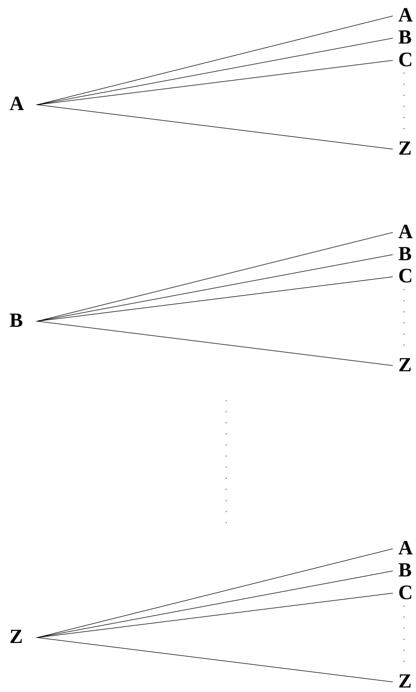
Contare gli elementi di un insieme

Contare gli elementi di un insieme

Il codice aeroportuale IATA (International Air Transport Association) è un codice alfabetico di tre lettere utilizzato per designare molti aeroporti di tutto il mondo. Ad esempio, all'aeroporto di Verona è stata assegnata la sigla VRN, a quello di Milano Malpensa la sigla MXP.

Con questo codice, quanti aeroporti si possono identificare?

Per affrontare il problema, cominciamo con il caso più semplice di un codice costituito da due sole lettere; consideriamo l'alfabeto di 26 lettere.
Può essere utile schematizzare la situazione nel modo seguente.



Esempio 1

Quanti codici di due lettere si possono formare?

- ☐ $26 + 26$
- ☐ 2^{26}
- ☐ $26 \cdot 26$

Facciamo riferimento allo schema ad albero proposto e supponiamo di aver scelto la prima lettera, ad esempio la B. Osserviamo che si possono formare 26

coppie che cominciano con la lettera scelta: BA, BB, BC, ..., BZ.
Poiché anche per la prima lettera vi sono 26 possibilità, il numero totale di codici che possiamo formare è

$$26 \cdot 26.$$

Torniamo ora al problema iniziale.

Esempio 2

Quanti sono i possibili codici aeroportuali IATA di tre lettere?

☐ *inserisci il numero senza usare separatori delle migliaia*

Esempio 3

Hai dimenticato la password per accedere ad un sito internet. Ricordi però che la password era lunga 4 caratteri e che ogni carattere era uno dei simboli

* + - / 0 1 ? ! ¿ ¡

Immagina di poter digitare 10 password ogni minuto. Entro quanti giorni puoi essere sicuro di accedere al sito?

☐ 10
☐ 14.400
☐ 1

Infatti, ogni carattere della password può essere scelto tra 10 possibili; si hanno così

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$$

sequenze diverse. Se in un minuto digito 10 password, in un giorno digito $10 \cdot 60 \cdot 24 = 14.400$ password. Dunque per accedere al sito serve al più 1 giorno.

Esempio 4

Più in generale, quante password di lunghezza k si possono formare scegliendo ogni carattere tra n simboli?

☐ n^k
☐ k^n
☐ $n \cdot k$

In ognuno dei problemi affrontati finora eravamo interessati a contare quante sequenze di k oggetti si possono costruire scegliendo ciascuno di essi tra n possibili. Inoltre, erano ammesse **ripetizioni** e **aveva importanza l'ordine** in cui gli oggetti comparivano nella sequenza. Sequenze di questo tipo vengono solitamente dette disposizioni con ripetizioni e, come abbiamo visto, il loro numero è

$$\boxed{n^k}.$$

Esempio 5

Un byte è costituito da 8 bit e ogni bit può assumere il valore 1 o il valore 0. Quante *informazioni* si possono approssimativamente immagazzinare in 3 byte di memoria? Rispondi senza utilizzare la calcolatrice, ricorrendo all'approssimazione $2^{10} \approx 1000$.

- ☐ $16.000.000$
- ☐ $16 \cdot 10^9$
- ☐ 160.000

Esempio 6

La targhe automobilistiche italiane sono costituite dalla sequenza *2 lettere-3 cifre-2 lettere*. Vengono utilizzate tutte le 10 cifre, anche ripetute, ma solo 22 lettere dell'alfabeto (non sono utilizzate le lettere I, O, U, Q), anche ripetute. Quante targhe si possono formare?

- ☐ $22^4 \cdot 10^3$
- ☐ $2^{44} \cdot 3^{10}$
- ☐ $(22 \cdot 22)^4 \cdot 10^3$

La differenza tra l'ultimo esercizio e quelli precedenti è che in questo caso gli elementi vanno scelti da due differenti insiemi. Non possiamo quindi utilizzare direttamente la formula n^k.
Per risolvere il problema basta però ripensare a come abbiamo ricavato tale formula. Ci sono 22 scelte per il primo simbolo e 22 per il secondo; quindi 10 scelte per il terzo, il quarto e il quinto; nuovamente 22 per il sesto e il settimo. Per quanto abbiamo visto, il numero di tutte le sequenze possibili si ottiene con la moltiplicazione

$$22 \cdot 22 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 22 \cdot 22 = 22^4 \cdot \ldots \cdot 10^3.$$

Questo esempio ci suggerisce un principio generale del calcolo combinatorio.

Se in una sequenza la prima scelta può essere fatta in n_1 modi, la seconda in n_2 modi, fino all'ultima che può essere fatta in n_k modi, allora il numero di sequenze possibili è dato da

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Esempio 7

La Corsa Tris è una gara ippica (al trotto o al galoppo) legata ad un concorso nazionale che premia gli scommettitori che indovinano i primi tre piazzati della corsa nell'esatto ordine di arrivo. Se ad una corsa partecipano 18 cavalli, su quante possibili terne si può scommettere?

□ $18 \cdot 17 \cdot 16$
□ 18^3
□ 3^{18}

L'esempio 7 ci propone una nuova situazione: abbiamo dovuto scegliere 3 cavalli tra 18 possibili, **tenendo conto dell'ordine** (arrivare primo o terzo non è la stessa cosa) ed **evitando ripetizioni**.
Non ammettendo ripetizioni, ogni scelta riduce il numero di possibilità per la scelta successiva: possiamo indicare come primo classificato uno qualunque dei 18 cavalli, ma, una volta effettuata questa scelta, rimangono solo 17 possibili cavalli da indicare come secondo classificato e successivamente solo 16 cavalli da indicare come terzo.
Il numero di terne ordinate è dunque:

$$18 \cdot 17 \cdot 16 = 4.896$$

Notiamo che se fossero state possibili le ripetizioni avremmo avuto $18^3 = 5.832$ terne possibili.

Esempio 8

Ad un'assemblea condominiale partecipano 45 persone. Tra essi bisogna eleggere un presidente e un segretario, che devono essere due persone distinte. Quante sono le possibili coppie?

□ 45^2
□ $45 \cdot 44$
□ $45 \cdot 44 \cdot 43$
□ $\frac{1}{2}(45 \cdot 44)$

Esempio 9

Nel tuo nuovo iPod shuffle sono caricate n canzoni. Impostando la funzionalità di riproduzione casuale, quante sequenze di k brani diversi puoi ascoltare?

□ $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k-1)$
□ $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k)$
□ $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

Gli ultimi esercizi richiedevano di contare quante sequenze di k oggetti si possono costruire scegliendo ciascuno di essi tra n possibili, con $k \leq n$; abbiamo discusso il caso in cui **ha importanza l'ordine** in cui gli oggetti compaiono nella sequenza, ma **non sono ammesse ripetizioni**.
Sequenze di questo tipo vengono solitamente dette disposizioni semplici o senza ripetizioni e, come abbiamo visto, il loro numero è

$$\boxed{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}$$

Esempio 10

Alla fase di istituto dei Giochi di Archimede partecipano 200 concorrenti. Sulla bacheca della scuola viene appesa la classifica dei primi 20 studenti, che accedono alla fase successiva. Quante classifiche si possono avere?

□ $200 \cdot 199 \cdot \ldots \cdot 179$
□ $200 \cdot 199 \cdot \ldots \cdot 180$
□ $200 \cdot 199 \cdot \ldots \cdot 181$

Esempio 11

Quanti sono gli anagrammi possibili (anche privi di senso) della parola LENTO?

$\boxed{}$

Nell'ultimo esercizio dobbiamo considerare le sequenze costituite da tutte le n lettere a disposizione; si tratta dunque di un caso particolare di scelte ordinate senza ripetizioni, con $k = n$.

Il numero di sequenze di questo tipo è dato allora da

$$\boxed{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}.$$

In questo caso si usa parlare di permutazioni di n elementi.

Il prodotto $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ viene detto *n fattoriale* e si indica con $n!$.

Ad esempio

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Per comodità si definisce inoltre $0! = 1$.

Esempio 12

Determina il numero $\dfrac{21!}{19!}$.

Prova a non utilizzare la calcolatrice.

$\boxed{}$

Per fare i calcoli con il fattoriale spesso è possibile effettuare semplificazioni, piuttosto che svolgere tutte le moltiplicazioni. Considera i due esempi seguenti:

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$$
$$\frac{6!}{8} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{8}} = 6 \cdot 5 \cdot 3 = 90$$

In modo analogo si poteva affrontare anche l'esercizio precedente.

Con il fattoriale possiamo scrivere in modo più sintetico il numero di scelte ordinate senza ripetizioni di k elementi tra n possibili.

Esempio 13

Il prodotto

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

può anche essere scritto nella forma

- ☐ $\dfrac{n!}{k!}$
- ☐ $\dfrac{n!}{(n-k)!}$
- ☐ $n! - k!$

Esempio 14

Ad un appello di esame sono iscritti 125 studenti. Il professore decide di interrogare il primo giorno solamente 30 studenti e di preparare un elenco in cui ha fissato l'ordine di tali interrogazioni. Quanti possibili elenchi si possono avere?

□ $\frac{125!}{30!}$
□ $\frac{125!}{95!}$
□ $\frac{125!}{30}$

Non sempre l'ordine con cui vengono effettuate le scelte è importante. Ad esempio ogni volta che si tratta di scegliere un gruppo di oggetti che non hanno ruoli differenti. Come si fa a contare le possibili scelte in questo caso?

Esempio 15

Cinque amici decidono di formare una squadra di doppio a tennis. In quanti modi possono scegliere la coppia dei componenti della squadra?

□ 60
□ 20
□ 10

Vediamo come si può affrontare l'esercizio precedente. Supponiamo che i cinque amici si chiamino $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. Noi sappiamo che le scelte ordinate di coppie tra le cinque persone sono

$$5 \cdot 4 \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{5!}{3!}.$$

In questo modo però contiamo due volte ogni squadra: ad esempio le coppie $1, 2$ e $2, 1$ sono in realtà la stessa squadra. Quindi il numero appena ottenuto va diviso per 2; dividiamo cioè per il numero di permutazioni degli elementi della coppia, ovvero $2!$.

Il numero di squadre che si possono formare è allora

$$(5 \cdot 4) : 2 = 10$$

Esempio 16

Ho acquistato 7 libri e ne devo scegliere 3 da leggere in vacanza. Quante scelte posso fare?

□ 35
□ $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$
□ $\frac{7!}{4! \cdot 3!}$

In generale per contare il numero di scelte **non ordinate** di k oggetti tra n possibili, in cui **non sono ammesse ripetizioni**, è sufficiente dividere le scelte ordinate dei k oggetti per il numero delle loro permutazioni. Il loro numero è pertanto

$$\boxed{\frac{n!}{(n-k)} : k! = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$$

Esempio 17

Un gruppo di 8 amici decide di partecipare a un torneo di pallavolo. Quante squadre differenti (indipendentemente dal ruolo) possono formare?

$\boxed{}$

Lo stesso gruppo di amici decide poi di iscriversi a un torneo di beach volley. In quanti modi possono scegliere la squadra in questo caso?

$\boxed{}$

Il fatto di avere ottenuto lo stesso risultato nelle due parti dell'esercizio precedente ha una validità generale. In effetti scegliere 6 persone che giocano e 2 che non giocano o viceversa richiede lo stesso calcolo: si tratta comunque di formare un gruppo di 6 persone e uno di 2 persone, in un caso gioca il primo gruppo, nell'altro caso il secondo gruppo.

Si usa solitamente indicare la frazione

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

con il simbolo

$$\binom{n}{k},$$

che viene detto **coefficiente binomiale**.

Con questa notazione, il risultato dell'esercizio precedente si può esprimere nella forma più sintetica

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Esempio 18

Dato l'insieme $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, il numero di sottoinsiemi di cardinalità 3 di A è

☐ 35
☐ 210
☐ $7!$

Esempio 19

In una scuola formata da 602 studenti devono essere eletti i tre rappresentanti di istituto. Quante possibili terne di persone si possono avere?

$\boxed{}$

La situazione di apprendimento è conclusa.
Ti vengono ora proposti alcuni quesiti. Se ti sembra di non aver compreso bene in qualche punto il testo che hai letto, ti suggeriamo di ripercorrerlo prima di affrontare i quesiti.

Quesito 1

Due rifugi sono collegati da 5 sentieri. In quanti modi posso andare dal primo al secondo rifugio e ritorno percorrendo due sentieri differenti all'andata e al ritorno?

☐ 25
☐ 32
☐ 20

Quesito 2

Possiedo 100 CD di cantanti italiani e 150 CD di cantanti stranieri. Voglio selezionare 3 CD italiani e 5 CD stranieri. Quante scelte differenti sono possibili?

☐ $3! \cdot 5!$
☐ $\binom{150}{5} \cdot \binom{100}{3}$
☐ $100^3 \cdot 150^5$

Quesito 3

Lo scrittore francese Raymond Queneau (1903-1976) ha scritto un'opera curiosa. Si tratta di 10 sonetti (componimenti di 14 versi), stampati su 10 fogli; ogni foglio viene tagliato in striscioline, ciascuna contenente un verso. Il lettore può così comporre nuovi sonetti: per il primo verso può scegliere uno qualunque dei primi versi dei 10 sonetti, per il secondo verso uno qualunque dei secondi versi dei 10 sonetti e così via. Il titolo dell'opera è uno dei seguenti. Quale?

□ Centomila miliardi di sonetti
□ Dieci miliardi di sonetti
□ Cento miliardi di sonetti
□ Un milione di miliardi di sonetti

Quesito 4

Sia $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{a,b,c,d\}$, calcola il numero delle funzioni da A in B. (Notiamo che si tratta in sostanza di scegliere una terna ordinata tra i 4 elementi di B, ognuno dei quali sarà l'immagine di 1, 2 e 3 rispettivamente).

$\boxed{}$

Quante sono le funzioni iniettive da A in B?

$\boxed{}$

Quesito 5

Devo riporre su una mensola 5 libri di matematica e 3 libri di chimica. Voglio che tutti i libri di matematica siano vicini tra loro e che altrettanto tutti i libri di chimica siano vicini tra loro. In quanti modi li posso disporre?

□ $5! \cdot 3!$
□ $\binom{8}{5} \cdot \binom{8}{3}$
□ $5! \cdot 3! \cdot 2$

Quesito 6

Quanti sono gli anagrammi possibili della parola ARANCE?

$\boxed{}$

Quesito 7

Per uno spettacolo teatrale sono rimasti liberi solamente i 6 posti della prima fila. In coda ci sono 6 persone tra cui una coppia di amici. Se vengono loro assegnati i posti in maniera casuale, qual è approssimativamente la probabilità che i due amici si trovino seduti vicini?

- ☐ $\frac{1}{9}$
- ☐ $\frac{1}{3}$
- ☐ $\frac{1}{6}$
- ☐ $\frac{1}{12}$

Quesito 8

Per la foto di classe il fotografo decide di disporre i 24 studenti su tre file: 7 studenti in prima fila, 8 in seconda e 9 in terza. Quante disposizioni diverse si possono avere?

- ☐ $24!$
- ☐ $\binom{24}{7} \cdot \binom{24}{8}$
- ☐ $\binom{24}{7} \cdot \binom{24}{8}\binom{24}{9}$

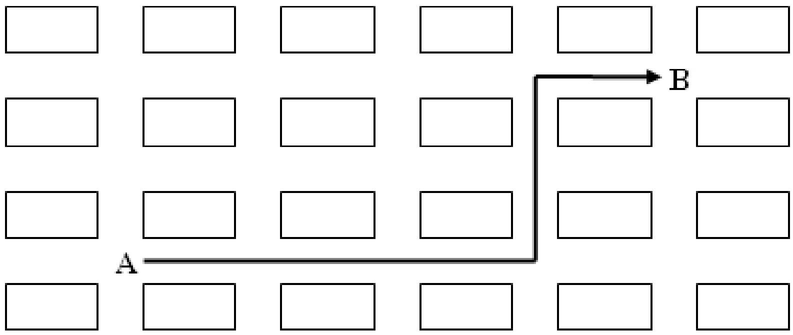
Quesito 9

Quante parole anche prive di senso di 5 lettere posso formare con le 26 lettere dell'alfabeto con la regola che le parole non contengano *doppie* (cioè che non ci siano due lettere uguali consecutive)?

- ☐ 26^5
- ☐ 25^5
- ☐ $26 \cdot 25^4$

Quesito 10

Un taxista di Manhattan deve portare un cliente da A a B. Supponiamo che scelga un percorso di lunghezza minima e che nessuna strada sia a senso unico. In figura è rappresentato uno di questi tragitti. Quanti percorsi differenti può effettuare?



☐ 30
☐ 15
☐ 10

.