, ma riteniamo che sia utile per l'insegnante, e che possa costituire un ambito di esplorazione adatto agli studenti più intraprendenti e matematicamente curiosi già in questo livello scolare.



Le tre figure sopra mostrano possibili posizioni per il punto rosso; la terza figura mostra l'esito di un trascinamento in cui si è cercata di mantenere invariata (in modo instabile) la proprietà "il quadrilatero è un parallelogramma". Notiamo che la presenza di "affinché" nella consegna spesso produce la ricerca di *cause* o *condizioni* di cui la proprietà che segue "affinché" è una *conseguenza*. Nel caso della terza figura, la traccia consente di inferire, per induzione, una proprietà che potrebbe essere condizione sufficiente da aggiungere alle proprietà di costruzione per ottenere la proprietà "il quadrilatero è un parallelogramma". In questo caso la proprietà potrebbe essere "il punto rosso appartiene alla perpendicolare ad AB per B". Una congettura espressa in forma di enunciato condizionale su questo potrebbe essere: "Data la costruzione del parallelogramma, se il vertice rosso appartiene alla perpendicolare per B ad AB (o se l'angolo in B è retto), allora il parallelogramma è un rettangolo."

L'attività prosegue con analoghe consegne per il quadrato, il trapezio scaleno e per il rombo. Come altro esempio dell'utilità dello strumento traccia, pensiamo al caso del rombo. Si chiede di trascinare il punto rosso affinché il quadrilatero (che è un parallelogramma robusto) sia un rombo; e nel caso in cui sia possibile, dire quale proprietà deve avere il punto rosso. Se si decide di cercare di mantenere la proprietà "il quadrilatero è un rombo" durante un trascinamento continuo (chiamato anche *trascinamento di mantenimento*) si può decidere di attivare lo strumento traccia per inferire regolarità nel movimento. Se, per esempio, si attiva traccia sul punto d'intersezione delle diagonali, si può notare che affinché il quadrilatero sia un rombo, questo punto deve appartenere alla circonferenza di diametro AB. La congettura "Se il punto d'intersezione delle diagonali appartiene alla circonferenza di diametro AB, allora il quadrilatero

della costruzione è un rombo” è in effetti dimostrabile immediatamente, ricordando il teorema per cui ogni triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo nell’angolo opposto al lato che coincide con il diametro della semicirconferenza.



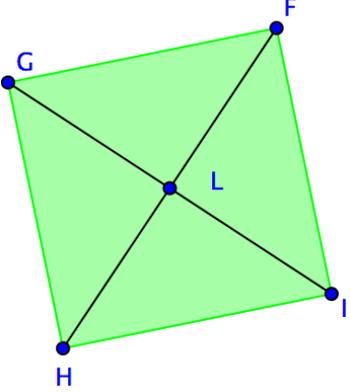
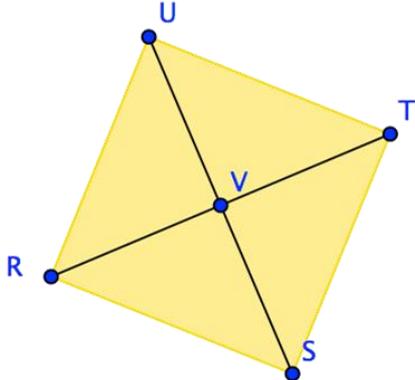
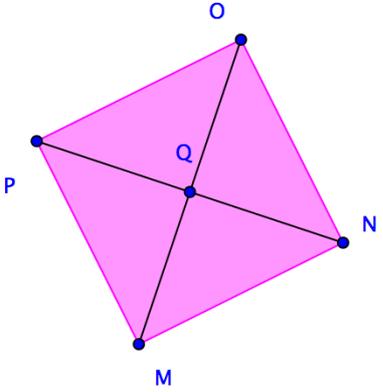
Non ci aspettiamo che gli studenti arrivino a formulare questo tipo di congetture, ma riteniamo che sia bene che i docenti siano consapevoli anche di queste potenzialità del software, per poter continuare ad offrire attività adatte a profili diversi in una stessa classe. In generale, riteniamo che ottime attività esplorative per la classe siano attività descritte metaforicamente come aventi “soglia bassa e soffitto alto” in modo che tutti gli studenti possano trovare punti d’entrata per incuriosirsi e partecipare, rimanendo stimolati.

#### ALLEGATI:

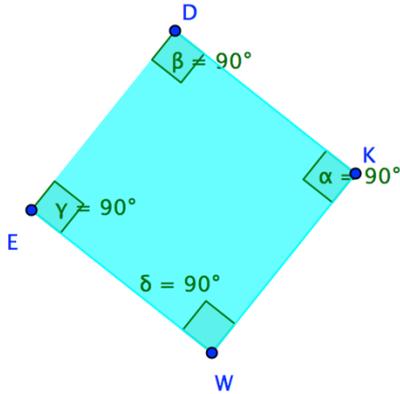
1. Esploriamo il quadrato: file GeoGebra e scheda.
2. Esploriamo il rettangolo: file GeoGebra e scheda.
3. Esploriamo il rombo: file GeoGebra e scheda.
4. Esploriamo il parallelogramma: file GeoGebra e scheda.

FILE ESPLORIAMO IL QUADRATO

Ciascuna delle figure che troverai in questo file ti svelerà una o più proprietà del QUADRATO.  
ATTENZIONE: SEGUI LE ISTRUZIONI, ALTRIMENTI LE TRACCE DEI PUNTI TI POSSONO CONFONDERE.

<p>VERDE</p> 	<p><i>Traccia sul punto F e sul punto I.</i>  <b>Trascina il punto G.</b>          Quale proprietà delle diagonali del quadrato ti suggeriscono le tracce?</p> <p>-----</p> <p>-----</p> <p><b>Misura ora i segmenti GL, LF, LI, LH:</b> quale proprietà delle diagonali puoi osservare?</p> <p>-----</p> <p>-----</p>
<p>GIALLO</p> 	<p><i>Traccia sul punto U e sul punto S.</i>  <b>Trascina SOLO il punto U.</b>          Quale proprietà dei lati del quadrato puoi osservare?</p> <p>-----</p> <p>-----</p>
<p>ROSA</p> 	<p><i>Traccia sul punto P.</i>  <b>Trascina SOLO il punto P.</b>          Quale proprietà del quadrato puoi osservare?</p> <p>-----</p> <p>Il segmento PN è il .....della</p> <p>-----;</p> <p>il punto Q è il punto di incontro delle diagonali del quadrato e anche il .....della .....</p>

AZZURRO



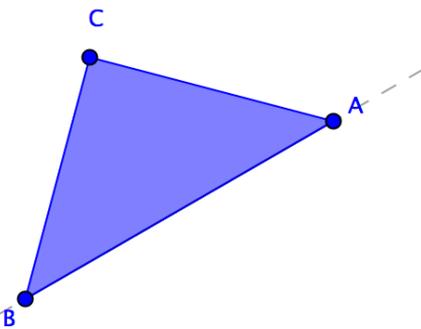
Ci sono solo due punti "liberissimi" trovali e poi trascina uno.

Quale proprietà degli angoli del quadrato puoi osservare?

---

---

BLU



Disegna il simmetrico del triangolo TRQ rispetto all'asse di simmetria tratteggiato. Che figura ottieni e cosa puoi dire?

---

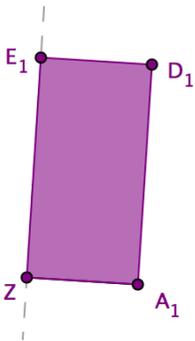
---

Descrivi le caratteristiche del triangolo ABC

---

---

VIOLA



Disegna il simmetrico del rettangolo viola rispetto all'asse di simmetria tratteggiato. Che figura ottieni e cosa puoi dire?

---

---

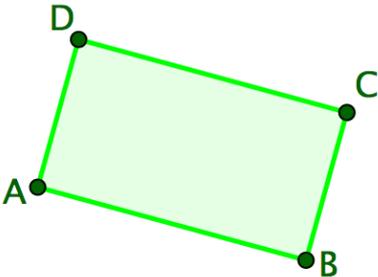
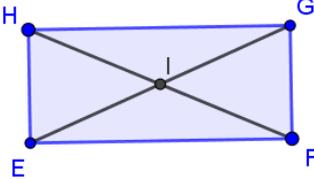
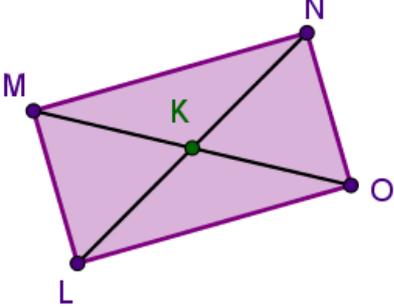
Descrivi le caratteristiche del rettangolo viola:

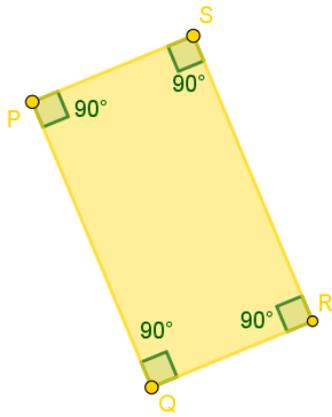
---

---

FILE ESPLORIAMO IL RETTANGOLO

Ciascuna delle figure che troverai in questo file ti svelerà una o più proprietà del RETTANGOLO.  
ATTENZIONE: SEGUI LE ISTRUZIONI, ALTRIMENTI LE TRACCE DEI PUNTI TI POSSONO CONFONDERE.

	<p><i>Traccia sul punto C e sul punto D.</i>  <b>Trascina il punto D.</b>                  Quale proprietà dei lati AD e BC puoi vedere?</p> <p>-----</p> <p>-----</p> <p>Ti aspetti che ciò valga anche per i lati AB e CD?</p> <p>-----</p> <p>-----</p>
	<p><i>Traccia sul punto E e sul punto G.</i>  <b>Trascina il punto H.</b>                  Quale proprietà dei lati del rettangolo puoi osservare?</p> <p>-----</p> <p>-----</p>
	<p><i>Traccia sul punto O.</i>  <b>Trascina SOLO il punto O.</b>                  Quali proprietà delle diagonali del rettangolo puoi osservare (sono due)?</p> <p>-----</p> <p>Il segmento LN è il ..... della</p> <p>-----;</p> <p>il punto K è il punto di incontro delle diagonali del</p> <p>rettangolo e anche il .....della</p> <p>-----</p>



Trascina SOLO il punto Q.

Quale proprietà degli angoli del rettangolo puoi osservare?

---



---

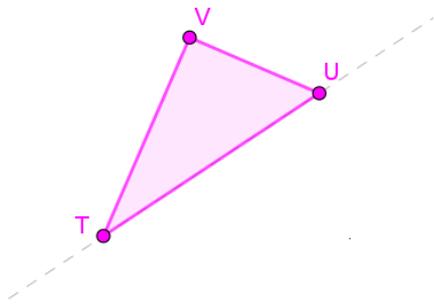
Misura i lati.

Quale proprietà dei lati del rettangolo puoi osservare?

---



---



Disegna il simmetrico del triangolo TVU rispetto all'asse di simmetria tratteggiato. Che figura ottieni e cosa puoi dire?

---



---

Descrivi le caratteristiche del triangolo TVU

---



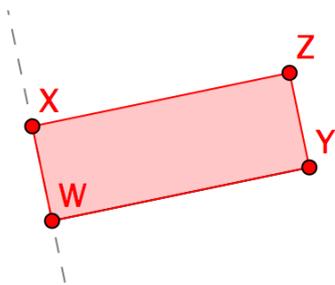
---

Riesci a pensare un modo per costruire un rettangolo a partire dal triangolo TVU? Prova a farlo sul file Geogebra.

---



---



Disegna il simmetrico del rettangolo WYZX rispetto all'asse di simmetria tratteggiato. Che figura ottieni e cosa puoi dire?

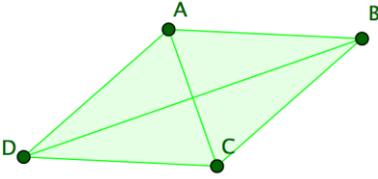
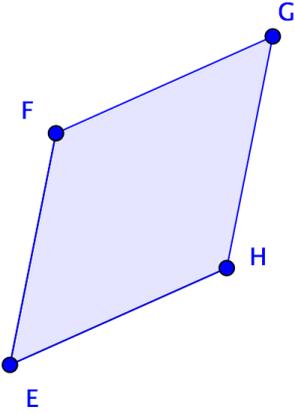
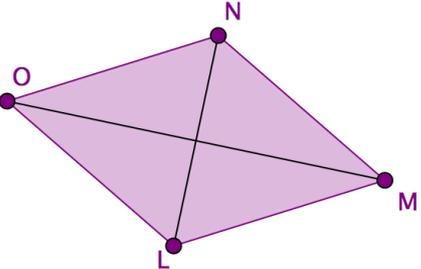
---

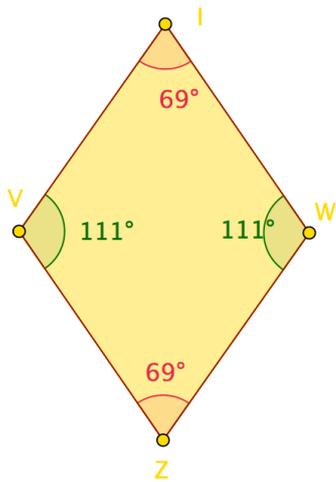


---

FILE ESPLORIAMO IL ROMBO

Ciascuna delle figure che troverai in questo file ti svelerà una o più proprietà del rombo.  
**ATTENZIONE: SEGUI LE ISTRUZIONI, ALTRIMENTI LE TRACCE DEI PUNTI TI POSSONO CONFONDERE.**

	<p><i>Traccia sul punto C e sul punto B.</i>  <b>Trascina il punto C e poi il punto B.</b>                      Quale proprietà delle diagonali del rombo ti suggeriscono le tracce?</p> <p>-----</p> <p>-----</p> <p><b>Segna ora il punto O intersezione delle diagonali e misura i segmenti AO, OB, OC, OD: quale proprietà delle diagonali puoi vedere?</b></p> <p>-----</p> <p>-----</p>
	<p><i>Traccia sul punto H.</i>  <b>Trascina SOLO il punto H.</b>                      Quale proprietà dei lati EH e EF puoi confermare?</p> <p>-----</p> <p><b>Ora toglì la traccia dal punto H e mettila sul punto G, poi trascina F: quale proprietà dei lati GH e EH puoi confermare?</b></p> <p>-----</p> <p>Cosa puoi dunque affermare riguardo ai lati del rombo?</p> <p>-----</p> <p>-----</p>
	<p><i>Traccia sul punto O e sul punto M.</i>  <b>Trascina SOLO il punto O.</b>                      Quale proprietà dei lati ON e LM puoi vedere?</p> <p>-----</p> <p>Ti aspetti che ciò valga anche per i lati MN e OL?</p> <p>-----</p>



C'è solo un punto quasi libero: trovalo e poi trascinalo.  
 Quale proprietà degli angoli del rombo puoi osservare?

---

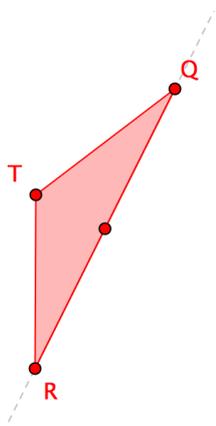
---

---

---

---

---



Disegna il simmetrico del triangolo TRQ rispetto  
 all'asse disegnato. Che figura ottieni e cosa puoi dire?

---

---

---

---

Descrivi le caratteristiche del triangolo ABC

---

---

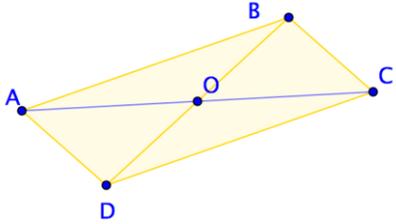
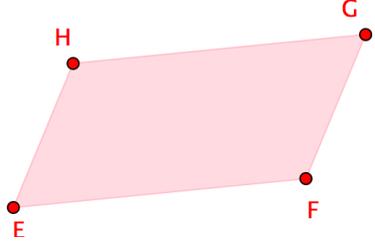
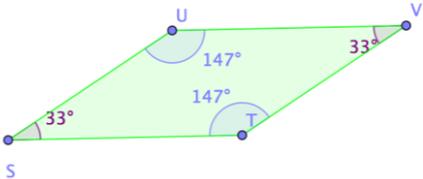
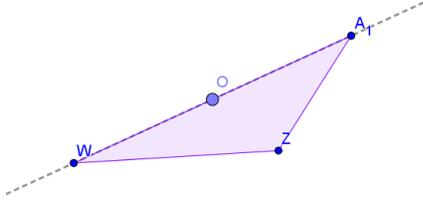
---

---

FILE ESPLORIAMO IL PARALLELOGRAMMA

Ciascuna delle figure che troverai in questo file ti svelerà una o più proprietà del PARALLELOGRAMMA

ATTENZIONE: SEGUI LE ISTRUZIONI, ALTRIMENTI LE TRACCE DEI PUNTI TI POSSONO CONFONDERE.

	<p>Misura i segmenti OB; OC; OA e OD.                      Trascina il punto C e il punto B.                      Le diagonali sono uguali? .....                      Quale proprietà delle diagonali puoi vedere?</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
	<p>Traccia sul punto F e sul punto G.                      Trascina il punto F.                      Quale proprietà dei lati del parallelogramma puoi osservare?</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
	<p>Trascina il punto U.                      Quale proprietà degli angoli del parallelogramma puoi osservare?</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
	<p>Disegna il simmetrico del triangolo WZA<sub>1</sub> rispetto all'asse di simmetria tratteggiato. Che figura ottieni e cosa puoi dire?</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>Riesci a pensare un modo per costruire un parallelogramma a partire dal triangolo TVU? Prova a farlo sul file Geogebra.</p> <p>.....</p> <p>.....</p>