

LARTE DE LABBACHO

Larte de labbacho è il primo testo di matematica stampato. Pubblicato nel 1478 a Treviso, è opera di un anonimo autore, forse un ecclesiastico.

È un trattato di aritmetica che ricalca il più famoso *Liber abaci* di Leonardo Pisano detto Fibonacci, scritto nel 1202.

L'anonimo autore spiega che compie quest'opera perché sollecitato da alcuni amici che praticavano la *merchadantia* e che, evidentemente, sentivano l'esigenza di affinare le proprie competenze in campo aritmetico. All'epoca, nella *Provincia Trevigiana*, che apparteneva alla *Repubblica di Venezia*, erano molto fiorenti il commercio e l'arte della stampa.

Nel testo vengono proposti i contenuti specifici dell'aritmetica utili per le attività commerciali: numerazione posizionale con l'utilizzo delle cifre indoarabiche, frazioni, operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, conversioni tra unità monetarie e di misura, problemi applicativi.

Una selezione di brani per la scuola elementare

Di seguito riportiamo la traslitterazione di una selezione di brani tratti direttamente dal testo originale; alcuni di essi vengono presentati anche con a fronte le copie riprodotte dall'edizione del 1478.

Gli adattamenti rispetto all'originale riguardano la sostituzioni dei termini di derivazione dialettale, o di quelli oggi non più in uso; di alcuni, che sono invece mantenuti, vengono forniti gli specifici chiarimenti. Si è operata anche la semplificazione dei periodi più involuti. Delle parti utilizzate, però, si è voluto mantenere intatto il ragionamento matematico che presenta aspetti interessanti per la didattica nella scuola primaria. Le note a piè di pagina e quelle nei *callout* sono nostre.

Concetti e termini presentati nel testo

- Cifra

Figura¹.

- Numero

Numero è una moltitudine aggregata, formata da molte unità, almeno 2 che è il numero minore che si trova.

- Unità

È quella cosa che è detta una. [...] Non è detto numero ma principio dei numeri.

- Esistono numeri di tre ordini diversi

Il primo si chiama numero semplice. L'altro numero articulo. Il terzo si chiama numero composito o misto.

Corrispondono rispettivamente ai numeri naturali minori di 10 e maggiori di 1, al 10 e ai suoi multipli, ai numeri che hanno

¹ L'autore usa il termine *figura* per indicare anche i numeri di una cifra.

Prendi dunque ciascuna figura nel suo luogo², moltiplicala per il suo luogo e nascerà il suo valore.

- Operazioni (atti): addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione

<p>Iongere ha per suo articulo Cavare ha per suo articulo Moltiplicare ha per suo articulo Partire ha per suo articulo</p>	<p>et. de. fia. in.</p>	<p>Iongere ha per suo articulo et Cavare ha per suo articulo de Moltiplicare ha per suo articulo fia Partire ha per articulo in</p>
---	--	--

Per ogni operazione sono necessari almeno due numeri. Con gli stessi numeri, operazioni diverse daranno risultati diversi, tranne che sommando 2 con 2 e moltiplicando 2 e 2.

<p>Ionge:di 3 et 9 fa i 2 Cava:di 3 de 9 resta 6 Moltiplica:di 3 fia 9 fa 27 Parti:di 3 in 9 intra 3</p>	<p>Ionge di 3 et 9 fa 12 Cava di 3 de 9 resta 6 Moltiplica di 3 fia 9 fa 27 Parti di 3 in 9 intra 3</p>
---	--

[...] si deve aggiungere il minore al maggiore: è più conveniente che fare il contrario. Se si farà al contrario nascerà sempre una medesima cosa. Come a dire 2 e 8 fa 10 e 8 e 2 similmente fa 10.

- Addizione

Presi due numeri, si addizionano le figure che stanno nello stesso luogo.

Se tu vuoi aggiungere un numero ad un altro scrivi quello maggiore sopra e il minore sotto mettendo le figure nel loro giusto luogo cioè le unità con le unità, le decine con le decine, le centinaia con le centinaia ecc. Sempre devi cominciare dalle figure che hanno un valore minore³. Quindi, se tu volessi aggiungere 38 a 59 metti i tuoi numeri sotto questa forma

$$\begin{array}{r}
 59 \\
 38 \\
 \hline
 97
 \end{array}$$

Somma

Farai così dicendo 8 e 9 fa 17, scrivi 7 sotto le unità, tieni 1 perché quando nasceranno più figure in un luogo scrivi quella di minor valore e l'altra (o le altre) la porterai al luogo seguente [...] porta dunque quell'1 che hai tenuto e aggiungilo al 3 dicendo 1 e 3 fa 4 e 5 fa 9. Metti quel 9 sotto le decine ed è fatta.

² Posizione: unità, decine, centinaia, migliaia,...

³ Le unità.

Per fare la prova, uno dei due addendi va levato dalla somma ottenuta, perché la sottrazione è la prova dell'addizione e viceversa. L'autore rinvia questa prova a dopo che avrà insegnato la sottrazione. Intanto propone la "prova del nove":

sappi che devi sommare le figure di ciascun addendo come se fossero unità, senza mai menzionare il 9 né lo 0 perché ogni 9 ed ogni 0 sono nulla. E ogni volta che questa somma raggiungerà o passerà il 9 sottrai 9 e tieni il resto, guardando se la somma delle cifre degli addendi e quella delle cifre del risultato sono uguali. Volendo provare la somma soprascritta, scrivila così:

Somma

$$\begin{array}{r} 59 \\ 38 \\ \hline 97 \end{array} | 7$$

Per la prova del 9, si considera prima 59, poi 38, infine 97. Si trascurano i 9. Quando la somma delle cifre supera 9, si sottrae 9 e si prosegue con le addizioni...

5 e 3 fa 8 e 8 fa 16, leva 9 e rimane 7. Scrivi il 7 a fianco del risultato. Poi guarda se anche la somma delle cifre del risultato dà 7. E in effetti si ottiene 7.

[...]

Se avessi da sommare 816 con 1916, scrivi i numeri così:

[...]

$$\begin{array}{r} 1916 \\ 816 \\ \hline 2732 \end{array} | 5$$

Per la prova del 9, si considera prima 1916, poi 816, infine 2732. Si trascurano i 9. Quando la somma delle cifre raggiunge o supera 9, si sottrae 9 e si prosegue con le addizioni...

[...] 1 e 1 fa 2 e 6 fa 8 e 8 fa 16, leva 9, rimane 7. Poi di 7 e 1 fa 8 e 6 fa 14, leva 9, rimane 5. Scrivi 5 sotto. Poi [...] 2 e 7 fa 9 che è 0, poi 3 e 2 fa 5, sicché sta bene.

- Sottrazione

Tu lettore, capito l'atto del sommare, stai bene attento all'atto del sottrarre. Quindi dico che la sottrazione non è altro che da due numeri trovare quanto resta dal minore al maggiore affinché si possa conoscere quel resto. Esempio: leva 3 da 9, resta 6. Nella sottrazione sono necessari due numeri: il numero da cui si sottrae e quello che viene sottratto. Il numero da cui si sottrae deve essere scritto sopra, il numero che viene sottratto, sotto, le decine sotto le decine e così per ordine.

[...]

Se devi sottrarre 348 da 452 metti in questa forma:

Il resto

$$\begin{array}{r} 452 \\ 348 \\ \hline 104 \end{array}$$

[...]

8 da 2 non si può sottrarre ma 2^4 forma 10; questo 2 lo devi aggiungere all'altro 2 che è sopra l'8 dicendo 2 e 2 fa 4 e questo scrivilo sotto l'8 come resto, con la condizione che alla cifra vicina all'8 devi aggiungere 1 e così diventerà 5. Poi dirai: 5 meno 5 dà 0 che scriverai sotto. Poi sottrai 3 da 4, resta 1 e scrivilo sotto il 3 ed è fatta e avrai come resto 104.

Per provare se è corretta, aggiungi il numero sottratto al resto, se otterrai il numero da cui hai sottratto sarà giusta e scrivi così:

$$\begin{array}{r} 4 \ 5 \ 2 \ | \ 2 \\ 3 \ 4 \ 8 \ 6 \\ 1 \ 0 \ 4 \ 5 \\ \hline 4 \ 5 \ 2 \end{array}$$

Per la prova del 9, si addizionano prima le cifre di 452... poi quelle di 348... infine quelle di 104...

Come prova, nell'ultima riga si è ottenuto 452, risultato dell'addizione del **resto** con il minuendo.

Voglio che tu capisca come potrai provare la soprascritta operazione con la prova del 9. Somma le cifre del numero maggiore come se fossero unità dicendo: 4 e 5 fa 9, che è come 0, ti resta il 2 e scrivilo accanto. Poi somma le cifre di 348 sempre come fossero unità dicendo: 3 e 4 fa 7 e 8 fa 15; leva 9, rimane 6 e scrivilo accanto. Poi leva quel 6 da 2 e non si può.

Cercando quanto manca a 6 per avere 9 cioè 3 (9 è il **rezimento** cioè ciò che "regge" la prova).

Aggiungi 3 a 2 che farà 5 e questo 5 è la prova principale e scrivilo fuori dalla riga. Poi guarda se la prova del resto viene ad esser 5 dicendo 1 e 4 fa 5. Sicuramente l'addizione è corretta.

Moltiplicazione

Spiegato il terzo atto, cioè la sottrazione, affronta, o lettore, il quarto atto cioè la moltiplicazione. Per comprenderlo devi sapere che moltiplicare un numero per se stesso o per un altro numero non è altro che, dati due numeri, trovarne un terzo che contiene uno dei due numeri tante volte quante sono le unità dell'altro. Esempio 2 per 4 fa 8; ecco che 8 contiene in sé tanti 4 quante unità sono nel 2, il quale ha 2 unità. Dunque 8 contiene il 4 due volte. Così pure l'8 contiene tante volte il 2 quante unità sono nel 4, il quale è formato da quattro unità. Dunque l'8 contiene il 2 quattro volte. Intendi bene che nella moltiplicazione sono principalmente necessari due numeri cioè il moltiplicatore e il numero che deve essere moltiplicato, e anche il moltiplicatore si può scambiare con il numero che dev'essere moltiplicato, e così il contrario rimanendo sempre la medesima cosa, tuttavia l'uso e la pratica comandano che il numero minore deve essere preso come moltiplicatore e non il maggiore perché

⁴ Un "2" che sommato ad 8 dà 10.

dovremmo dire 2 per 4 fa 8 e non 4 per 2 fa 8, benché si ottenga lo stesso risultato⁵.

Ci sono tre modi per moltiplicare cioè per colonna, per crocetta e per scacchiera. Prima però impara a mente le moltiplicazioni qui indicate senza le quali nessuno può affrontare questo atto, cioè il moltiplicare. Impara, dunque:

2	fa	2	fa	4
2	fa	3	fa	6
2	fa	4	fa	8
2	fa	5	fa	10
2	fa	6	fa	12
2	fa	7	fa	14
2	fa	8	fa	16
2	fa	9	fa	18
2	fa	0	fa	0
3	fa	3	fa	9
3	fa	4	fa	12
3	fa	5	fa	15
3	fa	6	fa	18
3	fa	7	fa	21
3	fa	8	fa	24
3	fa	9	fa	27
3	fa	0	fa	0
4	fa	4	fa	16
4	fa	5	fa	20
4	fa	6	fa	24
4	fa	7	fa	28
4	fa	8	fa	32
4	fa	9	fa	36
4	fa	0	fa	0
5	fa	5	fa	25
5	fa	6	fa	30
5	fa	7	fa	35
5	fa	8	fa	40
5	fa	9	fa	45
5	fa	0	fa	0
6	fa	6	fa	36
6	fa	7	fa	42
6	fa	8	fa	48
6	fa	9	fa	54
6	fa	0	fa	0
7	fa	7	fa	49
7	fa	8	fa	56
7	fa	9	fa	63
7	fa	0	fa	0
8	fa	8	fa	64
8	fa	9	fa	72
8	fa	0	fa	0
9	fa	9	fa	81
9	fa	0	fa	0

⁵ Vale, quindi, la proprietà commutativa.

L'autore riporta poi le tavole di conversione da "spiccioli" a "lire, a "soldi", a "ducati grossi", a "oro", a "carati".

Lo scolaro con ardimento può cominciare a moltiplicare per colonna che si utilizza quando il moltiplicatore è un numero semplice e il numero che dev'essere moltiplicato è almeno di due cifre.

[...]

Se qualcuno ti domandasse quanto fa 8 per 9279 fai così. Moltiplica 9 per 9 che fa 72, scrivi 2 e tieni il 7, poi di 7 per 8 fa 56, e 7 che hai tenuto fa 63. Scrivi 3 e tieni 6, poi dirai 2 per 8 fa 16 e 6 che hai tenuto fa 22. Scrivi 2 e tieni 2, poi moltiplica 8 per 9 che fa 72 e 2 che hai tenuto fa 74, scrivi prima 4 e poi 7 verso sinistra e ammonta a 74232.

Se volessi controllare il calcolo sopra descritto con la prova del 9, somma tutte le cifre del moltiplicatore e quelle del numero che dev'essere moltiplicato, senza mai menzionare 9 né 0 perché ogni 9 è 0 e ogni 0 è 0 e ogni volta che la somma raggiungerà o passerà il 9, toglie 9 e tieni il resto. Sicché volendo far la prova della moltiplicazione per colonna, scrivila così:

$$\begin{array}{r} 9\ 2\ 7\ 9\ | \ 0 \\ \hline 8\ | \ 8 \\ \hline 7\ 4\ 2\ 3\ 2\ | \ 0 \end{array}$$

Per la prova del 9, si fa la somma delle cifre di 9279 e, operando come nei casi precedenti, si ottiene 0...

[...]

Somma 2 e 7 che fa 9 cioè 0 [...] e scrivilo a fianco. [...] Scrivi 8. Poi moltiplica [...] 8 per 0 fa 0.

Poi somma le cifre del prodotto e controlla se danno 0.

Si può provare questa moltiplicazione per colonna con maggiore sicurezza: si dividerà 74232 per 8 e si otterrà 9279 o si dividerà 74232 per 9279 e farà 8 ma non posso dirti come, finché non saprai dividere perché il dividere prova il moltiplicare e il moltiplicare prova il dividere.

[...]

Capito il primo modo di moltiplicare, cioè per colonna, affronta diligentemente il secondo modo cioè il moltiplicare per crocetta semplice che si usa quando si ha da moltiplicare un numero di due cifre per un altro numero di due cifre come 12 per 12.

[...]

Se qualcuno ti domandasse quanto fa 12 per 13, fa così: moltiplica 2 per 3 che fa 6, scrivi quel 6 sotto i numeri e non tener niente perché altro non c'è. Poi moltiplica in croce dicendo 1 per 3 fa 3 e 1 per 2 fa 2. Somma 2 e 3 che fa 5, scrivi quel 5 sotto le decine, poi moltiplica 1 per 1 che fa 1, poi scrivi quell'1 a sinistra del 5. Farà 156.

Se volessi fare la prova del 9, scrivi la crocetta così:

$$\begin{array}{r|l}
 13 & 4 \\
 12 & 3 \\
 \hline
 156 & 3
 \end{array}$$

Analogamente alla moltiplicazione per colonna, l'autore illustra la prova del 9.

Altro esempio di crocetta.

Moltiplica 6 per 8, fa 48. Scrivi 8 sotto i numeri e tieni 4. Poi moltiplica in croce dicendo 4 per 6 fa 24 e 5 per 5 fa 40. Addiziona 24 con 40 che fa 64, aggiungi 4 e ottieni 68, scrivi 8 e tieni 6. Poi moltiplica decina con decina dicendo 4 per 5 fa 20 e 6 fa 26. Scrivi tutto in ordine e fa 2688. In questo modo potrai fare ogni altra crocetta.

Se vuoi fare la prova scrivi la crocetta così:

$$\begin{array}{r|l}
 56 & 2 \\
 48 & 3 \\
 \hline
 2688 & 6
 \end{array}$$

Somma 5 e 6 che fa 11, leva 9, rimane 2. Scrivilo accanto. Poi somma 4 e 8 che fa 12, leva 9, rimane 3; scrivilo accanto. Poi moltiplica 2 per 3 che fa 6; scrivilo accanto al risultato. Ora somma 2+6 che fa 8, 8 più 8 che fa 16 e ancora 8 che fa 24. Poi somma 2 e 4 che fa 6 e il risultato è corretto. In questo modo potrai provare ogni altra crocetta.

[...]

Spiegato il modo di moltiplicare per crocetta impara a moltiplicare per scacchiera che è utile quando hai da moltiplicare numeri di almeno due cifre con numeri di almeno tre cifre.

[...]

Se qualcuno ti domandasse quanto fa 24 per 829, moltiplica prima 4 per 829 che fa 3316. Poi moltiplica 2 per 829. Scrivi 8 sotto la decina, scrivi il 5 a sinistra, il 16 ancora a sinistra ed è fatta. Scrivi così:

[...]

Somma i numeri che hai incolonnato.

[...]

Se vuoi fare la prova scrivi la tua scacchiera così:

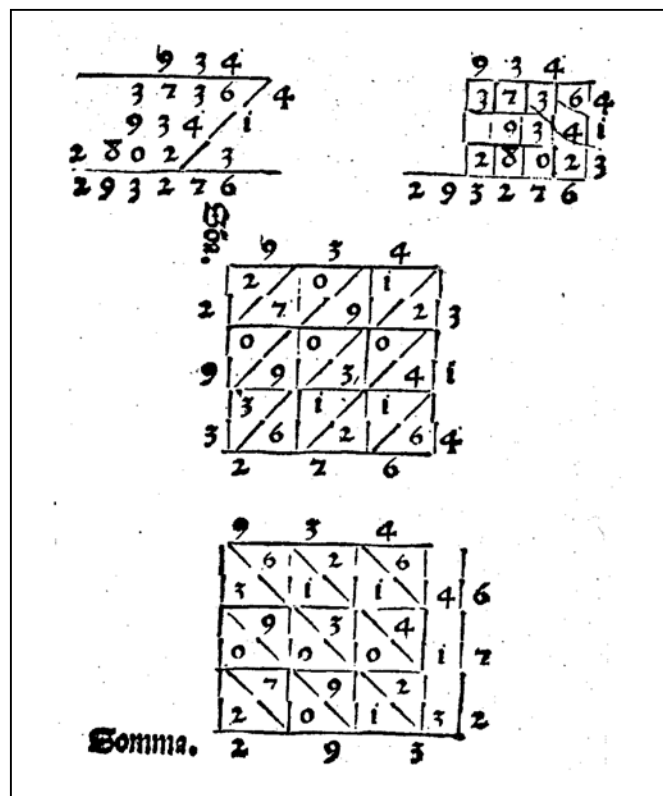
$$\begin{array}{r|l}
 829 & 1 \\
 24 & 6 \\
 \hline
 3316 & \\
 1658 & \\
 \hline
 19896 & 6
 \end{array}$$

Per la prova fai così: 8 più 2 fa 10, leva 0 e tieni 1, scrivilo accanto. 2 più 4 fa 6, scrivilo accanto. Poi moltiplica 1 per 6 e scrivilo in basso accanto al risultato. Se la somma delle cifre [del prodotto] darà 6 andrà bene. Prova dicendo: 1 e 8 fa 9, che è 0, rimane dunque 6.

[...]

Voglio che tu sappia che ci sono altri modi per moltiplicare per scacchiera che lascio al tuo studio personale mettendo solamente gli esempi come potrai vedere qui sotto.

[...]



- Divisione

Per capire il quarto punto cioè il dividere, tre cose sono da notare cioè che cosa significa dividere, secondo quanti numeri sono necessari nel dividere, terzo quale numero di essi deve essere maggiore.

Quanto alla prima parte, dico che dividere due numeri significa trovare un terzo numero che sia contenuto tante volte nel maggiore quante unità sono nel minore. Lo troverai guardando quante volte il minore è contenuto nel maggiore. Come dire: dividi 8 per 2; dirai 2 in 8 sta 4 volte, sicché 4 è la parte che cerchi. Se dividi 8 per 4, poiché il 4 sta nell'8 2 volte, sicché 2 è la parte che si vuole conoscere.

Secondo, è da notare che nel dividere sono necessari tre numeri: il numero che deve essere diviso, il numero che divide e la parte come puoi capire dall'esempio precedente dove 2 è il numero che divide, 8 è il numero che viene diviso e 4 la parte.

Da questo deriva il terzo punto cioè che il numero che si deve dividere dev'essere sempre maggiore o uguale al numero che divide e quando sono uguali risulterà 1.

[...]

Per brevità dico che ci sono due modi per dividere: per colonna e per battello. In qualunque modo tu debba dividere devi sempre cominciare dal numero maggiore che si trova a sinistra e venire verso destra. Ti avverto che puoi dividere per battello quello che puoi dividere per colonna ma per comodità schiva il battello quando puoi.

[...]

Dividi 7624 per 2. Scrivi così:

$$\begin{array}{r} \text{Il divisore } 2 \qquad 7 \ 6 \ 2 \ 4 \ | \ 0 \text{ resto} \\ \text{La parte} \qquad \qquad 3 \ 8 \ 1 \ 2 \end{array}$$

Guarda quante volte il tuo divisore 2 sta nel 7 dicendo: 2 in 7 sta 3 volte. Scrivi 3 sotto il 7, avanza 1 che metti vicino al 6 e diventa 16 e di 2 nel 16 sta 8 volte. Scrivilo sotto il 6, poi di 2 nel 2 sta una volta, scrivilo sotto il 2. Poi di 2 in 4 sta 2 volte; scrivilo sotto il 4 e il resto 0 è da scrivere fuori dalla riga. Sicché la parte ammonta a 3812. Se vuoi fare la prova, per maggior sicurezza, devi moltiplicare la parte per il divisore, se otterrai il primo numero è corretta.

Se vuoi fare la prova del 9, metti 2 nella crocetta in basso a sinistra, poi somma le cifre della parte che dà 5 e scrivilo sopra il 2. Quindi fai la somma delle cifre del resto che è 0 e scrivilo a destra del 5. Adesso moltiplica 5 per 2 che fa 10, aggiungi il resto e rimane 10. Leva lo 0, rimane 1 da scrivere sotto a destra. Poi guarda se la somma delle cifre del numero che dividi dà 1, in tal caso è corretta.

$$\begin{array}{r|l} 5 & 0 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

[...]

la moltiplicazione prova la divisione e la divisione la moltiplicazione [...]

$$\begin{array}{r} 9 \ 2 \ 7 \ 9 \ | \\ \hline 8 \\ \hline 7 \ 4 \ 2 \ 3 \ 2 \end{array}$$

Dividi 74232 per 8. Se la parte sarà 9279, avrai provato un'operazione con l'altra. Scrivi così:

$$\begin{array}{r} \text{Il divisore } 8 \qquad 7 \ 4 \ 2 \ 3 \ 2 \ | \ 0 \text{ il resto} \\ \text{la parte} \qquad \qquad 9 \ 2 \ 7 \ 9 \end{array}$$

poi guarda il tuo divisore che è 8 e di 8 in 7 non ci sta, prendi dunque 7 e 4 insieme e di 8 nel 74 ci sta 9 volte, scrivi 9 sotto il 4 e avanza 2, con l'altro 2 fa 22; 8 in 22 sta 2 volte, scrivilo sotto il 2, avanza 6 che con il 3 fa 63; 8 in 62 sta 7 volte e avanza 7, con il 2 fa 72, 8 in 72 sta 9 volte.

[...]

Prova del 9:

$$\begin{array}{r|l} \text{dividendo} & 0 & 0 \text{ resto} \\ \text{divisore} & 8 & 0 \quad 8 \cdot 0 + 0 \end{array}$$

Spiegato il primo modo di dividere per colonna, stai attento al secondo modo che è un po' più difficile. Quando inizierai a dividere in questo modo devi aver ben capito il primo, oltre che la moltiplicazione e la sottrazione che servono a questa operazione. In due esempi ti darò da dividere per battello quello che si può dividere per colonna perché tu possa comprendere meglio.

[...]

Se volessi dividere 825 per 2, scrivi così:

$$\begin{array}{r} 8 \quad 2 \quad 5 \\ 2 \end{array} \int 4$$

[...]

$$\begin{array}{r} 8 \quad 2 \quad 5 \\ 2 \quad 2 \end{array} \int 4 \quad 1$$

[...]

$$\begin{array}{r} 8 \quad 2 \quad 5 \\ 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \int 4 \quad 1 \quad 2$$

[...]

$$\begin{array}{r} 8 \quad 2 \quad 5 \\ 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \int \begin{array}{c} 1 \\ 4 \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

Ed è conclusa. Quindi rispondi che dividendo 825 per 2 si ottiene 412.

Nella divisione **per battello**, quindi, il divisore (in questo caso 2) viene ripetuto tante volte quanti sono i passaggi della divisione, come si può vedere anche nell'esempio seguente in cui è richiesto di dividere 9065 per 8:

Rispondi dunque che dividendo 9065 per 8 si ottiene 1133 e $\frac{1}{8}$ come vedi qui

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \\ 9 \quad 0 \quad 6 \quad 5 \\ 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \end{array} \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 3$$

Il resto della divisione è 1 (cifra non barrata, sopra le unità del dividendo):

$$\frac{9065}{8} = 1133 + \frac{1}{8}$$

∫

[...]

A Treviso :: A dì 10 Dicembre :: 1478