



“LE NUOVE FRONTIERE DEL DIRITTO ALL’ISTRUZIONE - fase 2 -

Rimuovere le difficoltà d’apprendimento, favorire una scuola inclusiva e preparare i cittadini responsabili e attivi del futuro” - CUP

C69E18000140001 - Cod. Progetto 2018_3_1011_IP.01

LE FRAZIONI

Percorso riadattato da: Robotti, E., Censi, A., Segor, I. & Peraillon, L. (2016). Frazioni sul filo: Strumenti e strategie per la scuola primaria. Collana *Artefatti intelligenti*, Edizioni Centro Studi Erickson.

Inoltre, per un approfondimento si consiglia la lettura dell’articolo allegato: Lisarelli, G., Baccaglini-Frank, A. & Poli, F. (2019). Progettare attività didattiche inclusive: un esempio di percorso sulle frazioni. *RicercAzione*, 11(1), 169 – 189.

Questa iniziativa è realizzata nell’ambito del Programma operativo FSE 2014-2020 della Provincia autonoma di Trento grazie al sostegno finanziario del Fondo sociale europeo, dello Stato italiano e della Provincia autonoma di Trento

La Commissione europea e la Provincia autonoma di Trento declinano ogni responsabilità sull’uso che potrà essere fatto delle informazioni contenute nei presenti materiali



La tovaglietta

Frazione come parte di un tutto



Il gruppo A divide il foglio in mezzi, il gruppo B divide il foglio in quarti, il gruppo C divide il foglio in terzi.

Trovate tanti modi diversi, abbiate fantasia!

Unità frazionarie come diverse possibili suddivisioni in parti uguali di una tovaglietta

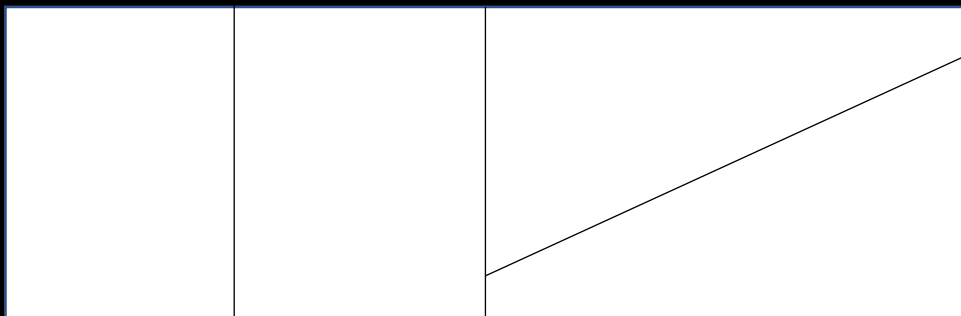
- Divisione in gruppi ma la consegna è individuale, cioè ogni studente lavora sul proprio foglio (assegnare l'unità frazionaria in base al gruppo).
- Fare attenzione se qualcuno usa il righello e ritaglia una strisciolina del foglio, che mette da parte, perché le misure di un foglio A4 non sono intere ma decimali. Così facendo cambia l'intero di riferimento.
- Obiettivo: costruire l'unità frazionaria con la suddivisione in parti uguali di una data unità di misura.



2

Prendiamo due realizzazioni di «un mezzo» prodotte dal gruppo A, sono uguali? In che senso? Perché?

Cosa si intende con «dividere in parti uguali»? Come si potrebbe dire meglio?



Come è stata suddivisa questa tovaglietta?

Quali unità frazionarie riconosciamo?



Unità frazionarie come diverse possibili suddivisioni in parti uguali di una tovaglietta

- Nella discussione collettiva si chiede di confrontare la stessa unità frazionaria realizzata su diverse tovagliette. Si vuole mettere in luce che tutti i pezzi ottenuti da un gruppo non sono necessariamente congruenti ma le superfici sono equivalenti.
- Obiettivo: fare chiarezza sull'uso della parola «uguale».

Discutere la differenza tra congruente (uguale come forma e area) ed equivalente (uguale come area). Attenzione, ad alcuni studenti può dare fastidio che una stessa tovaglietta possa essere suddivisa in modi diversi. E' importante riprendere e discutere questa possibilità.



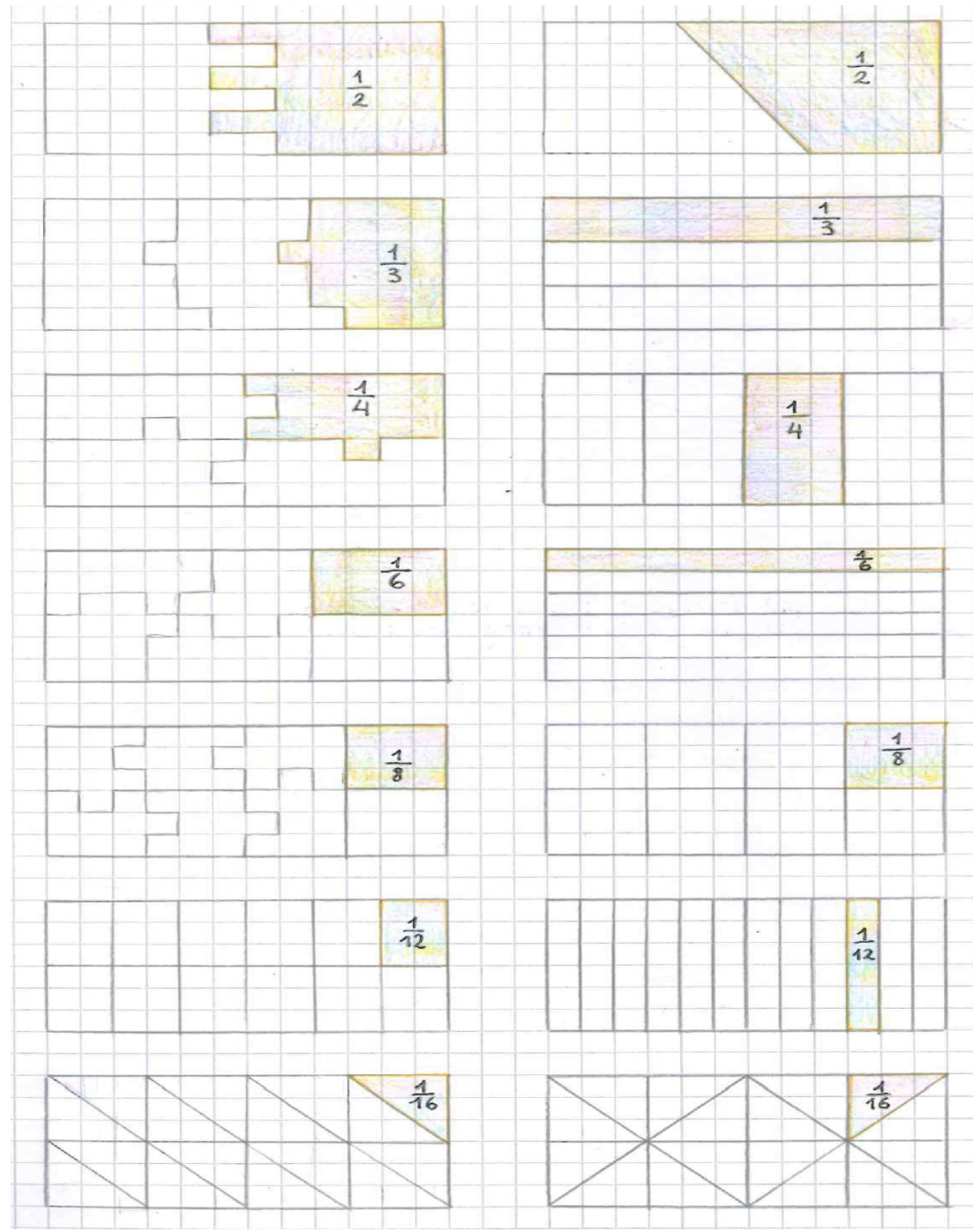
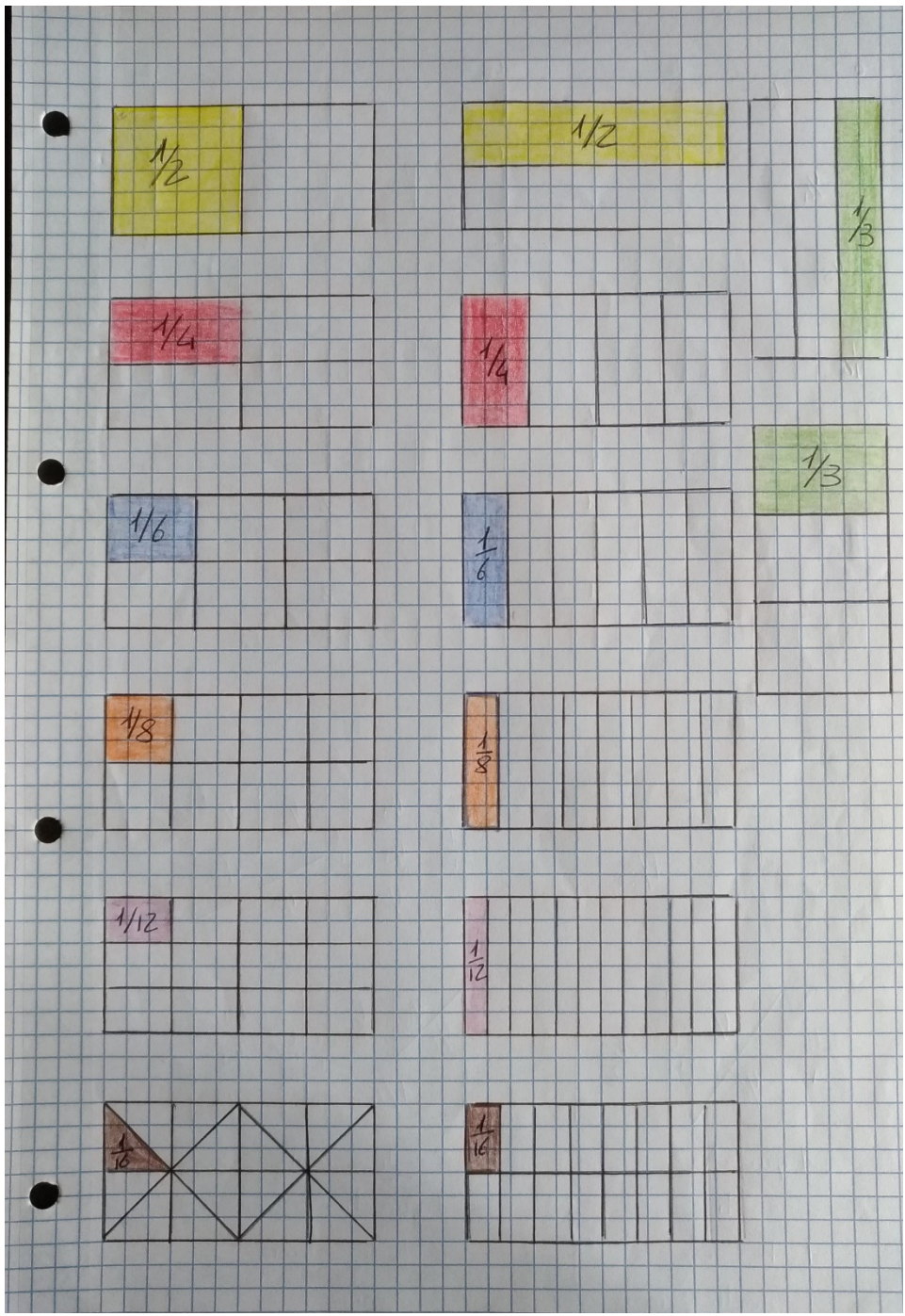


Riportare sul quaderno le varie unità frazionarie

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \frac{1}{12}; \frac{1}{16}; \dots$$

Disegnare ogni unità frazionaria in almeno 3 modi diversi.

Attenzione: per disegnare la tovaglietta fai un rettangolo 6x12!





DISCUSSIONE

Consideriamo le unità frazionarie disegnate sui vostri quaderni.
Partiamo con «un mezzo» e «un quarto», c'è una relazione?

Quale rapporto possiamo osservare tra «un mezzo» e «un sesto»?
E tra «un mezzo» e «un dodicesimo»?



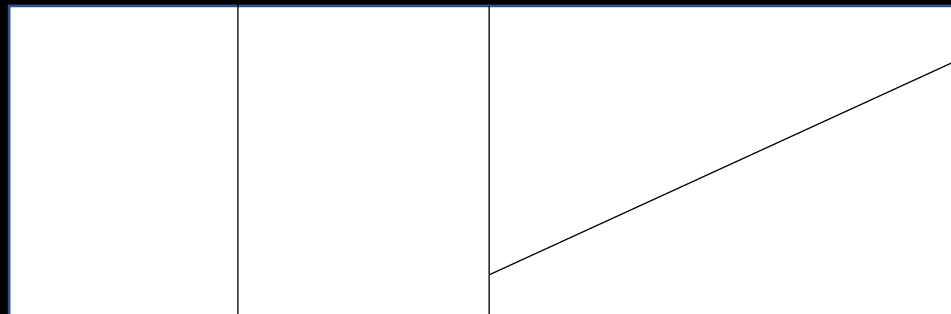


Disegnare alcune tovagliette sul quaderno in questo modo:

- scegliere un'unità frazionaria
- realizzare la tovaglietta con forme diverse dell'unità frazionaria scelta

Abbiate fantasia!

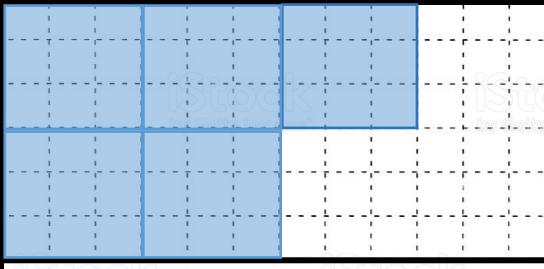
Esempio



$\frac{1}{4}$

Somma di unità frazionarie

Come dividere 5 pizze tra 8 bambini?

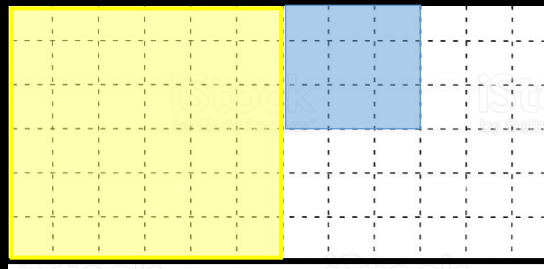


Ma è il modo più furbo?

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 5 \cdot \frac{1}{8}$$

Somma di unità frazionarie

Oppure posso dividere 4 pizze a metà e dividere solo l'ultima pizza in 8 parti, più efficace dal punto di vista pratico!

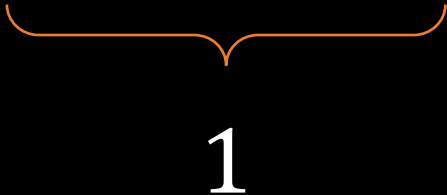


$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

Somma di unità frazionarie

Ogni frazione può essere scritta come somma di unità frazionarie.

È comodo anche per posizionarla sulla retta dei numeri.

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$




Ora prova tu con le seguenti frazioni

$$\frac{3}{2}; \frac{7}{5}; \frac{3}{8}; \frac{4}{4}; \frac{5}{2}; \frac{9}{3}; \frac{10}{7}; \frac{8}{6}$$

Esempio:

$$\frac{4}{3} = \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_1 + \frac{1}{3}$$

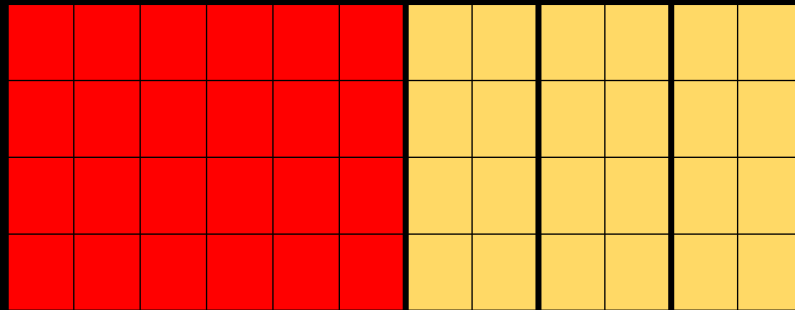
Somma di unità frazionarie

- Si usa un problema in un contesto pratico per far emergere il significato di frazione come quoziente e la possibilità di esprimere con diverse scritture una stessa frazione.
- Obiettivo: mostrare che ogni frazione può essere scritta in più modi come somma di unità frazionarie tutte diverse tra loro.



Diverse scritture dell'unità

Possiamo suddividere una tovaglietta usando unità frazionarie diverse tra loro...



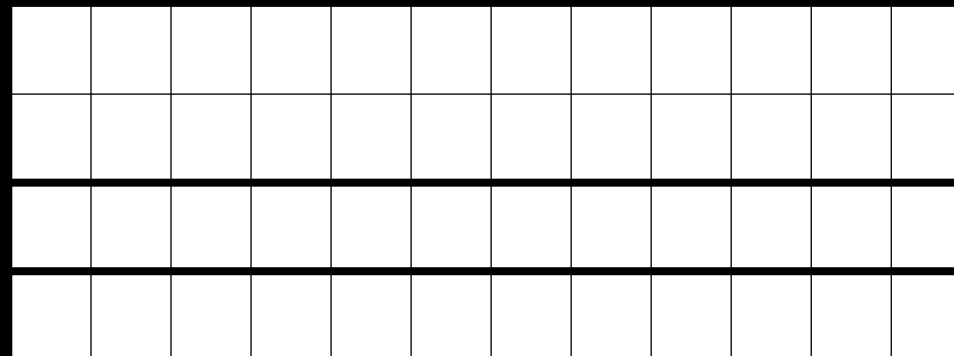
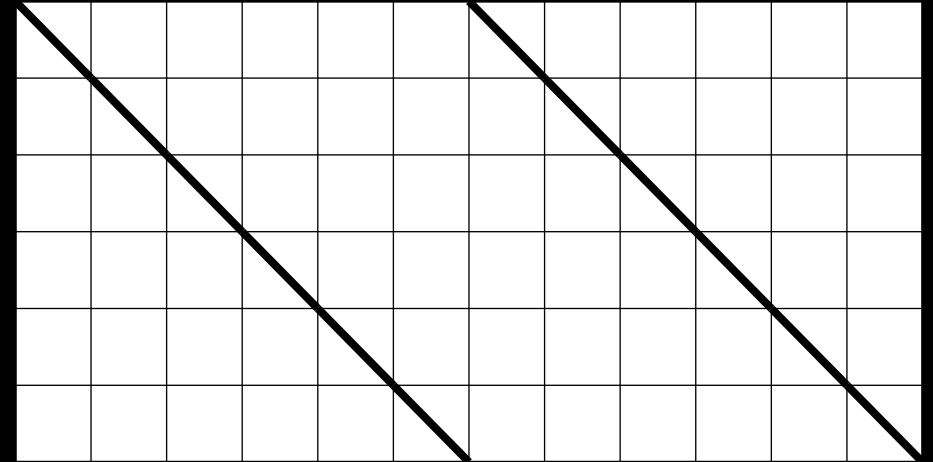
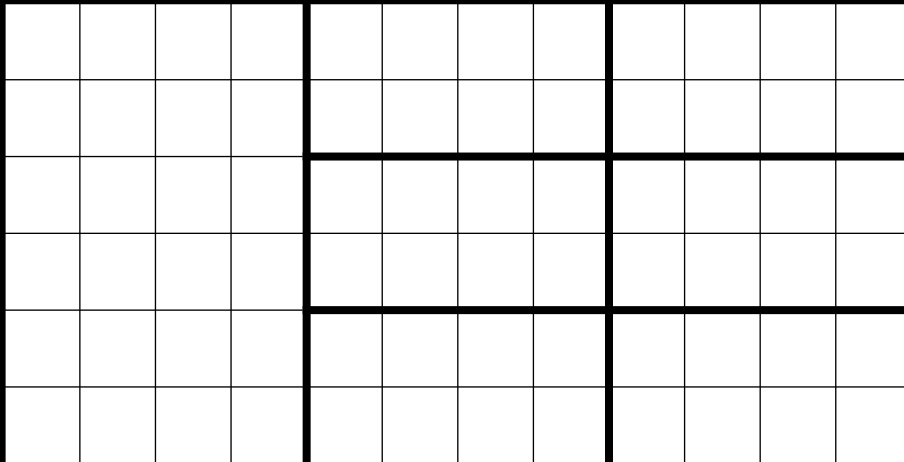
Una parte da $\frac{1}{2}$ e tre parti da $\frac{1}{6}$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{3}{6}$$

Così abbiamo scritto 1 in due modi diversi, come somma di frazioni.



Ora prova tu. Scrivi le somme usate per suddividere le
seguenti tovagliette





Disegnare sul quaderno alcune tovagliette a piacere, usando diverse unità frazionarie e frazioni. Colorare ogni frazione utilizzata con un diverso colore e scrivere l'etichetta corrispondente.

Realizza tovagliette belle colorate, abbi fantasia!

Attenzione: per disegnare la tovaglietta fai un rettangolo 6x12 quadretti.

1 come somma di unità frazionarie e frazioni

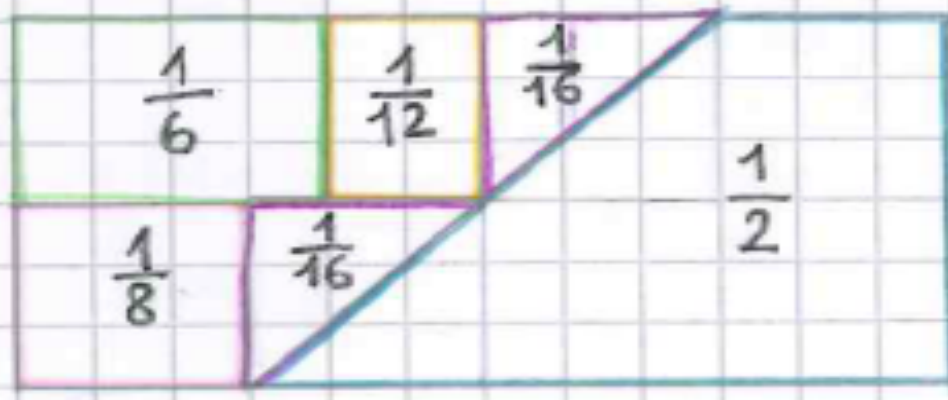
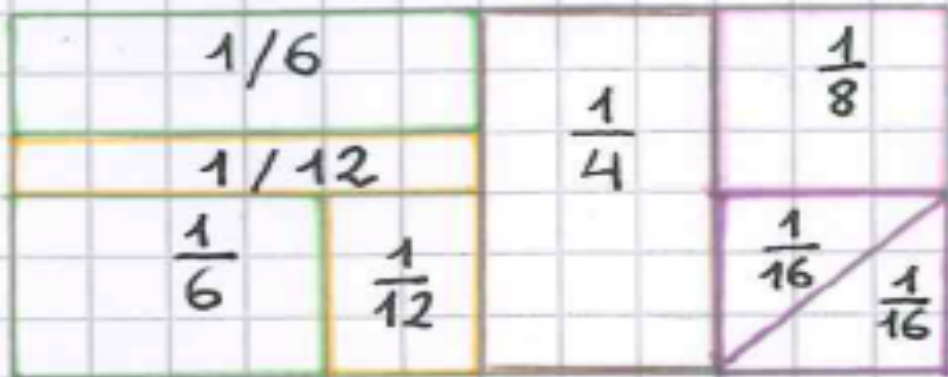
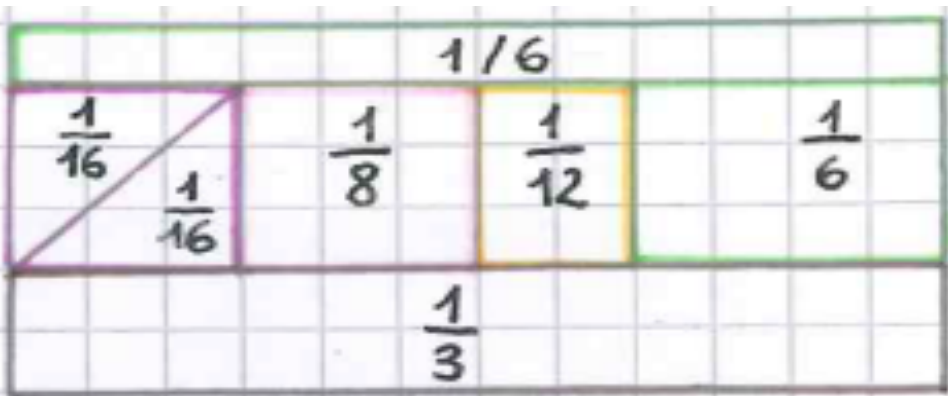
Si chiede a qualche studente di spiegare come ha realizzato la tovaglietta.

Esempio:

«Ho utilizzato 1 pezzo da un quarto, 2 da un ottavo e 1 da un mezzo.»

- Obiettivi:
 - Tradurre da realizzazione grafica a linguaggio matematico, ciò richiede una lettura della frazione come parte di un tutto.
 - Scrivere l'unità come somma di diverse unità frazionarie e frazioni.
 - Far emergere scritture matematiche equivalenti.





Rapporto tra unità frazionarie: nella suddivisione della tovaglietta si ottiene $\frac{1}{4}$ come la metà di $\frac{1}{2}$.

Attenzione, possono emergere diverse realizzazioni, equivalenti, di frazioni... la soluzione non è unica!





E' possibile fare una tovaglietta con parti rappresentate dalla somma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}?$$

E' possibile fare una tovaglietta con parti rappresentate dalla somma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}?$$

Cosa hanno in comune queste due situazioni?

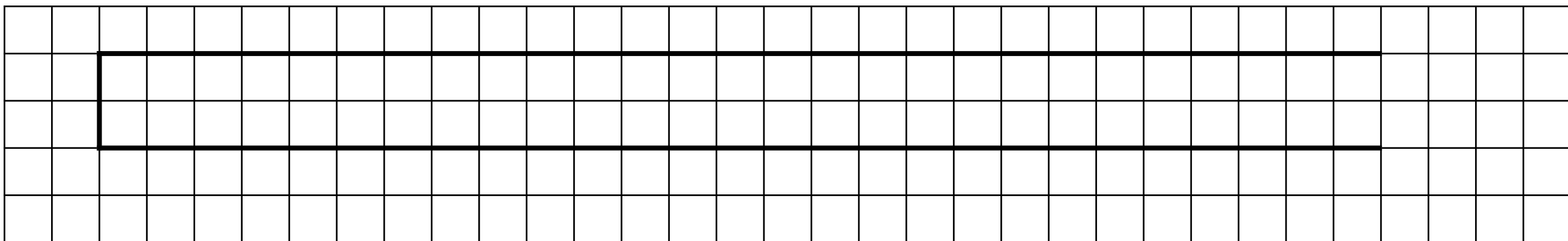


Quando si ottiene l'unità di misura?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 \text{ avanza un pezzetto} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} < 1 \text{ manca un pezzetto}$$

- Aspetti in comune a queste due situazioni:
Non è possibile costruire la tovaglietta!
 $\text{MCD}(2, 3)=1$ $\text{mcm}(2,3)=6$
- Obiettivo: osservare questi aspetti comuni alle due situazioni permette di mettere in luce che è fondamentale una «buona scelta» delle unità frazionarie da sommare per ottenere esattamente l'unità di riferimento.
In questo esempio, se si vuole comporre una tovaglietta usando le unità frazionarie **un mezzo**, **un terzo** e un'unica altra unità frazionaria essa dovrà necessariamente essere **un sesto**. Infatti 2 e 3 sono numeri coprimi, quindi la «buona scelta» è quella con denominatore 6 che è proprio l'*mcm*.



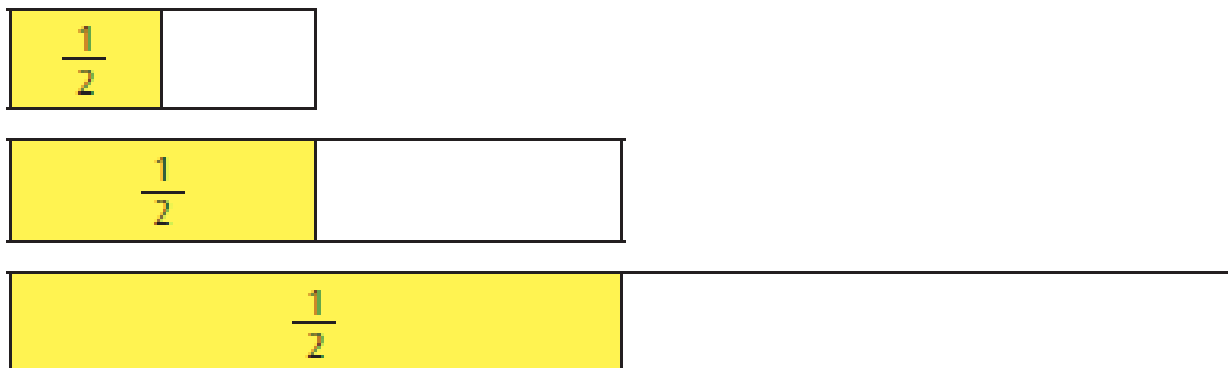


La striscia

Frazione come misura

Frazione come operatore

Si distribuiscono agli studenti delle strisce tutte uguali, ma ognuna con una diversa unità di misura già segnata sopra.



- Discussione sul perché i mezzi (i terzi, i quarti...) ottenuti NON sono tutti uguali, nel senso di equiestesi.
- Obiettivo: far emergere la dipendenza dell'unità frazionaria dall'unità di misura scelta ma l'invarianza dell'operazione «metà».





Il gruppo A posiziona su ogni striscia $\frac{1}{2}$

Il gruppo B posiziona su ogni striscia $\frac{1}{4}$

Il gruppo C posiziona su ogni striscia $\frac{1}{3}$

11

Prendiamo le tre strisce del gruppo A.

Le tre realizzazioni di «un mezzo» sono uguali? In che senso? Perché?

A chi basta per pranzo mezza pizza?





12

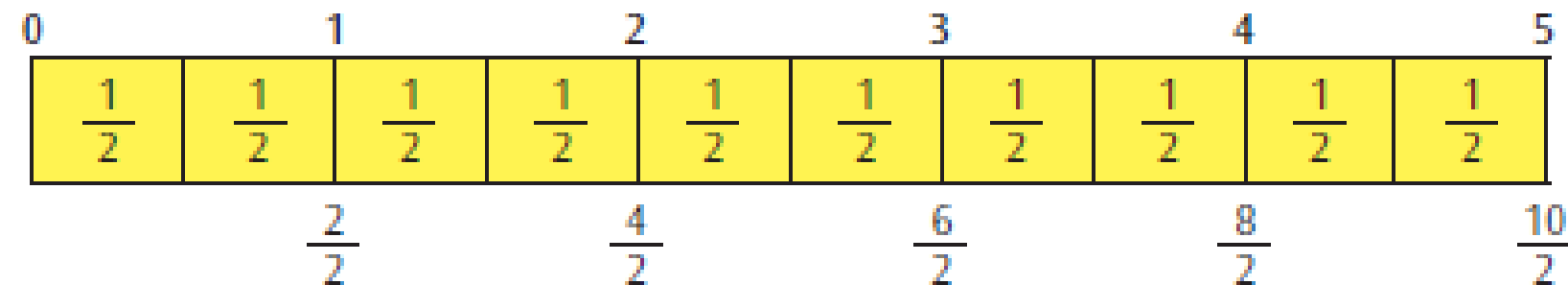
- Disegna sul quaderno una striscia, scegli un'unità di misura e riportala sulla striscia tutte le volte che puoi.
 - Scrivi i numeri naturali, a partire da 0, sulle tacche successive.
 - Dividi le unità di misura ottenute in «mezzi».
 - Scrivi come ottenere 10 sommando i «mezzi» sulla tua striscia.
- Adesso ripeti i primi due punti. Poi dividi le unità di misura ottenute in «terzi» e scrivi come ottenere 6 sommando i «terzi» sulla tua striscia.

In questa attività la frazione ha il significato di operatore su una data unità di misura.

- Si costruisce sulla striscia la successione dei numeri naturali sulla base dell'unità di misura scelta (vedi immagine sotto). Poi si passa alla scrittura di un numero naturale come somma di unità frazionarie e come frazione. Nel prima parte dell'attività:

$$10 = \frac{20}{2}$$

- In questo modo si porta l'attenzione sulle frazioni maggiori di 1.



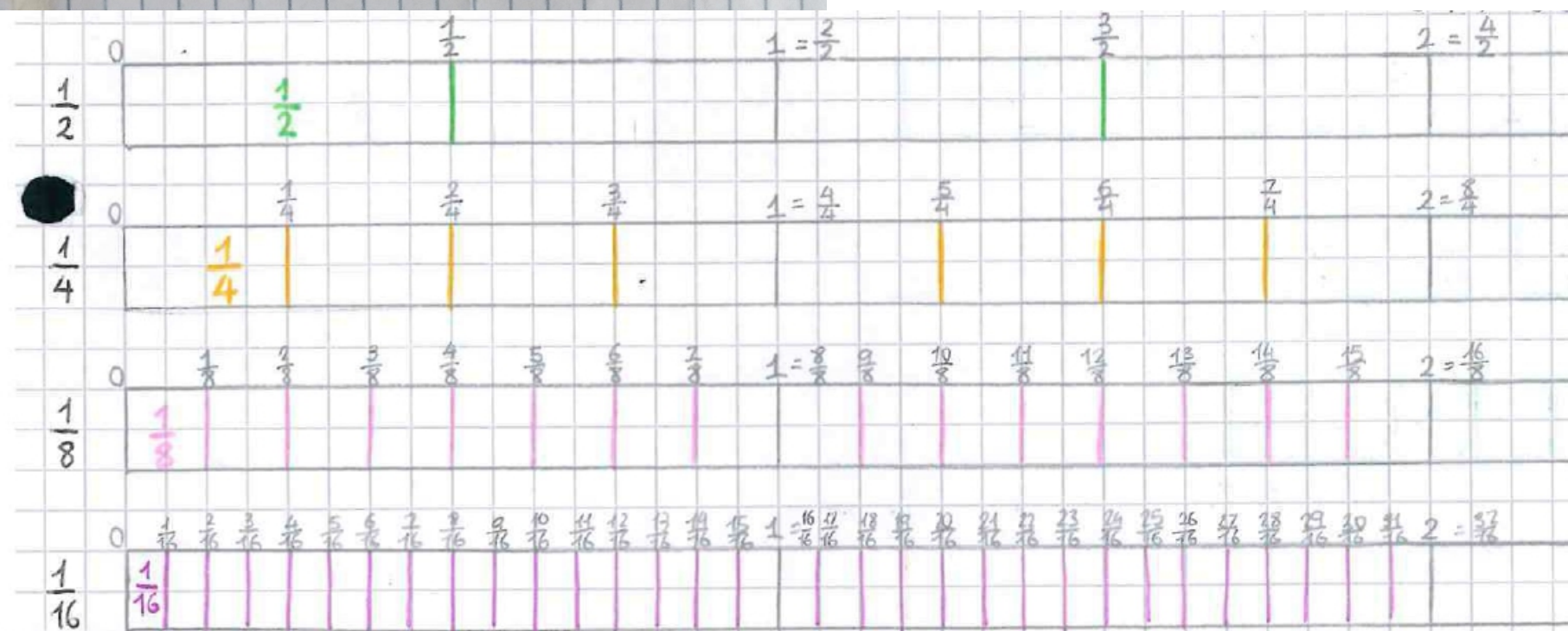
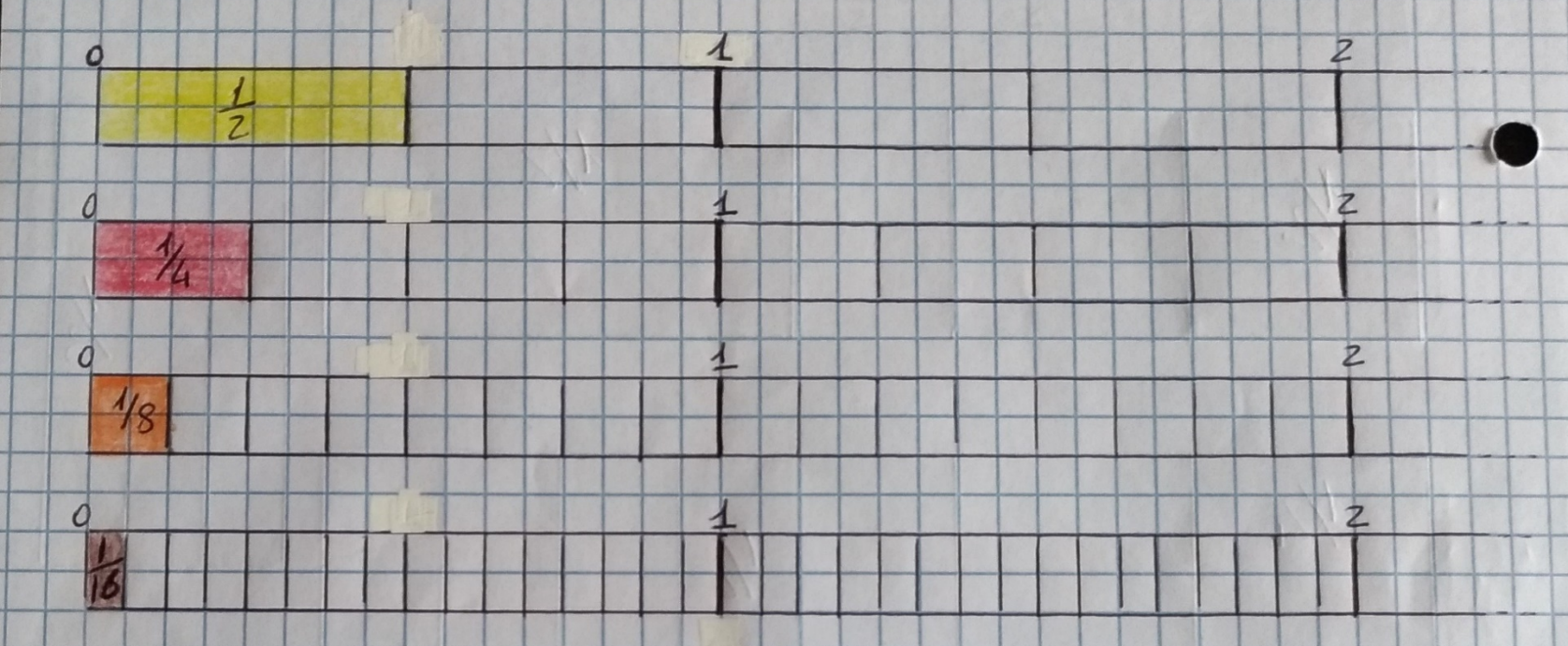
13

Dopo aver scelto un'opportuna unità di misura, riportarla su ognuna delle sette strisce. Poi dividere l'unità di misura con le seguenti unità frazionarie (una per striscia)

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \frac{1}{12}$$

MA... prima discutiamo insieme, come possiamo scegliere l'unità di misura più opportuna?

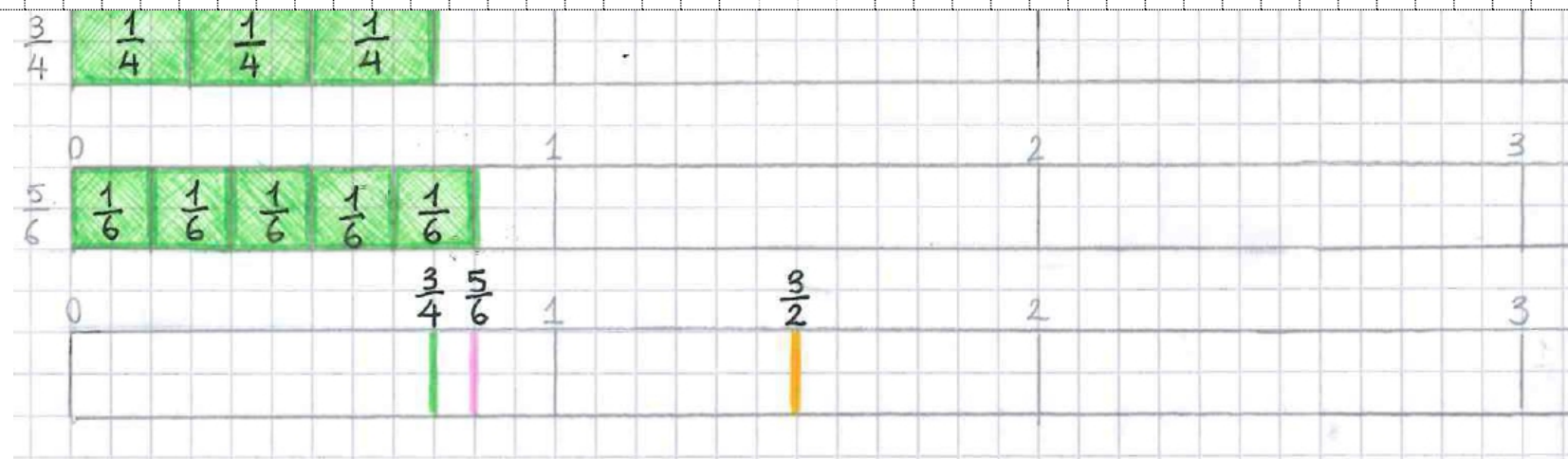
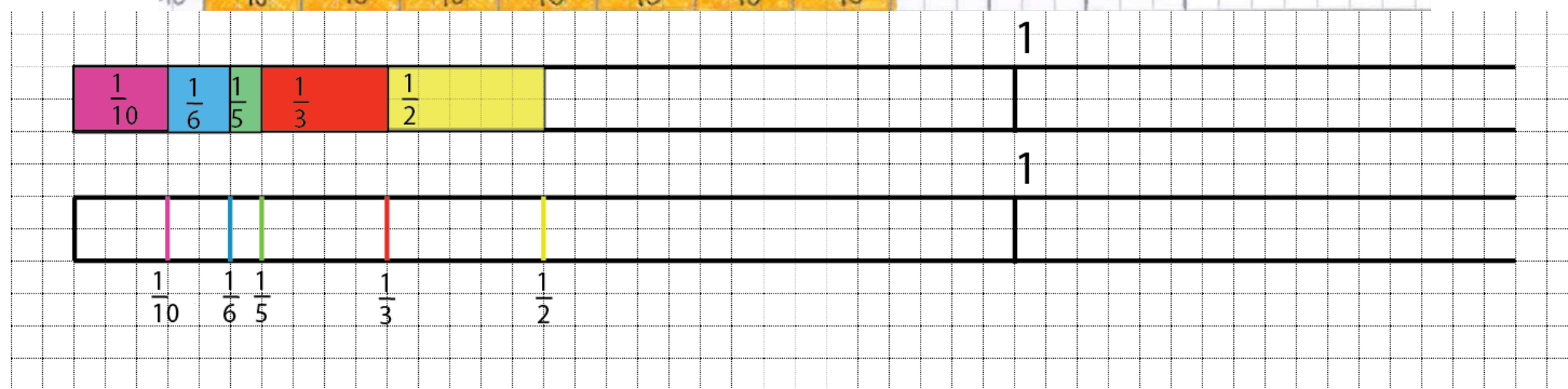
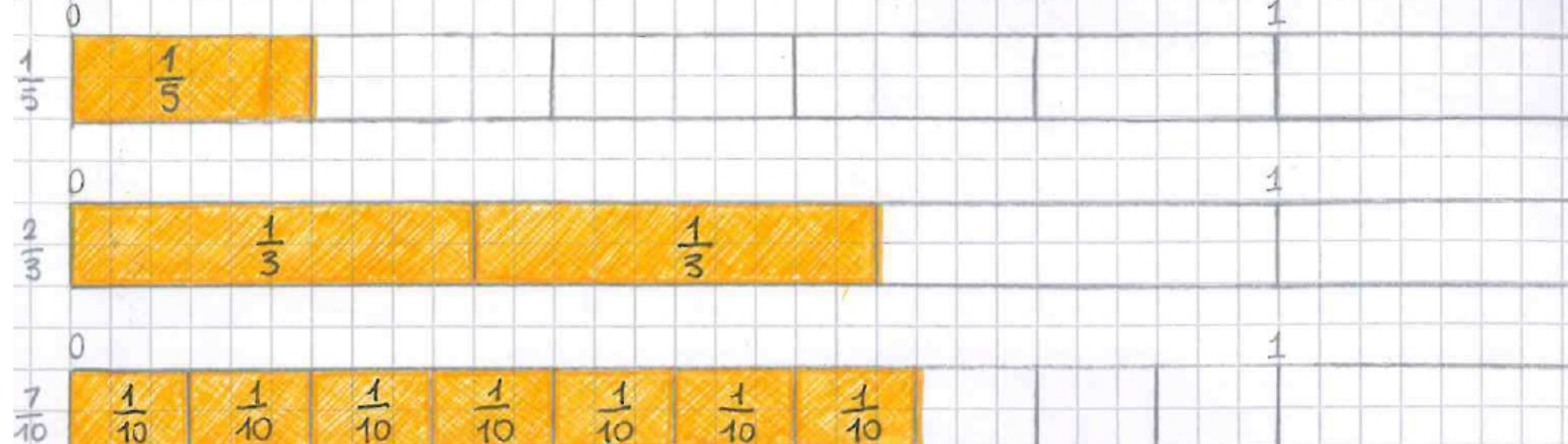






Rappresenta sul tuo quaderno una striscia su cui riporti una volta l'unità di misura concordata nell'attività precedente.

Posiziona sulla striscia tutte le unità frazionarie viste nell'attività precedente.



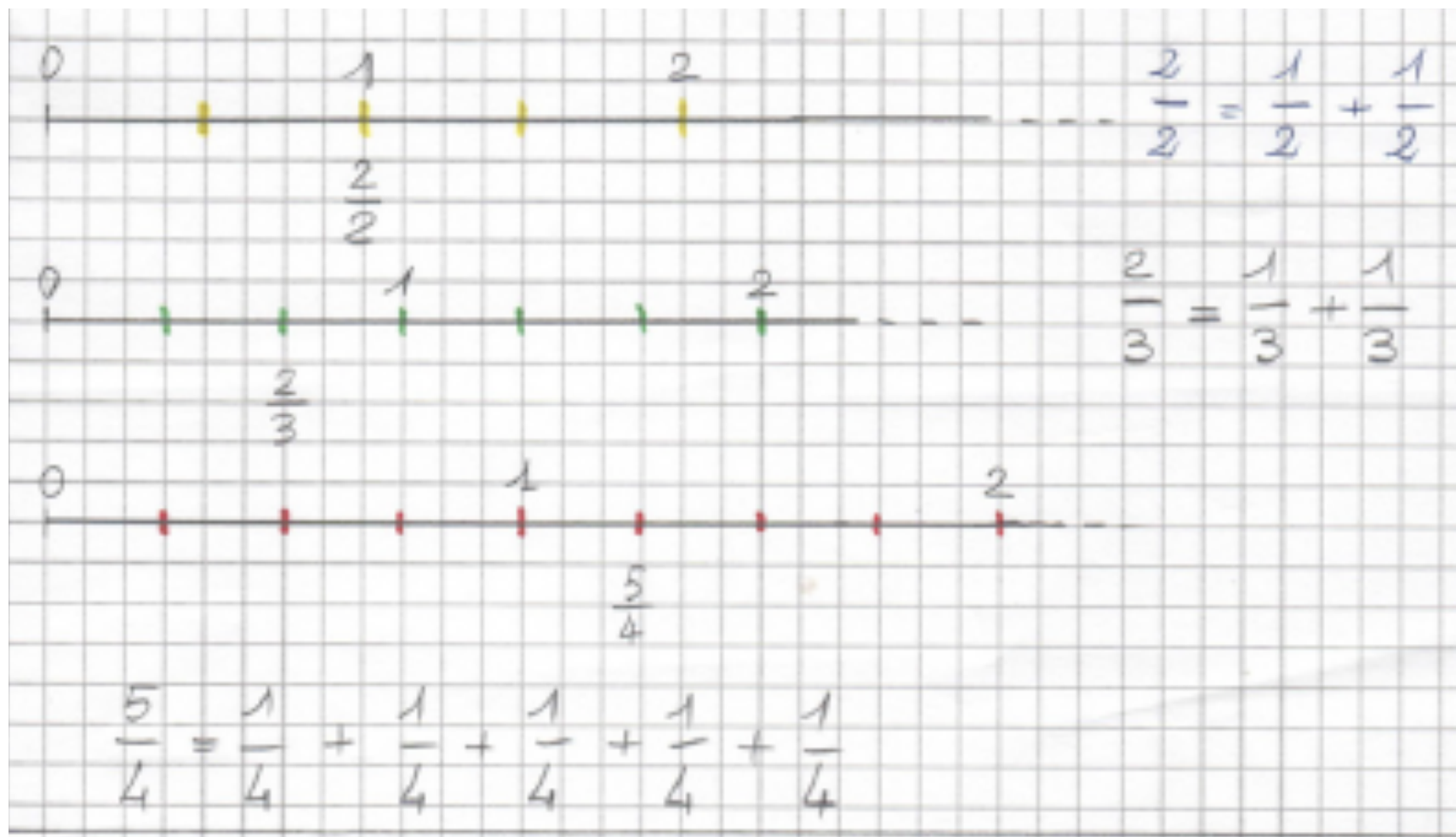
Dalla superficie al punto sulla retta

- La prima parte dell'attività richiede di costruire la consegna per il compagno. Un aspetto matematico che c'è alla base è che ogni tacca sulla retta corrisponde alla ripetizione della stessa unità frazionaria e questa ripetizione può andare avanti all'infinito.
- Obiettivo: costruzione di frazioni come somma di unità frazionarie.



15

- Tracciare sul foglio tre rette. Decidere l'unità di misura da adottare, riportarla sulle tre rette e scrivere i numeri naturali. Suddividere le tre rette usando tre unità frazionarie a vostra scelta (una per ogni retta), senza scrivere i valori.
- Scambiare il foglio con il vostro compagno. Riportare sulle rette le frazioni corrispondenti alle tacche. Scrivere le frazioni ottenute come somma di unità frazionarie.



16

Tracciare sul quaderno una retta, scegliere tre unità frazionarie e definire sulla retta un'unità di misura opportuna per rappresentarle.

Posizionare sulla retta le unità frazionarie scelte, e ripeterle in avanti tutte le volte che è possibile.

Scrivere alcune frazioni ottenute come somma delle unità frazionarie e metterle in ordine crescente.

Ordinamento di unità frazionarie e frazioni



- Posizionare unità frazionarie diverse sulla stessa retta.
- Obiettivo: scegliere come unità di misura il mcm dei denominatori delle unità frazionarie scelte. Confrontare frazioni con diverso denominatore per ordinarle in maniera crescente.



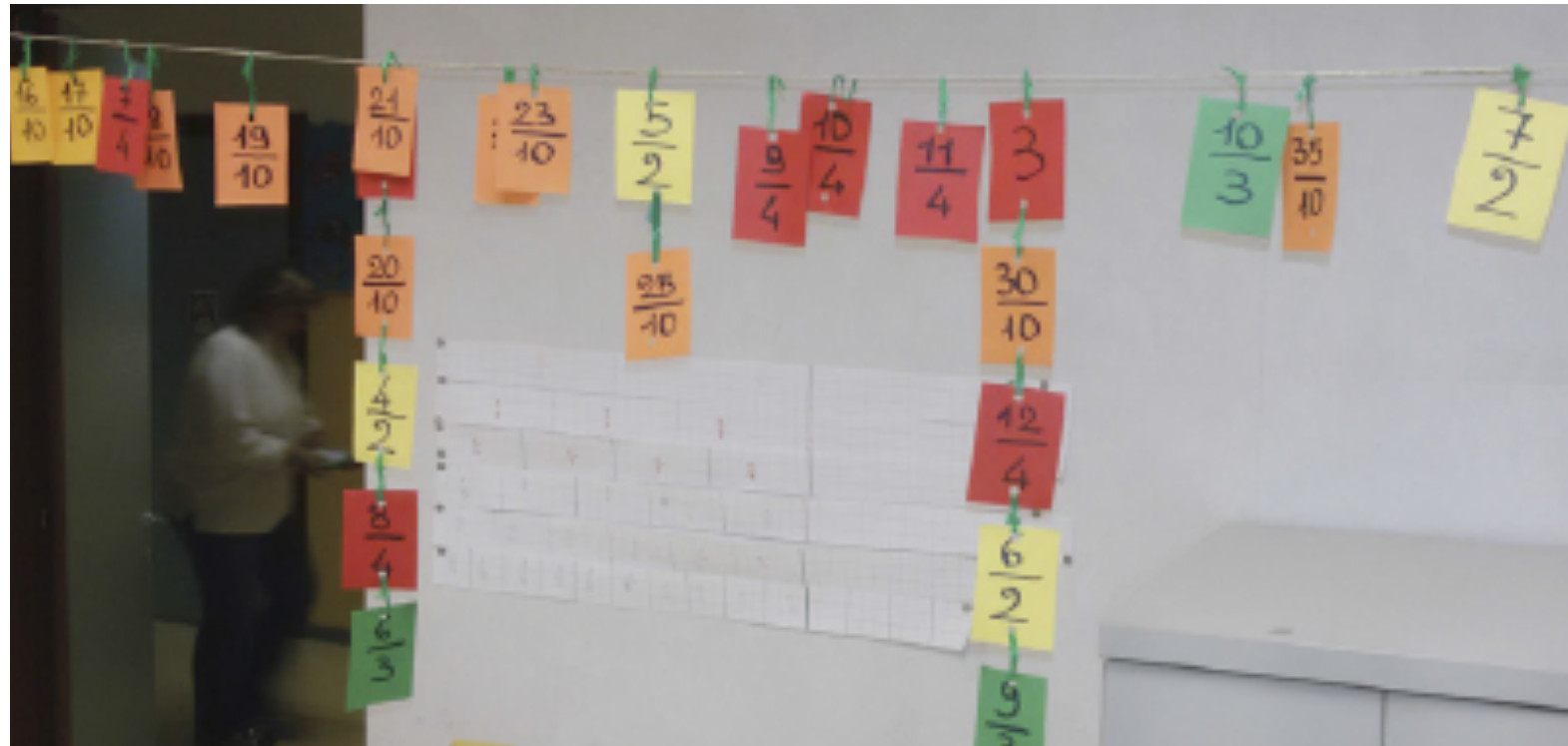
Come si può scegliere un'unità di misura comoda?
Come si può stabilire quale tra due frazioni è maggiore?



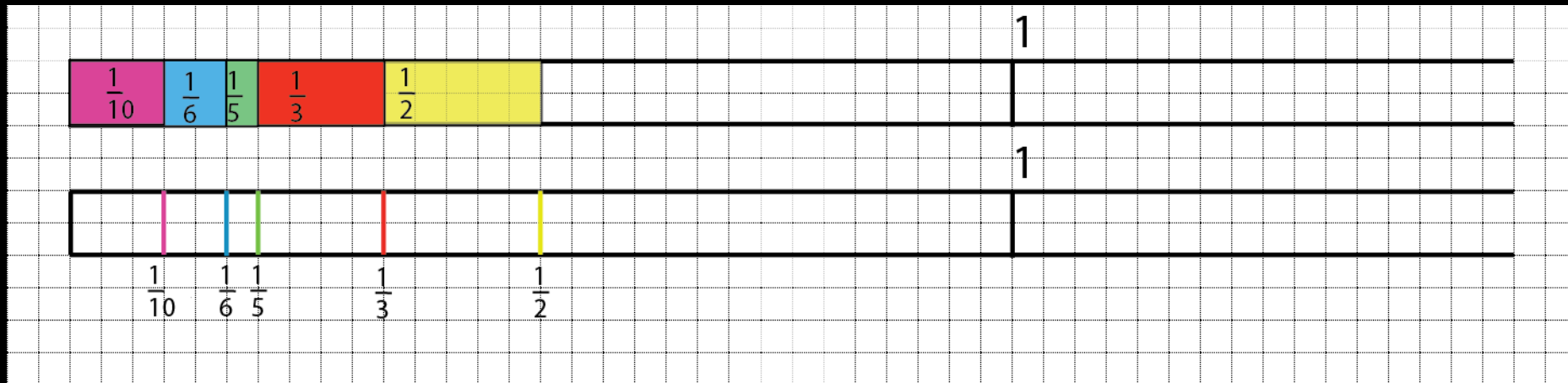
Il filo

Frazione come rappresentazione, o «vestito», di un numero

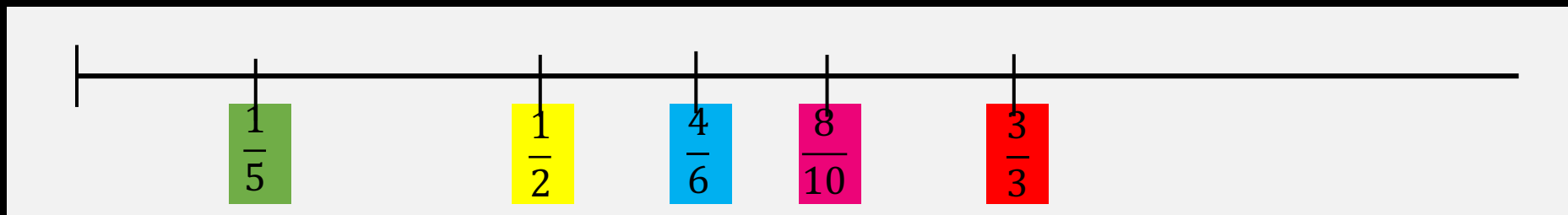
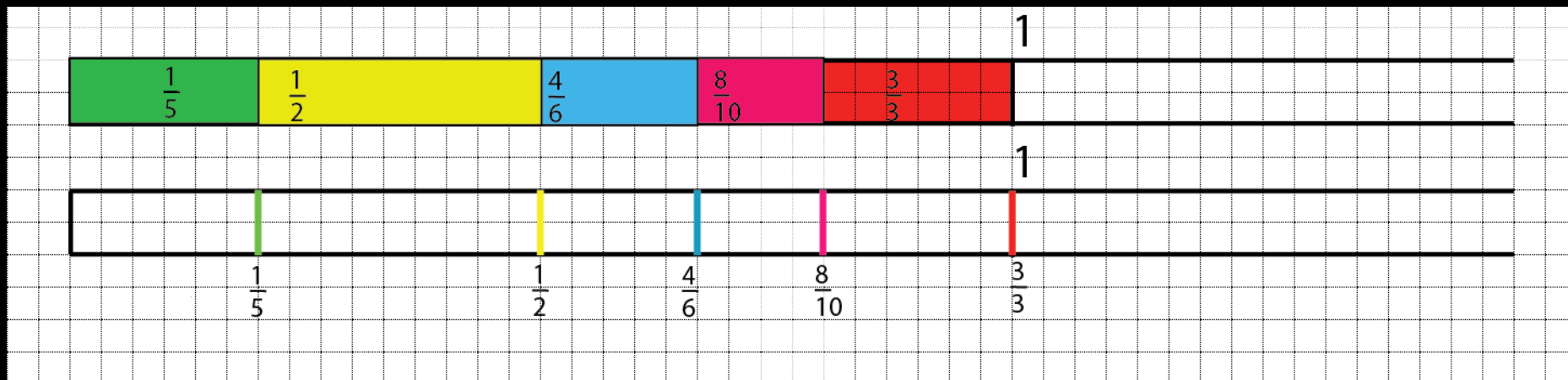
Frazione come quoziente – numeri decimali (particolari) come un'altra rappresentazione di numero razionale



Verso il «filo»...



Verso il «filo»...



Mostriamo il «filo»

- Cos'è: Una retta dei numeri... di tutta la classe
- Come si posizionano i numeri: appendiamo al filo dei cartoncini, bucati sopra e sotto, su cui è scritta una frazione
- I significati matematici che vogliamo discutere con questo artefatto sono: frazioni equivalenti, ordinamento di frazioni, densità dei razionali



17

Fissiamo insieme una certa distanza fra 0 e 1.

Ognuno, a turno, pesca dalla scatola un cartoncino su cui è scritta una frazione e lo appende al filo.



18

Ognuno scriva sul cartoncino che ha ricevuto dall'insegnante una frazione che non è ancora stata appesa al filo. Poi uno alla volta, a turno, appendiamo al filo tutti i nuovi cartoncini.

Quando andiamo ad appendere il cartoncino spieghiamo a voce alta come abbiamo ragionato. Per esempio:

- Come faccio a decidere dove posizione il mio cartoncino?
- Riesco sempre a trovare un posto?



Numeri razionali come classi di equivalenza

- Frazioni equivalenti
- Ordinamento di frazioni
- Densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} : ognuno dovrebbe essere sempre in grado di trovare un posto per il suo cartoncino. Infatti, aumentando la distanza fra due cartoncini consecutivi (e riscalandolo opportunamente l'unità di riferimento, cioè la distanza dei cartoncini 0 e 1) è possibile appendere al filo un numero sempre maggiore di frazioni.

Questa proprietà dell'insieme dei numeri razionali, che non ha l'insieme dei naturali, emerge in maniera dinamica dallo spostamento dei cartoncini lungo il filo.

