iprase apprendimento ricerca innovazione
UNIVERSITÀ DI TRENTO
Dipartimento di Matematica
TRENTINO

FACCIAMO LA MATEMATICA CHE CONTA

Il curricolo di matematica per il primo biennio della scuola secondaria di secondo grado: dalle scelte didattiche alla declinazione in classe

Luciano Cappello e Sandro Innocenti

iprase
apprendimento ricerca innovazione

IPRASE – Istituto provinciale per la ricerca
e la sperimentazione educativa
via Tartarotti 15 – 38068 Rovereto (TN)
C.F. 96023310228
tel. 0461 494500 – fax 0461 499266
iprase@iprase.tn.it, iprase@pec.provincia.tn.it
www.iprase.tn.it

Prima pubblicazione aprile 2022

Realizzazione grafica e stampa:
Relè cooperativa sociale - Trento

ISBN 978 887 702 510 5

Il volume è disponibile all’indirizzo www.iprase.tn.it
alla voce risorse>pubblicazioni

FACCIAMO LA MATEMATICA CHE CONTA

Il curricolo di matematica per il primo biennio della scuola secondaria di secondo grado: dalle scelte didattiche alla declinazione in classe

Luciano Cappello e Sandro Innocenti

IPRASE per l'ambiente

Questo documento è stampato interamente su carta certificata FSC®
(Forest Stewardship Council®), prodotta con cellulosa proveniente da foreste gestite in modo responsabile, secondo rigorosi standard ambientali, sociali ed economici.

Barche sulla sabbia sono, a volte, i nostri studenti,

eppure hanno tutto ciò che serve per stare in mare.

Aiutiamoli a prendere il largo.

Indice

Prefazione

di Gabriele Anzellotti

Questo libro è parte di un progetto sul curricolo di matematica che coinvolge già da molti anni un gruppo significativo di insegnanti, in particolare del Liceo Scientifico – ora sono più di cinquanta e più di cento sono le classi interessate. Il lavoro è guidato dal Liceo Da Vinci di Trento, in particolare dai professori Luciano Cappello e Sandro Innocenti, e ha il sostegno organizzativo e finanziario della Provincia Autonoma di Trento e di IPRASE, Istituto per la Ricerca e la Sperimentazione Educativa. Inoltre, al progetto collabora il Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento, che ospita nel suo sito web una ricca scelta dei materiali realizzati. Proprio questi materiali e il percorso che li collega potranno essere l'elemento di più immediata e maggiore attrazione per gli insegnanti e per gli studenti, e di questo dirò poco più sotto, ma ritengo che ancora più importante per la scuola italiana potrà essere la chiara indicazione che da questo progetto viene riguardo alla possibilità e alla necessità che gli istituti scolastici e i docenti si uniscano e agiscano nella loro autonomia didattica, di ricerca e di formazione, per ripensare e rinnovare le ragioni, gli obiettivi e i modi dell'apprendimento e dell'insegnamento della matematica. Che un tale ripensamento e rinnovamento sia necessario viene detto spesso da molte parti, dentro e fuori dalla scuola, ma come è possibile far sì che ciò avvenga? Questo progetto sul curricolo è un esempio. E questo libro è il primo prodotto pubblicato, che racconta le motivazioni, esplicita le scelte e presenta una parte dei materiali di lavoro, offrendoli alla discussione e all'uso libero di studenti e docenti.

L'obiettivo del Progetto sul Curricolo, in estrema sintesi, è ottenere che gli studenti imparino *davvero* la matematica, come sistema di concetti e strumento di pensiero, in modo significativo e duraturo. Ma cosa vuol dire questo? E come ci si arriva in pratica, nel lavoro quotidiano in classe, per ogni specifico argomento e per le competenze trasversali?

A queste domande i lettori possono trovare molte risposte interessanti grazie a questo libro e al sito web, in particolare nella descrizione e motivazione del percorso didattico, negli esempi di verifiche, nei materiali per il laboratorio e negli esercizi per stimolare l'apprendimento attivo degli studenti. Tutti questi materiali sono organizzati in un percorso per il primo biennio del Liceo Scientifico (che comprende l'opzione Scienze Applicate), ma sono in grandissima parte immediatamente utilizzabili anche negli altri licei e negli istituti tecnici. Inoltre sono molto utili per verificare e consolidare i concetti matematici di base lungo tutto il ciclo secondario superiore fino alla quinta classe e per la preparazione all'università, nonché nei percorsi per la formazione degli insegnanti di ogni grado. Infatti il lavoro sul biennio è stato impostato costitutivamente in una prospettiva che guarda a come la matematica di base dovrebbe essere disponibile a lungo termine come strumento per la costruzione di saperi e di tecniche ulteriori. Tutto questo è stato possibile in particolare grazie alla significativa esperienza che Luciano e Sandro, mi permetto di chiamarli per nome per via della lunghissima consuetudine che ci lega, hanno accumulato nel corso di più di venti anni di attività e collaborazioni con il Laboratorio DiCoMat del Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento, che è impegnato nella ricerca sulla didattica e la comunicazione della matematica. Fra queste attività è opportuno segnalare la costruzione del database di quesiti per la sezione *Linguaggio matematico di base, modellizzazione e ragionamento dei test*[1] nazionali di verifica all'ingresso dei corsi di laurea scientifici, che il Piano nazionale Lauree Scientifiche e Con.Scienze hanno realizzato tra il 2005 e il 2015. Infatti questo lavoro ha comportato uno studio molto ampio delle difficoltà che gli studenti incontrano in matematica all'inizio dei corsi di laurea e delle possibili cause di tali difficoltà: prassi didattiche non opportune, difetti dei curricula e dei libri di testo, modalità di apprendimento poco efficaci da parte degli studenti, concezioni e atteggiamenti errati di studenti, docenti e famiglie riguardo al sapere in generale e alla matematica in particolare. Da questo studio e dalla sperimentazione didattica che contestualmente è stata svolta nelle scuole e in diversi corsi di laurea è emersa una grande mole di esempi e di idee sulle competenze matematiche e trasversali che è più importante sviluppare nel percorso scolastico e sui possibili modi per stimolare gli studenti a farlo. Naturalmente occorreva dare forma opportuna a questi esempi e a queste idee, era necessario arricchirli e organizzarli in un percorso organico, concreto, sensato, sostenibile, flessibile, adattabile da ogni insegnante alle esigenze della sua classe e alla sua maniera di essere docente. Questo è stato fatto ed è tuttora in corso nel Progetto sul Curricolo.

---

1 http://www.conscienze.it/public/[ANNUARI]/Annuario_2020.pdf

Il modo in cui il progetto si è svolto e si svolge è determinante al fine di ottenere i risultati voluti e merita un approfondimento. L'esigenza di confrontare le idee e le pratiche sugli obiettivi di apprendimento, sulle modalità didattiche e sul curricolo è nata dagli insegnanti di matematica di diversi istituti scolastici, che erano da tempo in contatto fra di loro grazie in particolare alle attività promosse dal Laboratorio di Ricerca DiCoMat anche in connessione con i percorsi di formazione iniziale e in servizio degli insegnanti che si sono susseguiti nel tempo (SSIS, TFA, PAS). A fronte di questa esigenza, nel 2016 Luciano Cappello e Sandro Innocenti hanno ideato un progetto e lo hanno presentato a Valentina Zanolla, allora dirigente del Liceo Da Vinci. Nel progetto era lucidamente disegnato un percorso di ricerca-azione-autoformazione dei docenti, basato sull'esperienza sopra descritta di collaborazione con l'università, inteso a coinvolgere tutti gli insegnanti del Liceo Scientifico della Provincia di Trento e a ottenere una immediata ricaduta sulla didattica e sui risultati di apprendimento degli studenti. La Dirigente, vista la qualità del disegno e dei proponenti, consapevole dell'importanza dell'obiettivo, ha fatto proprio il progetto e lo ha presentato al Dipartimento della Conoscenza della Provincia di Trento e all'IPRASE del Trentino, che lo hanno accolto. Il progetto prevede regolari incontri dei docenti partecipanti, che sono diverse decine e insegnano in vari istituti scolastici. Nel corso di questi incontri i professori Cappello e Innocenti presentano questioni didattiche concrete, che sono di immediato interesse per l'attività dei docenti, collocandole nella prospettiva di un curricolo verticale del Liceo Scientifico. Insieme a tali questioni vengono presentate proposte di attività didattiche, nonché esempi di materiali di lavoro per gli studenti ed esempi di esercizi e verifiche, che consentono di esplicitare e rendere operative le definizioni degli obiettivi. Si fa in modo che in ogni incontro ci sia molto tempo a disposizione per discutere e per sollevare problemi didattici, inoltre, sulla piattaforma IPRASE è disponibile uno spazio riservato per raccogliere documenti e per continuare la discussione on line. Ciascun docente può caricare sul sito segmenti del proprio programma di lavoro e verifiche; queste sono aperte alla discussione, on line e in presenza, con i curatori del progetto e tra i partecipanti.

Così, a partire dal 2016, questa comunità di docenti ha affrontato, un anno dopo l'altro, tutto il percorso dei cinque anni del liceo e, giunta al termine, ha ripreso daccapo, con l'obiettivo di revisionare criticamente il lavoro fatto, nonché di perfezionare i materiali e di renderli quanto più possibile accessibili anche agli istituti tecnici e professionali, soprattutto per il primo biennio.

Naturalmente, tutto questo richiede molto lavoro da parte di ciascun insegnante coinvolto e soprattutto da parte di Luciano Cappello e Sandro Innocenti, che formulano le proposte sul percorso e sui materiali, coordinano la discussione e revisionano i documenti e i materiali, tenendo conto delle osservazioni e dei suggerimenti che emergono sia prima che dopo la sperimentazione delle attività nelle classi.

Un tale lavoro è pesante per i docenti, ma questi trovano un solido supporto nei materiali, nella comunità dei colleghi e in Sandro e Luciano, che sono disponibili a discutere anche individualmente eventuali difficoltà didattiche. Quindi il progetto non ha avuto le defezioni che sono tipiche di tanti "corsi di aggiornamento" e il numero di insegnanti che partecipano al progetto è cresciuto di anno in anno.

Un tale lavoro sarebbe del tutto insostenibile per i professori Cappello e Innocenti, se questi non avessero una riduzione del numero di classi. E in effetti il progetto si è potuto realizzare perché il Liceo Da Vinci, nell'ambito delle possibilità previste per gli istituti scolastici nella normativa della Provincia di Trento, ha chiesto e ha ottenuto le risorse necessarie a liberare i due docenti, nel complesso, di una parte significativa del loro carico standard di insegnamento. È importante osservare che questi docenti non hanno però avuto un distacco totale e hanno entrambi sempre mantenuto alcune classi, al fine di sperimentare le attività e di conservare uno stretto legame con la scuola.

Dunque, il Progetto sul Curricolo nasce dall'esigenza degli studenti, degli insegnanti e degli istituti scolastici di migliorare l'apprendimento, e quindi l'insegnamento. Gli insegnanti e gli istituti scolastici autonomamente si organizzano e si costruiscono le forme di relazione necessarie per confrontarsi e per produrre materiali utili. Per far questo trovano il supporto normativo e finanziario indispensabile dell'Amministrazione e della competente struttura per la ricerca educativa. Inoltre trovano un punto di riferimento in un dipartimento universitario competente sulla disciplina. Tutto ciò riesce a produrre risultati grazie alla qualità delle risorse docenti presenti nel territorio, che si sono formate attraverso un lavoro di collaborazione tra università e scuola durato decenni.

Mi sembra un buon esempio di come si può agire per ripensare e rinnovare la scuola. Non so quante altre azioni ci siano in Italia con tutte queste caratteristiche. Mi auguro che il progetto continui e che ne crescano molti di più. Intanto, questo libro e i materiali sul sito saranno già certamente utili a molti.

Buon lavoro!

Introduzione

Le ragioni di un lavoro sul curricolo

La matematica che si fa a scuola ha davvero un senso per gli studenti, oltre che per i docenti?

I ragazzi non sempre comprendono la necessità, la rilevanza e la fruibilità di ciò che si affronta nelle ore di matematica. Magari questi aspetti non vengono nemmeno esplicitati loro; in ogni caso, raccontarli non basta: serve che gli studenti ne facciano esperienza diretta.

Quanto si apprende a scuola resta disponibile a lungo?

Non è automatico e si dovrebbe tenerne conto nel pianificare le attività didattiche e nell'indirizzare la rielaborazione e la manutenzione delle conoscenze.

Queste due domande sono alla base del nostro lavoro sul curricolo e le risposte che ci siamo dati ne costituiscono le prime motivazioni. Ma ci sono ulteriori ragioni che ora ci proponiamo di esaminare.

Le *Indicazioni nazionali* [MIUR, 2010] e le *Linee guida* della provincia di Trento per la scuola secondaria di secondo grado [PAT, 2013] prevedono nuovi contenuti e nuove attenzioni. In particolare, per il Liceo scientifico introducono lo studio della probabilità, della geometria analitica dello spazio e delle equazioni differenziali; e danno importanza alla costruzione e all'esame di modelli. Inoltre la normativa nazionale precisa[2]:

> *L'ampio spettro dei contenuti che saranno affrontati dallo studente richiederà che l'insegnante sia consapevole della necessità di un buon impiego del tempo disponibile.*

---

[2] Il testo citato è relativo al Liceo scientifico. Per gli altri licei sono riportate le stesse parole, ad eccezione del riferimento esplicito agli aspetti tecnici nella penultima frase.

[…] verranno evitate dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi.
L'approfondimento degli aspetti tecnici […] non perderà mai di vista l'obiettivo della comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina.
L'indicazione principale è: pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità.

Sono considerazioni impegnative, che responsabilizzano fortemente il docente e che stabiliscono un cambiamento radicale, spostando l'attenzione dalla *quantità*, dall'obbligo di terminare il programma (del resto, il programma non esiste più), alla *qualità* della proposta. Ad esse le Linee guida provinciali aggiungono precise indicazioni metodologiche, ad esempio curare l'autovalutazione e riesaminare a più riprese quanto affrontato, in un percorso "a spirale".

Tuttavia ci sembra che i libri di testo non ne tengano conto in modo sostanziale e che non si trovino *modelli* del tutto efficaci a cui far riferimento per progettare le attività in classe. Ci sono comunque proposte che forniscono indicazioni significative, come l'autorevole lavoro della commissione UMI-CIIM ([UMI, 2014]). Ci sono anche attività collaudate, ad esempio quelle promosse dal *Progetto Lauree Scientifiche* ([PLS, 2004]) e dal Progetto M@t.abel ([Matabel, 2010]), ma queste riguardano aspetti specifici, non il curricolo nel suo insieme.

C'è un ulteriore aspetto da considerare. Diversi studenti manifestano *difficoltà* in matematica nel corso dei loro studi nella scuola secondaria di secondo grado: in ingresso, in itinere ([MIUR, 2020], [INVALSI, 2019], [Impedovo et al. 2012], [Palmerio, 2018]), nella prova di matematica dell'Esame di stato ([MIUR, 2019]), ma anche nel passaggio scuola – università ([Anzellotti, 2011]).

I dati relativi al periodo prima della pandemia di COVID-19 sono indicativi. Ad esempio, nell'anno scolastico 2018/19, il 19,2% degli studenti delle classi prime in Italia non ha ottenuto la sufficienza in matematica nella valutazione finale di giugno, il 37,8% degli studenti delle classi seconde non ha raggiunto i traguardi previsti in matematica per il biennio e il 41,8% quelli per la classe quinta. Nell'anno scolastico 2017/18, il 23,1% degli studenti ha avuto una valutazione insufficiente nella prova di matematica per l'Esame di stato dei licei ad indirizzo scientifico. Nella rilevazione OCSE-PISA del 2018, circa il 25% degli studenti italiani non ha raggiunto il livello base per le competenze in matematica.

Per affrontare le difficoltà, l'approccio tradizionale è centrato sui contenuti e sugli errori, che spesso vengono esaminati solo quando e dove si presentano. Ma tale modalità sembra non funzionare; come sostiene R. Zan, è necessario cambiare prospettiva e considerare ulteriori aspetti, come le convinzioni sulla matematica, e articolare gli interventi in più fasi: osservare, interpretare, intervenire. Prima ancora, però, la ricercatrice riconosce la *responsabilità* dell'insegnamento nella nascita di diverse difficoltà. Infatti in [Zan, 2007, pag. 210] osserva che:

> *[…] lo sviluppo della consapevolezza e dei processi di controllo è legato ad un insegnamento il più possibile esplicito riguardo al senso delle attività proposte: essere istruiti sull'uso di strumenti senza sapere a cosa servono tali strumenti e perché vanno utilizzati in un modo piuttosto che in un altro non può certo educare ad un atteggiamento strategico. Ne discende che le stesse azioni didattiche che favoriscono carenze a livello di consapevolezza e di processi di controllo possono sviluppare la convinzione che 'il buon senso in matematica non serve', e favorire la visione della matematica come disciplina dissociata dal senso comune. L'organizzazione tradizionale dell'insegnamento della matematica ha responsabilità a riguardo, in quanto tende a fornire abilità e tecniche prima che queste siano effettivamente indispensabili. Solo dopo aver dato e consolidato queste tecniche (a volte anche anni dopo…) si affrontano situazioni in cui esse sono indispensabili o più spesso semplicemente utili.*

Diversi aspetti che abbiamo evidenziato, dalla domanda di senso alle difficoltà degli studenti, sono comunque noti da tempo, come si osserva in [Anzellotti, 2008].

In definitiva essi sono valide ragioni per ripensare il curricolo di matematica e costruire delle proposte *concrete* che incontrino le reali esigenze degli studenti e dei loro docenti. Per questo è nato il *Progetto sul curricolo e le metodologie didattiche per la matematica della scuola secondaria di secondo grado*.

Cosa c'è nel volume

Il testo è costituito da riflessioni, percorsi e materiali didattici, che sono il frutto del lavoro svolto nell'ambito del Progetto sul curricolo.

Precisamente, nel *capitolo 1* descriviamo le principali caratteristiche del *Progetto* e le azioni compiute, anche attraverso le voci degli studenti e dei numerosi docenti che hanno partecipato alle attività. Uno degli aspetti più innovativi è che l'*università* ed *IPRASE* hanno collaborato fattivamente con la scuola e che la scuola ha dialogato con questi due enti.

Presentato il contesto, nel *capitolo 2* entriamo nel merito della questione e proponiamo un possibile *percorso* didattico per la matematica del Liceo scientifico e dell'opzione scienze applicate, che tiene conto dello sviluppo del curricolo nell'intero quinquennio e che guarda anche all'università. Quanto ideato nasce dall'esperienza di diversi anni di insegnamento e dal confronto con l'università, ed è stato *sperimentato* in classe da molti docenti.

Nel capitolo illustriamo le scelte didattiche compiute, le motiviamo anche alla luce della normativa e delle acquisizioni della *ricerca* e indichiamo i materiali realizzati per gli studenti a supporto delle attività didattiche.

Alcuni materiali sono raccolti nel *capitolo 3*. Si tratta dei testi delle verifiche sommative assegnate in una nostra classe nel primo biennio, che offrono una *panoramica* sul percorso, e dei materiali completi relativi a tre segmenti significativi della nostra proposta.

Questi e tutti gli altri materiali per gli studenti sono disponibili inoltre su un sito nel dominio dell'Università di Trento[3]; essi sono suddivisi in diverse tipologie.

- **Tracce di attività** e **file** GeoGebra o fogli di calcolo mediante i quali alcune di esse sono realizzate. Le indicazioni e i suggerimenti proposti possono essere presentati agli studenti anche gradualmente, in modo da non limitare la loro libertà di esplorare e per lasciare più spazio al confronto tra loro e alla discussione collettiva
- **Fogli di attività** costituiti da esercizi e semplici problemi per investigare aspetti specifici oppure per consolidarne altri. Sono pensati per essere svolti per lo più in modo autonomo dai ragazzi, individualmente oppure in piccoli gruppi; poi è bene discutere con loro gli aspetti più significativi
- **Dispense** su argomenti importanti e che di solito sono affrontati in modo diverso nei libri di testo. Si possono assegnare dopo la lezione come riferimento per lo studio oppure si possono commentare direttamente in classe mediante una discussione collettiva. Tuttavia alcune si prestano ad essere esaminate prima individualmente, in modo da sviluppare l'abilità di imparare cose nuove a partire da ciò che si sa. Precisiamo che questi materiali sono una *sintesi*; perciò in classe è bene prevedere più passi di quelli indicati nel testo e coinvolgere attivamente gli studenti nella discussione
- Testi di **verifiche** assegnate nelle nostre classi; sono utili anche per l'autovalutazione o per il consolidamento

---

[3] https://sites.google.com/unitn.it/currmatsssg

- **Letture** o **video** che integrano i materiali che abbiamo costruito nell'ambito del Progetto.

Questi materiali costituiscono un supporto fondamentale per realizzare una didattica coerente con gli obiettivi che ci poniamo, sono rivolti allo *studente* e dovrebbero fornire al docente un'idea precisa e completa del percorso che può realizzare. Tuttavia il libro di testo rimane un riferimento importante; semmai si dovrebbero guidare i ragazzi ad utilizzarlo in modo critico.

Vogliamo concludere questa panoramica con due precisazioni. La prima è quasi superflua: il nostro percorso è *una* proposta, fra le molte possibili; può essere affrontato anche solo in parte o in un ordine diverso e, naturalmente, va declinato in base al contesto e alla propria sensibilità didattica.

La seconda precisazione è che il percorso è stato pensato per il Liceo scientifico e per la sua opzione scienze applicate, ma si può adattare per gli *altri* licei e gli *Istituti tecnici*; infatti è centrato sui saperi essenziali ed intende sviluppare competenze, non solo conoscenze.

Ringraziamenti

In primo luogo ringraziamo gli studenti che abbiamo incontrato nelle nostre esperienze di insegnamento e, in particolare, le classi che abbiamo accompagnato per tutto il quinquennio: la 1 M del Liceo scientifico Leonardo da Vinci di Trento dell'a.s. 2014/15 e la 1 M dell'a.s. 2016/17.

Siamo a scuola *per* loro e ciò che si fa in aula si costruisce *insieme* a loro e passa attraverso le loro *persone.* Perciò Leonardo, Valentina… Paolo, Chiara: siete presenti in ogni parte di questo volume!

Il confronto, che prosegue da più di vent'anni, con Gabriele Anzellotti dell'Università di Trento è unico, ci ha fatto diventare ciò che siamo come insegnanti e costituisce lo sfondo di ogni nostro lavoro. Anche il contributo del Laboratorio DiCoMat è fondamentale: dalla coordinatrice Elisabetta Ossanna, che da molto tempo promuove il collegamento scuola-università, ai docenti universitari che vi collaborano, in particolare Stefano Bonaccorsi.

Indispensabile è l'appoggio delle Dirigenti scolastiche del Liceo Leonardo da Vinci di Trento, Valentina Zanolla e Tiziana Rossi, che hanno creduto nel Progetto e nell'efficacia della proposta.

Altrettanto importante è il ruolo di IPRASE nel diffondere l'esperienza al sistema scolastico trentino… e non solo: hanno sostenuto il lavoro il direttore Luciano Covi, Enrica Rigotti, Cristiana Bianchi, Ilaria Azzolini ed

Anita Erspamer, alla quale abbiamo potuto fare riferimento per qualsiasi aspetto riguardante la pubblicazione dei materiali.

Ringraziamo Francesca Voltolini per averci guidato nella realizzazione del sito che ospita i materiali realizzati per gli studenti.

Diciamo grazie ai numerosi docenti di scuola che partecipano alle attività del Progetto, che sperimentano in classe i materiali per gli studenti e discutono i percorsi che hanno realizzato. Grazie per aver condiviso con noi un bel tratto di strada e per continuare a farlo! Anche voi siete in varie parti di questo volume, ad iniziare da Michele Avancini, che ha portato un contributo prezioso in ogni fase del lavoro, e da Francesca Mazzini, con la quale abbiamo ideato la parte sulla probabilità.

Dopo avervi incontrato non si può non cambiare.

Bibliografia e sitografia dell'Introduzione

[Anzellotti, 2008] Anzellotti, G. (2008). La questione 'matematica' nella scuola italiana. *RIVISTA DELL'ISTRUZIONE*, 24 (5), 77-84.

[Anzellotti, 2011] Anzellotti, G. (2011). Valutazione e sviluppo delle competenze matematiche di base dall'obbligo scolastico all'ingresso dell'università. *RICERCAZIONE*, 3 (1), 173-184.

[Impedovo et al., 2012] Impedovo, M., Orlandoni, A., Paola, D. (2012). *Guida sintetica alla lettura della seconda prova di matematica. Classe seconda – Scuola secondaria di secondo grado.* INVALSI Quaderni SNV N.1 – MAT.

https://www.invalsi.it/snvpn2013/documenti/Quaderni/Quaderni_SNV_N1_MAT_2011.pdf

[INVALSI, 2019] INVALSI (2019). *I risultati delle prove Invalsi 2019. A colpo d'occhio.*

https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/2019/Uno_sguardo_generale_sui_risultati_delle_prove_INVALSI_2019.pdf

[MIUR, 2010] MIUR (2010). *Indicazioni nazionali degli obiettivi specifici di apprendimento per i licei.*

https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf

[Matabel, 2010] *Materiali del* Progetto *M@t.abel.* Matematica. Apprendimenti di base con e-learning.

http://www.scuolavalore.indire.it/superguida/matabel/

[MIUR, 2019] MIUR (2019). *Focus* "*Esiti degli esami di stato nella scuola secondaria di II grado", anno scolastico 2017/2018.*

https://miur.gov.it/documents/20182/0/Esiti+201718+IIgpdf/fb207902-d62e-53bb-ba47-e3a495be2181?version=1.0&t=1555510843244

[MIUR, 2020] MIUR (2020). *Focus "Esiti degli scrutini del secondo ciclo di istruzione", anno scolastico 2018/2019.*

https://miur.gov.it/documents/20182/0/Esiti+degli+scrutini+del+secondo+ciclo+di+istruzione+-+Anno+Scolastico+2018_2019.pdf/941559ef-e49b-8a5b-d8a0-d5bd981bb27f?version=1.0&t=1588952112199

[Palmerio, 2018] Palmerio, L. (2018). *I risultati italiani dell'indagine internazionale OCSE PISA 2018.*

https://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2018/docris/2019/Presentazione_Risultati_PISA2018.pdf

[PAT, 2013] *PAT (2013). Linee guida della Provincia autonoma di Trento per il secondo ciclo di istruzione.*

https://www.vivoscuola.it/Schede-informative/Piani-di-studio-SECONDO-CICLO/Materiali-piani-di-studio-SECONDO-CICLO

[PLS, 2004] *Piano lauree scientifiche: portale del Piano*

https://www.progettolaureescientifiche.eu/libri-pls/

[UMI, 2014] UMI-CIIM (2014). *Costruzione di percorsi didattici di matematica coerenti con le indicazioni della riforma.*

https://umi.dm.unibo.it/materiali-umi-ciim/secondo-ciclo/

[Zan, 2007] Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire.* Milano: Springer-Verlag Italia.

1 Un progetto sul curricolo di matematica

Il *Progetto sul curricolo e sulle metodologie didattiche per la matematica della scuola secondaria di secondo grado* nasce nel 2016, per le varie ragioni che abbiamo discusso nell'Introduzione. Si colloca nell'ambito di un accordo, per attività di formazione e ricerca, tra il *Liceo scientifico Leonardo da Vinci* di Trento e il Dipartimento di matematica dell'Università di Trento ed è stato approvato dal Dipartimento della conoscenza della Provincia autonoma di Trento.

Il progetto si può suddividere in due fasi. Nella prima, che va dall'a.s. 2016/17 all'a.s. 2020/21, è stata ideata e sperimentata una *proposta* per il curricolo del Liceo scientifico e per l'opzione scienze applicate. Nella seconda, che è in corso mentre scriviamo, ci si propone di *affinare* l'esperienza e *pubblicare* i materiali realizzati in un formato utile per docenti e studenti.

In questo capitolo illustreremo come sono state pianificate le attività e quali azioni sono state compiute nella prima fase del Progetto, e lo faremo anche attraverso le parole degli studenti e dei docenti che vi hanno partecipato. Una sintesi di tali aspetti è pubblicata sul portale di IPRASE ([IPRASE, 2018]) e sulla sua Newsletter ([Cappello e Innocenti, 2018]).

1.1 Aspetti di un progetto unitario

Partecipanti

Il Progetto si basa sul contributo di diverse componenti. È curato dai docenti Luciano Cappello e Sandro Innocenti, prevede la regia del *Liceo scientifico Leonardo da Vinci* di Trento e la collaborazione di IPRASE nonché del Dipartimento di matematica dell'*Università* di Trento e, in particolare, del Laboratorio di didattica e comunicazione della matematica.

La partecipazione dell'università è fondamentale per il confronto sugli aspetti *epistemologici* e sulle acquisizioni della *ricerca* in didattica della matematica, ed è il naturale sviluppo di una collaborazione che prosegue da diversi anni ([Anzellotti, Cappello, Innocenti, 2005]). Senza l'università un lavoro profondo sul curricolo non sarebbe nemmeno possibile, poiché l'esperienza d'insegnamento non basta. Lo abbiamo constatato in diverse occasioni e, in particolare, nella realizzazione di numerosi test di ingresso, locali e nazionali, ai corsi di laurea di ambito scientifico, quando abbiamo potuto guardare da un'angolazione diversa la matematica che si fa a scuola e osservare cosa resta a lungo termine ([Anzellotti e Dalla Torre, 2020]).

Anche la partecipazione di IPRASE è importante, poiché permette, tra l'altro, di condividere i materiali e di *diffondere* l'esperienza attraverso vari canali di comunicazione.

Inoltre, come vedremo, il Progetto riesce a coinvolgere molti insegnanti, che provengono da diverse scuole secondarie della provincia di Trento ma anche da altre province; nell'a.s. 2020/21 hanno partecipato circa 80 docenti.

Obiettivi

Il progetto che curiamo riguarda il *curricolo.* Ma cosa intendiamo con questo termine?

È una nozione piuttosto articolata, come precisa Anzellotti in [Anzellotti, 1997]. Seguendo l'autore, noi intendiamo per *curricolo* una cosa più circoscritta:

- *la definizione del punto di partenza (approssimativo) e degli obiettivi di un percorso formativo (tipicamente un anno di scuola), per quanto riguarda la disciplina matematica e alcune capacità cognitive e metacognitive generali;*
- *la determinazione delle situazioni didattiche, dell'ordine degli argomenti, dei materiali di lavoro, delle diverse fasi di attività e dei processi di monitoraggio e di valutazione del processo di apprendimento.*

Abbiamo considerato questi diversi aspetti nel pianificare le attività e nel realizzarle in classe, e nel volume esamineremo quelli che ci sembrano più rilevanti per la *pratica* didattica.

Premesso ciò, gli obiettivi del Progetto sono:

- *precisare* i principali aspetti di un curricolo di matematica per il Liceo scientifico e per l'opzione scienze applicate, unitario e coerente con le Indicazioni nazionali e le Linee guida provinciali; considerare anche la metodologia didattica
- realizzare *materiali* che costituiscano un vero supporto alle azioni

didattiche, quali fogli di attività (semplici problemi ed esercizi), dispense, tracce di attività anche con software o con oggetti

- *sperimentare* in classe i percorsi così progettati ed integrarli con il libro di testo, riservando attenzione agli aspetti metodologici
- *confrontarsi* con i docenti, condividendo idee e materiali e supportando le loro attività.

Con due attenzioni, tra le altre. Per compiere scelte efficaci è opportuno considerare un'ampia prospettiva e tener conto della programmazione nell'*intero* quinquennio; anzi, anche dello sviluppo degli apprendimenti nella scuola secondaria di primo grado, secondo quanto stabilito in [MIUR, 2012], e del passaggio scuola-università, esaminato con chiarezza in [Orientamat, 2006] e [Accascina et al., 2006].

Inoltre, per incidere davvero nella pratica didattica, occorre sostenere i docenti con *continuità* per tutto l'anno scolastico e non solo episodicamente negli incontri di un corso di formazione.

Criteri didattici

La nostra proposta per il curricolo si basa su alcuni *principi* generali, che ora ci proponiamo di illustrare brevemente e che sono indicati anche in [Cappello, Danzi, Scapin, 2017].

Fare in modo che quanto lo studente apprende a scuola resti disponibile a lungo.

Le attività non dovrebbero essere orientate solo allo svolgimento della verifica sommativa, ma alla costruzione di saperi che i ragazzi siano in grado di utilizzare anche in seguito. Per questo è importante considerare gli aspetti davvero essenziali e guidare gli studenti ad individuare i contenuti di base e, partendo da questi, a ricostruire gli altri.

Sviluppare competenze matematiche e trasversali.

Si dovrebbe favorire la maturazione di competenze matematiche, come modellizzare e rappresentare, ma anche trasversali, ad esempio interpretare testi, progettare, comunicare ([Baccaglini-Frank et al., 2018, cap. 6]); del resto la competenza linguistica e quella matematica sono strettamente correlate, come è chiarito in [Ferrari, 2021]. È opportuno esplicitarle in classe di volta in volta per orientare il lavoro degli studenti e chiarirne il senso.

Invece, se si dà troppa importanza alle conoscenze, si rischia di ridurre la matematica ad un insieme di formule e procedure, di cui lo studente non comprende il significato e che presto dimentica.

Organizzare le attività in un percorso unitario.

Per quanto ricca ed accattivante possa essere un'attività, la sua efficacia è molto ridotta se rimane un episodio isolato o addirittura viene percepita come altro dalla matematica. Per le stesse ragioni, i diversi temi che proponiamo sono pensati come parti di un *unico* percorso.

Favorire un approccio fattivamente laboratoriale.

Il foglio di calcolo e i software di geometria dinamica permettono di esplorare e di focalizzare l'attenzione sui processi più che sui risultati; inoltre inducono a curare la progettazione e la formalizzazione, che si trasforma da richiesta del docente in esigenza concreta per comunicare con l'applicazione. Ma sono utili anche strumenti più classici, come la riga e il compasso.

Tuttavia è riduttivo considerare il laboratorio solo come luogo fisico. Noi lo intendiamo piuttosto come una *situazione* in cui lo studente è attivo, esplora in prima persona, progetta, congettura, comunica, si confronta con i compagni e con il docente, ri-organizza. Così, quanto si costruisce nella situazione specifica può evolvere in sapere matematico. È questa modalità di lavoro che caratterizza il laboratorio, non l'uso di attrezzature e strumenti, come è approfondito nel confronto riportato in [Anzellotti, 2007].

Costruire un senso della matematica che si affronta a scuola.

È il criterio più importante e costituisce una delle ragioni del Progetto, come abbiamo visto nell'Introduzione. In sostanza, non ci accontentiamo che lo studente sappia *fare*, ma vorremmo guidarlo ad investigare gli oggetti matematici, a trovarne dei significati e, gradualmente, a percepirli come propri.

Per questo nel nostro percorso la formalizzazione non è il punto di partenza, ma il punto di *arrivo*; non è imposta dall'esterno, ma nasce dall'esigenza, dello *studente,* di comunicare in modo efficace e univoco. E per questo i simboli e i termini specifici sono ridotti a quelli *essenziali*; così i ragazzi hanno il tempo di esaminare a fondo l'oggetto anziché fermarsi al nome.

Tali aspetti sono approfonditi in un contesto più generale in [Gardner, 1993].

> *Gli insegnanti chiedono agli studenti di risolvere certi problemi prefissati, di appropriarsi di liste di termini, di memorizzare e di riformulare, a richiesta, le definizioni. […]*
> *Insegnanti e studenti […] non sono disposti ad assumersi i rischi del comprendere e si accontentano dei più sicuri "compromessi delle risposte corrette". In virtù di tali compromessi, insegnanti e studenti considerano che l'educazione abbia successo quando gli studenti sono in grado di fornire le risposte accettate come corrette. […] finché si accet-*

tano prestazioni rituali, meccaniche o convenzionali, non si promuove la comprensione autentica.

Comunque è importante prestare attenzione anche ad ulteriori elementi che intervengono nella costruzione e nella gestione del sapere, e che possono favorire l'apprendimento oppure, all'opposto, ostacolarlo. Si tratta degli aspetti *metacognitivi*, che riguardano la consapevolezza del proprio modo di apprendere e la sua conseguente regolazione, delle *convinzioni* sulla matematica e su di sé, ad esempio che fare matematica sia applicare formule o che le risposte siano sempre numeri, e degli aspetti *affettivi*, come gli atteggiamenti.

Sono questioni delicate, studiate da tempo dalla ricerca e che è bene far emergere nella pratica didattica, come è illustrato con chiarezza in [Zan, 1995] e [Zan, 2000].

Azioni compiute

Un lavoro che abbraccia l'intero curricolo di matematica della scuola secondaria di secondo grado è complesso. Per questo abbiamo deciso di esaminare un anno di corso alla volta: la classe prima nell'anno scolastico 2016/17, la seconda nell'anno scolastico successivo, fino alla quinta nell'anno scolastico 2020/21.

In questo modo abbiamo *progettato* un possibile percorso per il Liceo scientifico e per l'opzione scienze applicate; in particolare, abbiamo precisato quali aspetti affrontare, in quale ordine e con quali modalità didattiche.

Per farlo è stato fondamentale approfondire i contenuti disciplinari e la normativa, ma anche le acquisizioni della ricerca in didattica della matematica. Abbiamo quindi esaminato diverse questioni sugli argomenti che si affrontano in classe, in particolare dai tre testi [Villani, 2003], [Villani, 2006], [Villani et al., 2012]; considerazioni didattiche più generali, come quelle esposte nel manuale [Baccaglini-Frank et al., 2018]; quadri di riferimento di indagini nazionali e internazionali sugli apprendimenti, ad esempio [INVALSI, 2018] e [PISA, 2013].

Le nostre riflessioni sono condensate in un documento per il *docente* che è alla base del capitolo 2 di questo volume. E sono concretizzate nei *materiali* che abbiamo realizzato per gli *studenti*: li presentiamo nell'Introduzione e ne mostriamo alcuni nel capitolo 3. Naturalmente si tratta di *una* proposta, tra altre ragionevoli, e va adattata al contesto e alla propria sensibilità didattica.

Sono solo belle parole? Non proprio, visto che il lavoro è stato *sperimentato* da diversi docenti in varie classi, a partire da quelle che abbiamo seguito fin dalla prima. L'esperienza nel corso del prof. Cappello è documentata in un *diario* delle *lezioni.*

Anche se non abbiamo valutato sistematicamente le attività svolte, la proposta ci sembra davvero efficace: i ragazzi partecipano con entusiasmo alle lezioni e scoprono gradualmente cosa significa fare matematica e come essa intervenga in diversi contesti, anche vicini alla propria esperienza. D'altro canto abbiamo constatato come il lavoro in classe venga presto vanificato se gli studenti non rielaborano a fondo ciò che prima hanno discusso in aula. E ci siamo resi conto che per alcuni di loro serve del tempo per appropriarsi del nuovo approccio; in effetti, conoscere le ragioni di quanto si fa, ricostruire le formule volta per volta, sviluppare abilità diverse dal calcolo… richiede uno sforzo notevole e la volontà di andare oltre le proprie sicurezze.

Considerazioni analoghe si possono fare per gli insegnanti: c'è bisogno di tempo per sentirsi sicuri nel proporre le nuove attività in classe, nel giustificarle ai ragazzi e ai genitori e nel costruire delle verifiche che tengano conto in modo equilibrato degli aspetti affrontati.

Anche per questo il *confronto* con i *docenti* è fondamentale. È stato organizzato ogni anno attorno ad un corso di formazione a cui hanno partecipato fino ad ottanta insegnanti. I materiali discussi negli incontri sono pubblicati in uno spazio riservato della piattaforma IPRASE, tuttavia alcuni si possono consultare liberamente all'indirizzo [IPRASE, 2018].

In realtà il corso ha costituito solo l'*inizio* di un confronto. Infatti, gli insegnanti ricevevano in itinere i materiali realizzati a supporto delle attività e discutevano la pianificazione dei percorsi e la loro declinazione in aula; i colloqui avvenivano anche nelle singole scuole e, aspetto cruciale, durante l'*intero* anno scolastico.

Non è tutto. I docenti illustravano gli aspetti rilevanti delle sperimentazioni in alcuni incontri del corso e postavano i testi delle verifiche somministrate su un forum dedicato del portale IPRASE, discutendoli con noi. Nell'anno scolastico 2018/19 sono state pubblicate circa 90 verifiche per la classe terza, nel 2019/20 circa 90 per la classe quarta e nell'anno scolastico 2020/21 circa 60 per la classe quinta. Inoltre le idee del Progetto sono state esaminate nei Dipartimenti di Matematica di alcuni istituti e hanno costituito il riferimento per la programmazione in parallelo in varie classi o per corsi di formazione.

I docenti spesso vorrebbero innovare ciò che propongono in classe, ma non trovano riferimenti adeguati, non dispongono del tempo necessario e del sostegno per spingersi oltre ciò che controllano per consuetudine. Perciò, al di là dei numeri, il vero risultato è che diversi insegnanti hanno ripensato la propria didattica, si sono sentiti sostenuti nel farlo e stimolati a discuterne. Si è formata una *comunità* di docenti (che coinvolge anche i loro *studenti*), che ha grandi aspettative e in questi anni ha sperimentato modi diversi per realizzarle.

1.2 La parola a docenti e studenti

Iniziamo dai commenti di alcuni docenti che hanno partecipato alle attività del Progetto.

È un percorso che mira alla trattazione dei contenuti essenziali, evitando di disperdersi nei mille rivoli che spesso i testi di matematica offrono (Antonella).

Desideravo esplorare nuovi metodi, non immaginavo di non poter più tornare indietro. Il nuovo metodo mi ha dato un orizzonte di senso che non trovavo più da anni, metodi che ritenevo assolutamente irrinunciabili hanno perso sostanza dando spazio alle argomentazioni, ai laboratori, alla ricerca e all'approfondimento storico e pratico. Non ci si limita a lezioni frontali di teoria o esercizi e ore di esercitazioni. Si lavora su laboratori in cui lo studente si "sporca le mani", diventa il protagonista del suo apprendimento, si contestualizza la matematica nella realtà anche leggendo e interpretando testi significativi (articoli di giornale, testi complessi, leggi...) e non solo problemi che a volte rendono ridicola la stessa disciplina. Si congettura mediante l'osservazione, si utilizza la rete e si impara sul campo a selezionare le fonti attendibili, si impara ad esprimere un proprio ragionamento e, cosa assolutamente fondamentale per l'educazione alla civiltà, si impara ad ascoltare il ragionamento, diverso, di un'altra persona (Stefania).

La condivisione delle scelte soprattutto contenutistiche ma anche didattiche e metodologiche mi ha supportata nella mia formazione e sostenuta nel momento del confronto con i genitori perché non ero più la singola docente a compiere determinate scelte ma c'era un considerevole gruppo di docenti, di cui facevo parte, che operava esattamente come me (Anna).

I corsi hanno rappresentato l'occasione per "rileggere" con occhio critico la programmazione solitamente proposta agli studenti e per ridiscutere alcune delle priorità ad essa sottese, approfondendo, soprattutto dal punto di vista delle scelte didattiche, argomenti storicamente considerati meno rilevanti e/o affrontati con approcci eccessivamente formali e legati al libro di testo.
Estremamente importante è stata la possibilità di confrontarsi individualmente con i due docenti, per discutere con loro le strategie migliori per

impostare il lavoro nelle mie classi, cercando di trovare il punto d'incontro ottimale fra le proposte del corso, le particolari indicazioni del dipartimento del mio istituto e la situazione di partenza delle classi (Adriano).

La proposta didattica inizialmente può destabilizzare lo studente e il docente essendo poco tradizionale, ma la coerenza del percorso consente di valorizzare anche quegli aspetti psicologici, come l'incuriosire e motivare lo studente alla scoperta, alla verifica mediante software, all'autonomia nello studio ragionato e nell'apprendimento a lungo termine (Erica).

Secondo me, il percorso proposto è stato molto innovativo sul biennio e ha consentito a molti docenti che avevano qualche remora a "tagliare" alcune parti di algebra un po' fine a sé stessa di trovare coraggio e motivazione, sentendosi accompagnati in questo cambiamento.
L'aspetto sicuramente interessante del Progetto è quello di aver incentivato lo studio della probabilità (secondo me essenziale per la scienza del XXI secolo) e accompagnato gli insegnanti della vecchia guardia, come me, che non hanno alle spalle una preparazione universitaria nel settore; per i materiali e l'approccio, il Progetto è sicuramente debitore del corso "Didattica della probabilità per la secondaria di secondo grado", ma visto il numero di insegnanti coinvolti è stato in grado di diffondere le buone pratiche avviate con quel corso (Francesca).

Ho utilizzato in questi anni, per alcune mie classi del biennio, il tantissimo materiale messo a disposizione. Devo dire che è stato molto utile e interessante, perché ho potuto mettermi più volte in discussione: nella scelta di trattare o non trattare un determinato argomento, nelle modalità di trattazione, nella progettazione di una verifica scritta. Ho trovato davvero utile e stimolante il potersi confrontare con colleghi provenienti da realtà diverse (per classe, per istituto, per provincia). Lo scambio di idee ed opinioni che c'è stato ci ha permesso di riflettere su svariati aspetti, teorici e pratici, della didattica della matematica (e della fisica) (Lara).

Se è vero che ad ogni docente di Matematica è chiaro il senso profondo di ciò che prova ad insegnare, la stessa chiarezza non si può dire sempre trasmessa agli studenti, che troppo di frequente vedono nella Matematica una disciplina artificiale, inutile, sterile. Una disciplina "di plastica": creata in laboratorio, da smaltire possibilmente presto e capace di inquinare la bellezza del mondo. Questo corso, con il curricolo in esso presentato, ha contribuito significativamente a fornire ai docenti che lo hanno seguito strumenti concreti per mettere gli studenti nella condizione di afferrare, comprendere in maniera profonda e trattenere nel tempo il significato profondo dei contenuti, radicando concetti signi-

ficativi anziché consolidando procedure vuote, riempiendo di sostanza molti bizzarri simboli (dal più all'integrale) con cui interpretare il loro stesso mondo (Matteo).

In fondo è agli studenti che è rivolto il nostro lavoro. Perciò è importante esaminare attentamente il loro punto di vista.

Col nuovo metodo in matematica mi sono trovata molto meglio per due motivi: il primo è che riesco a ragionare e a spiegare agli altri quello che sto facendo, il secondo è che è soddisfacente arrivare a certe conclusioni mediante un ragionamento che ho capito e riesco a rifare (Emma).

È più coinvolgente e gratificante capire i concetti lavorando in gruppo e prima che la prof. li spieghi (Elisa).

All'inizio di ogni argomento trattato ci veniva mostrato il motivo per cui lo studiavamo, che applicazioni aveva in altre materie e nella vita "concreta". In questo modo agli occhi di noi studenti crollava già l'immagine della matematica come materia formata solo da sterili conti. Il fatto di costruire insieme la lezione fa sì che i concetti rimangano a lungo termine nella mente di noi studenti e che, nel momento in cui dovessimo dimenticarli o ci trovassimo di fronte ad una situazione nuova, siamo in grado di muoverci autonomamente arrivando comunque ad un risultato (Ludovica).

Per affrontarlo al meglio sicuramente non basta studiare il giorno prima ma vi è il bisogno di dividere il lavoro in piccole parti che vanno consolidate a fondo. Inizialmente può sembrare di non essere in grado, un lavoro troppo impegnativo e faticoso ma pian piano tutto l'impegno e i sacrifici verranno ripagati con dei buoni risultati che ti renderanno orgoglioso di te (Nourhan).

Seguire questo programma è come avere la possibilità di dare uno sguardo "dietro alle quinte" della matematica. È un approccio che non si limita alla matematica, ma che aiuta a sviluppare uno sguardo critico a trecentosessanta gradi verso le informazioni che riceviamo quotidianamente (Davide).

Trovo che pensare lo studio della matematica come un processo, un percorso da seguire gradualmente, sia qualcosa di vantaggioso per vari aspetti.
Se nello studio apprendo le cose prima in modo intuitivo e poi, mano a mano, in modo sempre più raffinato, innanzitutto le vedo più vicine a me, alla mia portata e riesco quindi più facilmente a farle mie. Poi capisco qual è il loro punto di partenza, vedo da dove hanno "origine",

perché ha senso studiarle (facendo riferimento anche a contesti concreti della realtà) e imparo a riconoscere quei contesti in cui è importante applicarle.
Infine, trovo molto interessante sapere che studiare un teorema, un procedimento, un metodo di calcolo, è importante non solo per quello che dice in sé ma anche per le varie capacità che sviluppa: in questo modo la matematica non resta un qualcosa di teorico e astratto, ma aiuta a sviluppare un ragionamento che trova applicazioni anche nella vita quotidiana, e penso sia questa la cosa più importante (Chiara).

Specialmente grazie al corso di analisi mi sto rendendo sempre più conto della portata del percorso fatto nei cinque anni. Prima ammiravo […] la matematica […] seria, profonda ed elegante, ora, man mano che scopro la matematica "vera", mi accorgo che era proprio la matematica "vera" che facevamo al liceo, in una versione resa digeribile per tutti (Leonardo).

Bibliografia e sitografia del capitolo 1

[Accascina et al., 2006] Accascina, G., Anichini, G., Anzellotti, G., Rosso, F., Villani, V., Zan, R. (2006). *La matematica per le altre discipline*. Edizioni dell'Unione Matematica Italiana.
https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2013/10/MATTONCINIcrop-finale.pdf
[Anzellotti, 1997] Anzellotti, G. (1997). I nuovi temi e la progettazione dei curricoli. In *I temi 'nuovi' nei programmi di matematica e il loro inserimento nel curriculum.* Quaderni MPI-UMI, 26/2, 92-110.
https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2013/10/26_2matem.pdf
[Anzellotti, 2007] Anzellotti, G. (2007). Il laboratorio è utile per fare e imparare una matematica che significhi qualcosa per noi. *Notiziario UMI*. Dicembre, 48-60.
https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2013/10/Anzellotti.pdf
[Anzellotti, Cappello, Innocenti, 2005]. Anzellotti, G., Cappello, L., Innocenti, S. (2005). Matematica: obiettivi, itinerari, interpretazioni. *Nuova Secondaria,* 23 (1), 91-97.
[Anzellotti e Dalla Torre, 2020] Anzellotti, G., Dalla Torre, G. (2020). con.Scienze e i test di ingresso ai corsi di laurea scientifici. Annuario con.Scienze 2020, 41-54.
http://www.conscienze.it/public/[ANNUARI]/Annuario_2020.pdf
[Baccaglini-Frank et al., 2018] Baccaglini-Franck, A., Di Martino, P., Natalini, R., Rosolini, G. (2018). *Didattica della matematica.* Milano: Mondadori.
[Cappello, Danzi, Scapin, 2017] Cappello, L., Danzi, K., Scapin, E. (2017). Alcuni percorsi di probabilità. Tra il lavoro autonomo con materiali multimediali e il confronto in classe. *Quaderni GRIMeD,* 3, 113-123. Torino: Il Capitello.
http://www.capitello.it/grimed3/Atti_Grimed_3.pdf
[Cappello e Innocenti, 2018] Cappello, L., Innocenti, S. (2018). Progetto sul

curricolo e sulle metodologie per la matematica nella scuola secondaria di secondo grado. *Newsletter IPRASE,* gennaio 2018.
https://urly.it/3f3zf
[Ferrari, 2021] Ferrari, P.L. (2021). *Educazione matematica, lingua, linguaggi. Costruire, condividere e comunicare matematica in classe.* UTET.
[Gardner, 1993] Gardner, H (1993). *Educare al comprendere. Stereotipi infantili e apprendimento scolastico.* Milano: Feltrinelli.
[INVALSI, 2018]. INVALSI (2018). *Quadro di riferimento delle prove INVALSI di matematica.*
https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf
[IPRASE, 2018] IPRASE (2018). Progetto sul curricolo e sulle metodologie per la matematica nella scuola secondaria di secondo grado. *Portale IPRASE/ Ricerca e valutazione*.
https://urly.it/33y_a
[MIUR, 2012] MIUR (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione.*
http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf
[Orientamat, 2006] Sito del *Progetto Orientamat.*
http://www.science.unitn.it/orientamat/
[PISA, 2013] INVALSI (2013). *PISA 2012. Quadro di riferimento analitico per la Matematica*.
https://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012/documenti/Matematica.pdf
(versione italiana di OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OECD Publishing)
[Villani, 2003] Villani, V. (2003). *Cominciamo da Zero.* Bologna: Pitagora.
[Villani, 2006] Villani, V. (2006). *Cominciamo dal Punto.* Bologna: Pitagora.
[Villani et al., 2012] Villani, V., Bernardi, C., Zoccante, S., Porcaro, R. (2012). *Non solo calcoli.* Milano: Springer-Verlag Italia.
[Zan, 1995] Zan, R. (1995). L'approccio metacognitivo. *Le Scienze e il loro insegnamento*. 4/5, 96-99.
[Zan, 2000] Zan, R. (2000). Emozioni e difficoltà in matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*. 23A (3 e 4), 207-232, 327-345.

2 Un percorso per il primo biennio: le scelte didattiche

Questo capitolo è il cuore del volume. È quello in cui presentiamo un possibile percorso per il primo biennio del Liceo scientifico e per la sua opzione scienze applicate, che si basa sui *criteri didattici* esaminati nel capitolo precedente ed è stato *sperimentato* in diverse classi.

Nel primo paragrafo illustreremo sinteticamente le nostre idee su quali *temi* affrontare e su quale *approccio* adottare nel complesso.

Nei due paragrafi successivi entreremo più nel dettaglio e preciseremo cosa proporre e come farlo, *giustificheremo* le scelte compiute, anche alla luce delle acquisizioni della ricerca e della normativa, e ci confronteremo con quanto si trova nei libri di testo. Faremo riferimento alle Indicazioni nazionali per il Liceo scientifico; comunque esse sono essenzialmente uguali a quelle per l'opzione scienze applicate e sono analoghe, negli aspetti di base del primo biennio, anche a quelle per gli altri licei. Inoltre, passo per passo, indicheremo i *materiali* di lavoro per lo studente mediante i quali abbiamo declinato tali scelte; le loro caratteristiche e il modo di utilizzarli sono sintetizzati nell'Introduzione del volume.

Infine, nella quarta sezione, faremo il punto: *schematizzeremo* gli aspetti che riteniamo opportuno affrontare e forniremo un'indicazione di massima dei tempi.

2.1 Alcune scelte didattiche generali

Quali *temi* affrontare nel primo biennio? E con quale *approccio*?

Per cominciare proponiamo di utilizzare i *numeri* anche in contesti diversi dal calcolo astratto. Già all'inizio del liceo si possono impiegare i numeri naturali per *contare* gli elementi di un insieme, ossia determinare quante sequenze soddisfano certe condizioni assegnate. Attenzione però: con ciò non intendiamo il classico calcolo combinatorio, ma "mettere le mani" sul problema, ossia esplorare la situazione, rappresentarla mediante elenchi, grafi o schemi, e ricavare il numero di sequenze da questi invece che da formule costruite da altri.

In quest'ottica si possono poi utilizzare le percentuali per *descrivere* situazioni reali, per ottenere informazioni significative e per prendere decisioni, magari confrontando diverse modalità di crescita.

Passando alle lettere, è bene *anticipare* le *equazioni* rispetto all'ordine in cui vengono proposte di solito nei libri di testo. Infatti esse motivano lo studio dell'algebra e intervengono in altre discipline già nel primo periodo dell'anno scolastico, ad esempio per invertire una formula; invece i manuali le collocano spesso solo dopo il calcolo con i polinomi, se non dopo quello con le frazioni algebriche. Comunque gli studenti dovrebbero avere già incontrato le equazioni nella scuola secondaria di primo grado.

Allargando lo sguardo, siamo convinti che fare algebra a scuola sia un po' di più di "semplificare" un'espressione che contiene lettere. Significa essenzialmente due cose: *modellizzare* una situazione mediante opportuni oggetti matematici e *manipolare* un'espressione trasformandola in altre equivalenti e più utili per un dato *obiettivo*. È l'avere uno scopo nell'operare che fa la differenza.

Vista l'importanza del tema, in questo contesto è cruciale guidare gli studenti a far evolvere il loro modo di pensare un oggetto matematico, passando dall'approccio procedurale a quello *relazionale*. In sostanza, si tratta di immaginare l'oggetto non solo come risultato di un processo di calcolo o di una costruzione, ma anche come ente che esiste realmente e ha precise relazioni con altri oggetti matematici. Se ne discute in [Kieran, 2004] e ne parleremo, ad esempio, a proposito della nozione di soluzione di un'equazione.

Una seconda attenzione fondamentale è curare il *passaggio* dall'aritmetica all'algebra: infatti, come è chiarito in [Villani, 2003, sezione 21], non è vero che si opera in algebra come si opera in aritmetica; anzi, questo assunto è causa di difficoltà per gli studenti e di numerosi errori nel calcolo. Ne terremo conto in diversi contesti e lo approfondiremo in quello delle frazioni algebriche.

E la geometria? Come evidenzia lo studio [ICMI, 1998, pag. 338], la geometria che si fa a scuola non dovrebbe ridursi al dimostrare, ma dovrebbe promuovere lo sviluppo di ulteriori abilità, quali *visualizzare* e *interpretare* figure:

> *[…] La geometria comprende tanti aspetti, che è impossibile (e forse anche inutile) stilarne una lista completa […]. Geometria come Scienza dello Spazio […]. Geometria come metodo per le rappresentazioni visive di concetti e processi attinenti ad altre aree della matematica […]. Geometria come Modo di pensare e di comprendere […]. Geometria*

come esempio paradigmatico per insegnare il ragionamento deduttivo […].

Dimostrare resta comunque importante e si dovrà favorire il passaggio dall'approccio intuitivo, tipico della scuola secondaria di primo grado, a quello razionale, che costituisce il punto di arrivo delle attività al liceo.

Non è tutto. Riteniamo che l'approccio *sintetico* vada integrato con quello *analitico*, già a partire dagli aspetti di base relativi al piano cartesiano. Nei manuali, invece, i due punti di vista sono spesso presentati separatamente e si distinguono nettamente i quesiti da risolvere per via analitica da quelli per via sintetica.

Tutte queste considerazioni, dall'algebra alla geometria, valgono anche per la classe seconda.

Al secondo anno la nostra idea è di esaminare le funzioni e i grafici e *utilizzarli* davvero. Ciò significa non limitarsi a dare definizioni e ad attribuire nomi, ma *modellizzare* varie situazioni mediante questi strumenti e impiegarli per *interpretare* equazioni e disequazioni, anche irrazionali o con moduli. Del resto tale approccio alle equazioni è suggerito nell'autorevole documento [UMI, 2003, pag. 203] e compare nelle Indicazioni nazionali.

Ma vuol dire anche stabilire e saper giustificare se sono vere alcune implicazioni del tipo: *se un numero è minore di un altro, allora vale la stessa disuguaglianza anche per i loro quadrati?*

La probabilità è uno dei nuovi temi previsti dalla normativa, fin dalla scuola primaria. Noi ci proponiamo di *metterla in gioco*, sia nel senso di effettuare alcuni giochi che dipendono dal caso e di esaminarli razionalmente, sia nel senso di sfruttare le opportunità didattiche che il tema offre. Ad esempio, impiegare *più registri* di rappresentazione (attività costitutiva del fare matematica, come è illustrato in [Duval, 2006]), curare aspetti rilevanti della *logica (*quali l'uso dei connettivi *e, o)*, nonché prendere decisioni.

Prodi sosteneva che quello della probabilità è un punto di vista necessario per comprendere il mondo ed è diverso da quello offerto da altri settori della matematica ([Prodi et al., 2003, pag. 8]):

Oggi non è possibile leggere e interpretare criticamente la realtà […] prescindendo da considerazioni probabilistiche e statistiche.
Poiché la scuola […] è chiamata ad educare a pensare non può esimersi dal rendere familiare all'allievo un tipo di mentalità che ha caratteristiche peculiari, diverse da […] altre parti della matematica.

In geometria si tratta di arricchire e affinare gli strumenti a disposizione. In particolare, intendiamo affrontare la retta nel piano cartesiano, con un percorso fondato sul concetto di *pendenza,* e la trigonometria del *triangolo rettangolo*, prevista dalle Indicazioni nazionali e utile anche per la fisica.

Restano da consolidare e potenziare le abilità algebriche, e ciò dovrebbe avvenire a più riprese nell'*arco* dell'intero *biennio,* come è motivato in [Prodi e Villani, 1982]:

> *[…] non conviene proporsi di sviluppare tutto il calcolo letterale all'inizio della scuola secondaria superiore, quando sono ancora scarse le motivazioni e le applicazioni. È opportuno sviluppare man mano l'abilità nel calcolo e continuare ad inframmezzare esercizi di vario tipo, in modo che sia sempre preminente la strategia rispetto alla manualità e al piccolo artificio.*

Un'ultima osservazione, prima di proseguire ed entrare nel dettaglio del percorso. Ad una prima lettura, può sembrare che si riservi poca attenzione agli aspetti di base degli insiemi e della logica.

Non è così. Semmai la differenza con l'approccio tradizionale è che non ci sembra efficace proporre un modulo didattico specifico su di essi, ma preferiamo discutere alcune questioni quando il *contesto* lo richiede, e arricchire così nel corso dell'*intero* biennio gli strumenti a disposizione degli studenti. Lo sostiene anche Bernardi in [Villani et al., 2012, pag. 4].

Ad esempio, l'appartenenza e l'inclusione possono essere discusse quando si introduce l'insieme delle soluzioni di un'equazione, mentre la negazione di un'affermazione si può approfondire nel contesto del calcolo della probabilità dell'evento complementare. Anche il controesempio dovrebbe diventare presto uno strumento di cui lo studente dispone per stabilire che un enunciato non è vero.

Inoltre, quando si approfondisce l'attività del dimostrare, si può accennare al metodo ipotetico – deduttivo: come vedremo, non servono molte considerazioni astratte, ma si può semplicemente partire da un gioco. Prima ancora, però, è fondamentale che gli studenti avvertano e comprendano la *necessità* della dimostrazione, sia in aritmetica o in algebra che in geometria. Altrimenti quanto fanno a scuola rimane solo un bell'esercizio, che non si radica sulle conoscenze di cui dispongono e sulla loro esperienza e perciò viene presto dimenticato.

2.2 Un percorso per la classe prima

2.2.1 Dal contare ai numeri razionali e all'uso delle lettere

Per iniziare: contare gli elementi di un insieme

È ragionevole cominciare il percorso dai numeri naturali e ci sembra opportuno farlo *utilizzando effettivamente* tali numeri per risolvere semplici problemi, piuttosto che discutere proprietà astratte che i ragazzi potrebbero non apprezzare. Per questo proponiamo di contare il numero di sequenze di elementi che appartengono ad un insieme finito. In sostanza si tratta di disposizioni e permutazioni, con qualche cenno alle combinazioni, ma non intendiamo fornire troppo presto nomi e formule generali: è molto più formativo (ri)*costruire* volta per volta uno schema di calcolo opportuno.

Un esempio è offerto dal codice IATA per gli aeroporti:

quante sono le sigle costituite da tre lettere?

Come abbiamo osservato in generale nel capitolo precedente, è bene lasciare che gli studenti "mettano le mani" sul problema, lo schematizzino, formulino delle congetture, le giustifichino e le discutano in piccoli gruppi; solo in un secondo momento sistemano il procedimento con la guida del docente.

Semmai può essere utile fornire alcune indicazioni, ma sempre dopo aver permesso loro di provare e confrontarsi. Si può suggerire di esaminare prima casi più semplici: sigle di due lettere, ciascuna scelta tra tre o quattro; i ragazzi modellizzano la questione come preferiscono, magari semplicemente mediante elenchi. Quando ciascuna lettera si può scegliere tra 26, con le stesse attenzioni, si può indicare di ricorrere ad un diagramma ad albero: così, per ogni ramo relativo alla prima lettera, ci sono 26 rami per la seconda e, per ogni ramo relativo alla seconda, ci sono 26 rami per la terza. Pertanto si conclude che il numero totale di sequenze è dato dal *prodotto* $26 \cdot 26 \cdot 26$.

Più avanti conviene utilizzare schemi grafici "contratti", che sono forse meno espressivi ma permettono di rispondere più rapidamente; ad esempio, ogni sigla IATA si può rappresentare mediante 3 caselle, in ciascuna delle quali si inserisce una lettera.

I problemi sul contare fanno emergere vari aspetti legati ai numeri, come l'uso delle potenze e la riduzione di frazioni ai minimi termini. In realtà il nostro obiettivo è ancora più ampio: far sperimentare fin da subito agli studenti cosa vuol dire *fare matematica* nella scuola secondaria di secondo grado. Ossia rappresentare una situazione mediante più registri, giustificare le proprie affermazioni, argomentare, interpretare semplici testi, effettuare stime elementari, sondare la validità di un enunciato, utilizzare le lettere per generalizzare e per dimostrare semplici uguaglianze…

I materiali relativi a questo segmento del percorso sono mostrati nel paragrafo 3.2. Si tratta dei **fogli di attività 1, 2, 3** e **4**, e della **dispensa *Contare gli elementi di un insieme***, che riporta una possibile formalizzazione per lo studente del primo biennio. Significativo è anche il **video**[4], realizzato con il Laboratorio DiCoMat del Dipartimento di matematica dell'università di Trento, che illustra la risoluzione di un semplice problema di conteggio mediante schemi grafici.

Numeri naturali, interi, razionali

Dopo aver affrontato attività così ricche, ci sembra opportuno concentrare l'attenzione sugli aspetti di calcolo aritmetico e sui concetti fondamentali sottesi, in modo da non appesantire troppo il lavoro degli studenti, che si possono così occupare di questioni più applicative e, almeno in parte, già note dalla scuola secondaria di primo grado.

In quest'ambito è significativo discutere la portata storica di alcuni momenti dello sviluppo del pensiero matematico, come l'introduzione della notazione posizionale. La divisione intera si può esaminare tranquillamente più avanti, quando si affronta la divisione di polinomi, anche se i libri di testo la propongono nel capitolo dei numeri. Analogamente, le definizioni di multiplo e di minimo comune multiplo si possono apprezzare quando si impiegano *davvero,* ad esempio nella dimostrazione di proprietà aritmetiche, come il criterio di divisibilità per 9.

Piuttosto preferiamo mostrare subito come la proprietà distributiva della moltiplicazione rivesta un ruolo centrale per il *calcolo mentale* (ad esempio, per effettuare calcoli del tipo $101 \cdot 28 = (100 + 1) \cdot 28 = 100 \cdot 28 + 1 \cdot 28$) e fornisca una valida motivazione della precedenza della moltiplicazione rispetto all'addizione nell'ordine di svolgimento delle operazioni (così non serve introdurre parentesi nell'ultimo passaggio dell'esempio precedente e, più in generale, nella scrittura dei polinomi). Inoltre è importante precisare la definizione di numero primo, enunciare il teorema fondamentale dell'aritmetica ed evidenziarne il significato, ma anche citare alcune congetture, come quella di Goldbach o dei primi gemelli, per mostrare come in matematica ci siano diversi problemi aperti e non solo sistemazioni definitive.

Proseguendo, l'ampliamento dei numeri naturali ai numeri interi si

---

[4] http://laureescientifiche.science.unitn.it/simulazione_risorse/quesito-25.html. Il video, come gli altri analoghi prodotti con il Laboratorio DiCoMat, è accompagnato da una risoluzione scritta e da alcuni approfondimenti per lo studente.

può motivare con esigenze sia pratiche, la misura di alcune grandezze, sia teoriche, la chiusura dell'operazione di sottrazione; in altri termini, nell'insieme dei numeri interi esistono gli elementi inversi rispetto all'operazione di addizione.

Già in questo contesto si può mostrare che il segno del prodotto di due numeri interi è determinato dalla *decisione* di mantenere valida la proprietà distributiva della moltiplicazione. È un'occasione per chiarire che le definizioni in matematica non sono stabilite arbitrariamente, ma sono conseguenza di precise scelte.

I numeri razionali si possono introdurre come frazioni e i ragazzi devono aver chiaro che un numero razionale si può rappresentare come frazione in più modi. È significativo investigare la definizione di somma di frazioni e mostrare che non può valere

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

poiché, ad esempio, nel caso $a = b = c = d = 1$ è falsa[5]. Inoltre è utile interpretare il prodotto tra due frazioni come *area* di un opportuno rettangolo ([Villani, 2003, pag. 45]), in modo da costruire un significato geometrico della moltiplicazione e disporre di uno strumento di controllo.

Su queste basi i ragazzi dovrebbero saper manipolare più consapevolmente espressioni con le frazioni, come quelle proposte nella prima parte del **foglio di attività 5**. Naturalmente sono utili anche quelle che si trovano nei libri di testo, purché siano semplici e significative, cioè facciano emergere le tipiche difficoltà nel calcolo.

Non è tutto. Nel foglio proponiamo anche di interpretare alcuni calcoli aritmetici con uno “sguardo” algebrico, ossia di svolgerli in modo più efficace sfruttando le proprietà delle operazioni, in particolare la proprietà distributiva della moltiplicazione. Si tratta di un passo importante verso l'algebra, visto che si utilizzano le stesse proprietà che sono necessarie per operare con le lettere.

Fino a questa fase del percorso, come si noterà, abbiamo accennato alla nozione di potenza, ma non l'abbiamo ancora approfondita. La nostra idea è rappresentare le potenze mediante la *tabella* che fa corrispondere alla somma di due elementi della riga inferiore il prodotto delle loro immagini sulla riga superiore, come mostriamo nella **dispensa *Potenze ad esponente naturale***. In realtà, tale regola di spostamento non è altro che la proprietà fondamentale delle potenze, già nota

[5] Ci sono comunque motivazioni più profonde, come osservato in [Villani, 2003, pag. 45].

agli studenti dalla scuola secondaria di primo grado e che nella classe terza indicheremo come la proprietà che *caratterizza* la funzione esponenziale. L'approccio è efficace per la sua immediatezza e consente di interpretare l'estensione delle potenze agli esponenti negativi e all'esponente nullo come estensione della tabella, a sinistra. E nel secondo biennio verrà ripreso per descrivere la funzione esponenziale.

Gli aspetti esaminati fino qui, dal contare gli elementi di un insieme ai numeri, consentono di costruire una verifica significativa. Un esempio è **verifica 1**, che mostreremo nel paragrafo 3.1 assieme a tutte le prove a cui facciamo riferimento in questo capitolo.

Rappresentare in più modi i numeri razionali. Introdurre le lettere: un altro passo verso l'algebra

I numeri razionali si possono rappresentare anche nella forma di allineamenti decimali. Ciò consente di introdurre i numeri irrazionali come allineamenti decimali infiniti e non periodici e dunque di fornire una prima idea di numero reale. L'approccio presenta alcuni inconvenienti dal punto di vista formale, ma nella scuola secondaria è opportuno limitarsi a questo, come si chiarisce in [Villani, 2003, pag. 72 e seguenti].

Piuttosto si può investire del tempo per passare da una forma di rappresentazione all'altra ed effettuare semplici stime, così da aiutare gli studenti a formarsi un'idea di quanto "grande" sia un dato numero, come proponiamo nel **foglio di attività 6**.

Una rappresentazione particolarmente efficace è la notazione scientifica. I ragazzi possono impiegarla in contesti reali, ad esempio per esprimere il debito pubblico pro capite in Italia e grandezze astronomiche, oppure in calcoli come quelli richiesti nel foglio di attività.

Per completare il quadro mancano le percentuali, che meritano un'attenzione speciale poiché intervengono in molti contesti, dalle discipline scientifiche agli organi di informazione.

Possiamo distinguere tre questioni di base: determinare una data percentuale di una certa quantità, esprimere in percentuale il rapporto tra due quantità, determinare la variazione percentuale. Inoltre è opportuno passare dal modello additivo a quello *moltiplicativo*, ossia interpretare l'aumento del 10% come moltiplicazione per 1,1. Ancora più importante è precisare la nozione di percentuale, in modo che gli studenti arrivino a formarsene dei significati concreti.

La **dispensa *Percentuali: questioni di base*** mostra come si possono realizzare i nostri propositi; tuttavia, lo abbiamo già osservato in generale nell'Introduzione del volume, questo tipo di materiale costituisce solo il passo finale di un percorso che inizia con la presentazione di un problema aperto e prosegue con il confronto tra gli studenti, la formulazione di più proposte di risoluzione e la loro discussione.

Ad esempio, la seconda questione che compare nella dispensa si può introdurre chiedendo in quale delle due province indicate sono coinvolti più giovani in incidenti stradali. Le risposte sono diverse a seconda che si consideri il numero di giovani oppure la loro percentuale rispetto al totale… ma vogliamo che siano i ragazzi ad osservarlo.

Questa dispensa, insieme a tutti i materiali che abbiamo realizzato sulle percentuali, è mostrata nel paragrafo 3.3.

Gli strumenti così sviluppati permettono di affrontare questioni più articolate, come quelle raccolte nel **foglio di attività 7**: desumere percentuali da grafici e tabelle, ma anche analizzare la crescita di un capitale oppure la decrescita della concentrazione di un medicinale nel sangue. L'importanza di questi esercizi e problemi va ben oltre gli aspetti aritmetici: infatti richiedono di ricorrere *alle lettere*, ad esempio per generalizzare. Del resto, proprio l'uso delle lettere *prima* del calcolo algebrico è raccomandato dalla commissione nominata dalla CIIM, come si legge nel documento [UMI, 2014].

Il **foglio di attività 8** intende invece sviluppare abilità altrettanto importanti: interpretare testi tratti da quotidiani o periodici e investigare la correttezza di affermazioni espresse mediante percentuali.

Il lavoro si può completare con il confronto tra l'andamento di un capitale nel regime di capitalizzazione semplice e in quello di capitalizzazione composta, riprendendo quanto è già stato discusso sulle crescite nel contesto delle percentuali iterate.

Meglio se si ricorre ad un foglio di calcolo. In primo luogo, poiché l'applicazione *richiede* di utilizzare le lettere e dunque induce a compiere un ulteriore passo verso l'algebra come modellizzazione. In secondo luogo, poiché esige di curare la formalizzazione: produrre una sintassi corretta non è più una richiesta del docente, della quale magari non si comprende il motivo, ma diventa una *necessità* concreta per comunicare con lo strumento. I riferimenti sono l'**Attività *Crescite di capitali*** e il file **Capitalizzazione.xlsx**. Come nelle altre attività, gli studenti dovrebbero confrontarsi tra di loro, discutere il procedimento risolutivo e le proprie congetture, e poi sistemarle con la guida del docente.

2.2.2 Anticipare le equazioni, polinomi

Anticipare le equazioni: un approccio informale

Il contesto delle percentuali offre forti motivazioni all'introduzione delle equazioni. Ad esempio, il problema di scorporare l'IVA si può modellizzare mediante un'equazione della forma $ax = b$.

Perché *anticipare* le equazioni e modificare un ordine ormai tradizionalmente consolidato, seguito da quasi tutti i libri di testo? Le ragioni sono di varia natura. Innanzitutto tali strumenti matematici intervengono significativamente nelle discipline scientifiche: descrivere semplici situazioni fisiche mediante equazioni e manipolare formule sono attività richieste già nel periodo iniziale della classe prima. Inoltre il tema non richiede molti prerequisiti e certamente non è necessario aver già affrontato i capitoli che spesso lo precedono nei libri di testo, ossia la fattorizzazione di polinomi e le frazioni algebriche. Ma la ragione principale è che le equazioni permettono di *fare algebra* in modo didatticamente significativo e, speriamo, motivante per gli studenti.

Si tratta poi di decidere quale approccio seguire. È meglio che lo studente prima padroneggi le tecniche risolutive e solo in seguito le applichi ai problemi oppure che sia messo subito in *situazione*, esplori la questione contando sugli strumenti di cui già dispone e gradualmente avverta la necessità di svilupparne di nuovi?

Noi propendiamo per la seconda modalità e per questo proponiamo il **foglio di attività 9**, in cui la nozione di percentuale diventa il collante di varie situazioni che spaziano dagli sconti all'inflazione, alla concentrazione chimica, all'IRPEF. Tutte modellizzabili mediante equazioni della forma $ax + b = c$, che gli studenti possono risolvere anche in modo informale, ricorrendo alle operazioni inverse.

Nei primi problemi i ragazzi dovrebbero effettuare alcuni *tentativi*, ossia ipotizzare la soluzione del quesito e verificarla seguendo le richieste del testo, magari con l'aiuto di un foglio di calcolo. In ogni caso dovrebbero presto rendersi conto che in questo modo non sempre si riesce a determinare la soluzione.

Poi possono provare a schematizzare il problema con un *disegno*, come è mostrato nell'**attività *Modellizzare con equazioni***. Tuttavia, realizzare una rappresentazione efficace non è semplice in ogni situazione e può richiedere molto tempo.

Perciò, in generale, conviene ricorrere alle equazioni: si suppone di aver trovato la soluzione, la si indica con una lettera e si scrive un'uguaglianza che la leghi ai dati. È bene che gli studenti abbiano chiara la differenza tra questo approccio e quello aritmetico, che consiste, all'inverso, nel partire direttamente dai dati e nell'operare su di essi per arrivare a determinare i valori incogniti. Il passaggio tra i due punti di vista è delicato e va curato con attenzione, come indica la ricerca in didattica della matematica ed è ampiamente illustrato in [Mariotti et al., 2003].

Un esempio di verifica su questi ultimi argomenti è **verifica 2**.

Il punto sulle equazioni e il linguaggio degli insiemi

Finora abbiamo considerato equazioni della forma $ax + b = c$ e le abbiamo risolte ricorrendo a operazioni inverse o attingendo alle conoscenze pregresse degli studenti. Ci sono però situazioni in cui intervengono equazioni più articolate e pertanto è necessario esaminare più a fondo questi oggetti matematici.

Per iniziare, investighiamo la nozione di soluzione e proponiamo di verificare, per *sostituzione*, se certi numeri sono soluzione di un'equazione, oppure di determinare, per *tentativi,* le soluzioni di equazioni di vario tipo, anche esponenziali, irrazionali o in due incognite (**foglio di attività 10**). I ragazzi non conoscono ancora le tecniche per risolverle; ma questo non è un limite, anzi, permette loro di sperimentare che la soluzione è un numero che rende vera un'uguaglianza e non è solo il risultato di un processo di calcolo.

Il passo successivo è formalizzare l'esplorazione, introducendo, in particolare, l'*insieme* delle soluzioni. Il contesto offre l'occasione di precisare alcuni aspetti di base del linguaggio degli insiemi: come si rappresentano, il significato di appartenenza e di inclusione e i simboli per denotarli… Ossia quanto serve *ora*, nell'ambito delle equazioni, per comunicare in modo *univoco* e *conciso.* Possiamo così sperare che gli studenti si mettano in gioco, poiché comprendono – e sperimentano – che il formalismo matematico è un'*esigenza* e non un'inutile complicazione imposta da altri.

L'esame della tecnica risolutiva vera e propria può attendere ancora. Prima è importante indagare su come si può manipolare un'equazione allo scopo di ottenerne un'altra che abbia insieme delle soluzioni uguale. Naturalmente stiamo parlando dei principi di equivalenza delle equazioni, che in realtà sono una diretta conseguenza delle proprietà delle operazioni sui *numeri* reali.

Essi si possono rappresentare in modo espressivo mediante l'analogia della bilancia, come mostra un **video**[6] sul canale Youtube della prof.ssa Robutti. Tra l'altro, il filmato illustra come realizzare un *modello fisico* del problema: è un tipo di attività importante, sul quale fondare il concetto di equazione, e dovrebbe essere svolto già nella scuola secondaria di primo grado.

E se invece si moltiplicano per zero entrambi i membri di un'equazione oppure li si eleva al quadrato, cambia qualcosa? Sono domande significative che forniscono l'occasione per costruire *controesempi* allo scopo di negare la verità di un'affermazione. Certo l'attività richiede di investire tempo e risorse, ma è fondamentale se si vuole che gli studenti operino in modo consapevole, dispongano a lungo di quanto hanno appreso e diventino sempre più autonomi.

---

[6] https://www.youtube.com/watch?v=-qTLe004Y-U

A questo punto i ragazzi dovrebbero apprezzare la tecnica risolutiva delle equazioni di primo grado. L'importante è che sappiano giustificare mediante i principi di equivalenza le manipolazioni che effettuano sull'equazione; ad esempio, devono sapere che "cancellare" i termini uguali nei due membri è una conseguenza del principio di addizione: si tratta di sottrarre una stessa espressione ad entrambi.

Per proseguire serve il calcolo letterale… ma non troppo

Per risolvere equazioni più articolate è opportuno che gli studenti sappiano operare consapevolmente e con sicurezza con i polinomi. Almeno un po', come chiariremo.

Prima però preferiamo precisare l'importanza delle lettere in matematica. Abbiamo già visto come siano utili per esprimere proprietà *generali* oppure per *modellizzare* situazioni di varia natura; ora si può mostrare come siano estremamente efficaci anche per *descrivere* procedimenti. Un esempio è la lettura dal *Trattato d'abaco* in cui Piero della Francesca illustra la risoluzione dell'equazione di secondo grado[7]: il linguaggio naturale e l'algebra retorica sono meno efficaci dell'algebra simbolica. Il documento prova inoltre che la matematica è parte integrante della cultura e del suo sviluppo e ci ricorda che in classe il calcolo letterale va introdotto con gradualità, come è avvenuto storicamente.

Si può tranquillamente evitare di introdurre il termine *monomio* e non serve esaminare le operazioni relative ai monomi; del resto, il nome non compare nelle Indicazioni nazionali e abbiamo già operato su oggetti matematici che hanno una forma analoga: i numeri espressi in notazione scientifica. Invece le operazioni relative ai polinomi vanno investigate a fondo, evidenziando il ruolo centrale della *proprietà distributiva* della moltiplicazione rispetto all'addizione.

E i prodotti notevoli? A nostro avviso ne bastano due: la somma per differenza e il quadrato di binomio; gli altri che compaiono nei libri di testo non ci sembrano così importanti. È meglio lavorare in modo che lo studente non si blocchi di fronte alla richiesta di sviluppare un'espressione come $(a + b + c)^2$: non dovrebbe pensare di ricorrere ad una lista di formule, ma svolgere il prodotto $(a + b + c)(a + b + c)$ mediante la proprietà distributiva.

In quest'ottica, di norma è sufficiente considerare polinomi in una

[7] Il testo si può trovare sul sito del prof V. Montebelli, a pag. 38 del documento http://www.dm.unibo.it/~gimiglia/Montebelli%20-%20Alle%20origini%20della%20matematica%20applicata_le%20scuole%20d%27abaco.pdf

sola variabile, poiché sono quelli che prevalentemente si utilizzano nella matematica prevista per il liceo.

Fare algebra: modellizzare e manipolare in vista di un obiettivo

Ora gli studenti dovrebbero riuscire a risolvere consapevolmente equazioni di primo grado, anche a coefficienti frazionari. Infatti, avendo acquisito sicurezza nel manipolare espressioni con polinomi, possono curare altri aspetti, come pianificare il procedimento e giustificarlo a partire dai principi di equivalenza.

Inoltre possono affrontare semplici problemi fissando l'attenzione sulla comprensione del testo e sulla costruzione dell'equazione che modellizza la situazione.

Come abbiamo osservato nell'ambito delle percentuali, in una prima fase è importante procedere per gradi e produrre anche *schemi* grafici. Per costruire l'equazione, può essere utile organizzare in una tabella le richieste, le condizioni sui dati e sulle incognite nonché le uguaglianze che legano dati e incognite. In sostanza, si tratta di passare attraverso più forme di rappresentazione: dal linguaggio naturale fino ai simboli.

Questi diversi aspetti intervengono nell'**attività *Modellizzare con equazioni*** e nei problemi proposti nel **foglio di attività 11**. La **dispensa *Risoluzione del foglio 11*** è un rassicurante supporto per l'attività individuale a casa e offre l'occasione di *imparare cose nuove* da un testo a partire da ciò che si *sa*.

Fare algebra a scuola significa anche *manipolare* un'espressione in vista di un *obiettivo.*

Un'importante attività di questo tipo è, in una formula, esprimere una variabile in funzione delle altre. Ed è collegata all'abilità di dire e giustificare come cambia una variabile, ad esempio, al raddoppiare di un'altra; si tratta di una questione trasversale a diverse discipline e va discussa nell'arco dell'intero quinquennio, in modo che lo studente non riduca le formule a processi di calcolo. A tali questioni è dedicato il **foglio di attività 12**.

Approfondimento. Magari più avanti nel percorso, si può implementare mediante un foglio di calcolo la risoluzione della generica equazione di primo grado $ax = b$. L'**attività** è realizzata nel file **RisoluzioneEquazione-1grado.xlsx** e consente di evidenziare il fatto che, se uno dei coefficienti è nullo, la soluzione può non esistere o non essere unica; l'aspetto interessante è che la richiesta di distinguere i casi proviene dal *software*, non dal docente; inoltre è un primo elementare esempio di algoritmo.

Un esempio di verifica sulle equazioni è verifica 3, che riguarda sia la modellizzazione che la manipolazione algebrica.

Sull'algebra torneremo nei prossimi paragrafi. A conclusione di questa sezione, vogliamo però proporre alcune considerazioni di carattere generale sul tema.

Le scelte che abbiamo discusso in questo paragrafo rispondono a quanto scrivono le Indicazioni nazionali, rispettivamente nelle Linee generali e negli Obiettivi specifici di apprendimento per la Matematica:

L'indicazione principale è: pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità.
[…] L'acquisizione di capacità calcolistica non comporterà tecnicismi eccessivi.

Prodi e Villani vanno oltre tali considerazioni e in [Prodi e Villani, 1982] precisano:

È scarsamente formativo fare eseguire "in serie" grandi quantità di esercizi basati su schemi prefissati e catalogati.
[…] proporre esercizi non troppo complicati, ma in un contesto da cui emergano le finalità delle manipolazioni.

Naturalmente è importante che gli studenti sviluppino anche una certa abilità nel calcolo ed è quindi opportuno assegnare esercizi di consolidamento, pur con le attenzioni didattiche che abbiamo indicato.

Inoltre, nel curare il passaggio dall'aritmetica all'algebra, va tenuto presente che *non* si opera in algebra come si opera in aritmetica. Anzi, questo assunto è, secondo la ricerca, fonte di numerosi errori. Ad esempio, se in aritmetica il risultato di un calcolo è un numero, in algebra spesso non è un'unica lettera; perciò lo studente che non ha chiara questa distinzione può essere tentato di ridurre ogni espressione ad una sola lettera e scrivere $\frac{a+2}{2} = a$, come spiega Villani in [Villani, 2003, pag. 123].

2.2.3 Primi passi nell'approccio razionale alla geometria

Quale geometria proporre nella classe prima? L'obiettivo principale è passare dall'approccio intuitivo, proprio della scuola secondaria di primo grado, all'approccio *razionale*. Ma ci sono anche altri aspetti da considerare, quali interpretare figure geometriche e visualizzare, come abbiamo visto nel paragrafo 2.1.

Il primo passo: approfondiamo cosa significa dimostrare

Dimostrare è un'attività costitutiva del fare matematica. Come afferma G. Lolli in [Lolli, pag. 11]:

> *Non si deve imparare (e insegnare) la matematica, ma a fare matematica, e non si fa matematica senza produrre teoremi.*

Per iniziare, si possono discutere alcune dimostrazioni formative, come il criterio di divisibilità per 9 e la somma degli angoli interni di un poligono, nota la somma degli angoli di un triangolo. Meglio se sono gli stessi studenti a congetturare l'enunciato, come è chiarito in [Boero, Garuti, Mariotti, 1996].

È importante produrre dimostrazioni anche in ambito algebrico e aritmetico, e lo si può fare già nelle fasi precedenti del percorso, poiché sembra che i ragazzi operino con più facilità in tali contesti ([Pedemonte, 2008]). La raccomandazione compare anche negli Obiettivi specifici di apprendimento delle Indicazioni nazionali:

> *Lo studente acquisirà la capacità di eseguire calcoli con le espressioni letterali […] per dimostrare risultati generali, in particolare in aritmetica.*

Nella discussione si cercherà di far emergere le tipiche difficoltà degli studenti.

Cosa è dato? Ossia quali sono le ipotesi, ma anche quali risultati si possono utilizzare?

Cosa si richiede di dimostrare?

Gli esempi costituiscono una dimostrazione? In altre parole, per stabilire la validità di un'affermazione, basta verificarla in casi specifici? Naturalmente gli esempi restano comunque utili, almeno per prendere confidenza con il problema.

Quando una dimostrazione è completa? Il garante non può essere solo il docente o il libro di testo.

Un passo ulteriore è porre la questione in forma aperta, ossia richiedere di sondare la verità di un'affermazione e poi, a seconda dell'esito, di dimostrarla oppure negarla mediante opportuni *controesempi.*

Non solo. È formativo esaminare e produrre giustificazioni grafiche: esse prevedono di decodificare una figura e per questo sono chiamate *dimostrazioni senza parole* da Bernardi in [Villani et al, 2012, pag. 63]. Attenzione però: la figura non è una dimostrazione; per quanto espressiva, è necessario interpretarla ed esplicitare il ragionamento sotteso.

Ma si può imparare anche dalla lettura di dimostrazioni *non corrette*, analizzando i vari passi e individuando gli errori.

Esempi di queste varie tipologie sono proposti nei **fogli di attività 13** e **14**.

Dopo questi stimoli, ha senso fare il punto della situazione e rivolgere uno sguardo più generale alle catene deduttive, come richiedono le Indicazioni nazionali negli Obiettivi specifici di apprendimento per la geometria del primo biennio:

Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di [...] assioma, definizione, teorema, dimostrazione.

Si può farlo in modo efficace e divertente mediante l'**attività *Il gioco MU***, che si basa su un gioco proposto in [Hofstadter, 1990]. L'idea è di considerare un insieme di lettere, una sequenza iniziale di lettere scelte tra esse e alcune regole per generare nuove sequenze; utilizzando tali regole, si vuole ricavare una sequenza prefissata a partire da quella iniziale. Il legame con la teoria assiomatica è presto chiarito: tali oggetti rappresentano rispettivamente gli enti primitivi, gli assiomi e un teorema con dimostrazione; a questi vanno aggiunte le regole della logica.

Dopo aver discusso questo semplice *esempio* di teoria assiomatica, si può accennare al caso speciale della geometria euclidea, indicando chi sono gli enti primitivi e fornendo qualche esempio di assioma. A tale proposito, è formativo esaminare le "definizioni" di punto, retta e piano che propongono i dizionari: esse rimandano ad altre "definizioni" e inevitabilmente generano circoli viziosi, visto che i vocaboli sono in numero finito. Pertanto, se si vuole ottenere una trattazione rigorosa, è necessario fissare dei termini da cui partire, dei quali non si fornisce una definizione esplicita.

Gli elementi di base

Chiarite le regole del gioco, si tratta di precisare alcuni elementi geometrici di base. È una questione delicata a cui i libri di testo solitamente riservano molte pagine. Noi riteniamo invece che in questa fase si possano considerare *pochi* oggetti matematici.

In primo luogo, poiché non serve attribuire un nome a ciò che si utilizza poche volte; e comunque è opportuno farlo solo quando lo si impiega davvero. In secondo luogo, poiché *non* è necessario definire "tutto": i ragazzi si sono già formati un'idea degli elementi geometrici nei loro studi precedenti e non sono ancora in grado di apprezzare il rigore di alcune definizioni. Del resto alcune nozioni sono molto articolate e a volte i manuali, nel tentativo di semplificarle, propongono formalizzazioni non corrette; un esempio emblematico è la definizione di angolo, come è illustrato in [Villani, 2006, pag. 133].

Pertanto in molti casi conviene fare riferimento all'*intuizione* e a opportune *figure*, e piuttosto precisare qualche aspetto specifico quando la comunicazione diventa ambigua.

In definitiva, quali oggetti geometrici si dovrebbero considerare in questa prima fase? E in che modo? Come proponiamo nella **dispensa *Elementi geometrici di base***, secondo noi bastano, oltre a punto, retta e piano: segmento, angolo, triangolo nonché mediana, bisettrice, altezza di un triangolo e asse di un segmento. È sufficiente definire gli ultimi quattro, ma con l'attenzione di investire del tempo per disegnarli nello stesso triangolo e anche in diversi tipi di triangolo; non possiamo accontentarci che gli studenti sappiano ripetere una definizione, solo perchè imparata a memoria.

Si entra nel vivo: l'uguaglianza dei triangoli

L'uguaglianza dei triangoli offre un buon contesto in cui realizzare semplici *catene deduttive*, o *isole deduttive*, come le chiama Villani alla luce del fatto che a scuola non si può dimostrare "tutto".

Il punto di partenza è costituito dai criteri di uguaglianza, che conviene assumere come *assiomi,* in accordo con lo stesso autore ([Villani, 2006, pag. 76]). Infatti, è vero che nella sistemazione di Hilbert del 1899 solo il primo è un assioma, ma la dimostrazione degli altri due difficilmente può essere apprezzata dallo studente della classe prima.

Prima di formalizzarli preferiamo però esplorare alcune caratteristiche dei triangoli e dei quadrilateri. L'**attività** è ***Triangoli e quadrilateri alla prova*** e si ispira ai lavori della Castelnuovo, in particolare a [Castelnuovo, 2017, pag. 89]. Osservare immagini e *manipolare* figure realizzate con il Meccano dovrebbe permettere agli studenti di rendersi conto che il triangolo di lati fissati è indeformabile, mentre il quadrilatero non lo è. Ma per quale ragione? Il criterio di uguaglianza che spesso si indica con LLL permette di rispondere a questa e ad altre domande.

Poi si può svolgere un'indagine più teorica e investigare se esistono altri criteri di uguaglianza per i triangoli, oltre ai tre che sono stati stabiliti. Ad esempio, bastano tre angoli uguali oppure due lati e un angolo qualsiasi uguali per concludere che due triangoli sono uguali? Naturalmente gli studenti dovranno produrre opportuni controesempi (**dispensa *Triangoli uguali***).

Nei libri di testo si trovano diversi problemi che richiedono di produrre semplici catene deduttive mediante i criteri di uguaglianza. È un'ottima occasione per curare la coerenza logica, l'esposizione e l'uso del formalismo nei suoi aspetti essenziali. E, prima ancora, per sviluppare l'abilità di interpretare figure geometriche, individuando nel disegno opportuni triangoli a partire dai quali dedurre la tesi. Tuttavia tali esempi vanno scelti con attenzione poiché gli enunciati potrebbero riguardare proprietà che lo studente percepisce come ovvie o troppo astratte. Per tale ragione non riteniamo opportuno dimostrare che gli angoli alla base del triangolo isoscele sono uguali; almeno non in questa fase del percorso.

E per tale ragione, come suggeriscono le Indicazioni nazionali, si dovrebbe effettuare qualche *costruzione geometrica* con riga e compasso; ad esempio, l'asse di un segmento e la bisettrice di un angolo. Meglio se prima si ricorre ad una corda, come proponiamo nell'**attività** ***Prime costruzioni geometriche***. La realizzazione sarà accompagnata dalla descrizione nel linguaggio naturale e dalla giustificazione rigorosa del procedimento, fondata sui criteri di uguaglianza dei triangoli: è un'ulteriore occasione per discutere la necessità della dimostrazione.

Infine è opportuno accennare al significato e al ruolo che rivestivano le costruzioni geometriche per i greci e ai tre problemi classici dell'antichità.

Rette parallele: un teorema significativo sugli angoli dei triangoli. Una relazione tra i lati

Dopo aver precisato la definizione di rette parallele nel piano, vale la pena investigare le configurazioni che possono assumere nello *spazio* due rette che non si incontrano. È una riflessione importante poiché lo spazio tridimensionale è quello in cui viviamo e poiché induce ad esaminare criticamente ciò che accade in due dimensioni.

Se poi due rette sono intersecate da un'altra retta, restano individuate alcune coppie di angoli a cui è comodo attribuire un nome, dato che intervengono in diverse situazioni: è sufficiente limitarsi agli alterni interni e ai corrispondenti. Nel caso di rette parallele *assumeremo* che tali angoli siano uguali (**dispensa** ***Rette parallele***).

Su queste basi, gli studenti possono riscoprire quanto vale la somma degli angoli interni del triangolo. Prima cercano di trovare un valore su un triangolo di carta, come magari hanno già fatto nella scuola secondaria di primo grado. Ma i modelli materiali sono imprecisi e rappresentano pur sempre dei casi specifici; pertanto serve compiere un ulteriore passo e produrre una dimostrazione della congettura. Questa è, in sintesi, l'**attività** ***Somma degli angoli del triangolo***, e, come abbiamo già osservato in generale, si può mostrare la sua traccia anche solo in parte per lasciare agli studenti la *libert*à di esplorare la situazione a partire da ciò che conoscono.

L'estensione del risultato ai poligoni è già stata esaminata nel percorso come primo approccio alla dimostrazione. Si può anche discutere quanto vale la somma degli angoli esterni: il risultato si ottiene in modo intuitivo immaginando di percorrere il bordo del poligono; l'aspetto sorprendente è che tale somma non dipende dal numero dei lati!

Il contesto delle rette parallele offre anche l'opportunità di *interpretare* figure geometriche. La richiesta è di esprimere le ampiezze di alcuni angoli in funzione delle ampiezze di altri: si osserva il disegno, si esplora la configurazione individuando alcuni angoli la cui misura resta determinata a partire da quelle assegnate e da essi si prova a determinare le misure volute. Attività di questo tipo sono proposte in alcuni libri di testo, ad esempio [Sasso, 2011], e sono richieste nelle prove di ingresso all'università, come mostra un **video**[8] del Laboratorio DiCoMat.

Prima di proseguire, si può accennare all'assioma delle parallele, al ruolo che ha avuto il postulato nella dimostrazione del teorema sulla somma degli angoli del triangolo e all'indagine che lo ha riguardato nella storia.

Fin qui abbiamo investigato gli angoli. E sui *lati* del triangolo, cosa si può dire? Devono verificare qualche condizione?

È un modo per introdurre la *disuguaglianza triangolare,* che è un risultato intuitivo per i ragazzi ma ha una conseguenza non banale: fissati tre numeri, non sempre esiste un triangolo i cui lati hanno come lunghezza tali numeri.

Alla scoperta dei punti notevoli

Gli studenti a questo punto del percorso dovrebbero saper produrre e comprendere semplici *dimostrazioni,* disporre degli *strumenti geometrici* di base e saper realizzare *costruzioni geometriche* elementari con riga e compasso.

Perciò ha senso investire le abilità così sviluppate per esplorare qualche problema più complesso, come l'esistenza dei punti notevoli del triangolo. Per farlo, un ottimo strumento è GeoGebra, poiché permette di fissare l'attenzione sul *procedimento* più che sui dettagli della costruzione; inoltre consente di *manipolare* rapidamente le figure grazie alla funzione di trascinamento: un primo importante passo verso la generalizzazione di proprietà. D'altronde, un software di geometria dinamica non sostituisce la costruzione materiale con riga e compasso: se prima non si disegna con carta e matita, è difficile apprezzare la potenza dell'applicazione e coglierne i limiti.

Per prendere confidenza con GeoGebra, si può tracciare l'asse di un segmento e la bisettrice di un angolo: basta ripercorrere il procedimento seguito nella costruzione su carta e poi controllarlo ricorrendo allo specifico strumento offerto dal software. L'**attività** è ***Costruzioni***

[8] http://laureescientifiche.science.unitn.it/simulazione_risorse/quesito-4.html

geometriche di base ed è realizzata nei file CostruzioneAsse.ggb e CostruzioneBisettrice.ggb.

Ormai gli studenti possono investigare in modo autonomo gli assi, le bisettrici e le altezze di un triangolo. Seguendo le **attività *Punti notevoli* 1** e **2** dovrebbero presto rendersi conto che disegnare su carta non basta: i segmenti notevoli si intersecano davvero in un unico punto? Ma nemmeno il software (AssiTriangolo.ggb e BisettriciTriangolo.ggb, AltezzeTriangolo.ggb) è sufficiente per stabilire la validità dell'enunciato; pertanto è necessario fornire una dimostrazione.

L'uso di un ambiente di geometria dinamica per realizzare costruzioni geometriche è richiesto esplicitamente nelle Indicazioni nazionali:

> *La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali […] sia mediante programmi informatici […].*

Spesso nelle costruzioni si fissano dei punti e, a partire da questi, se ne costruiscono altri che si muovono quando si trascinano i primi. Questo legame causale aiuta lo studente a comprendere il legame condizionale tra i due insiemi di oggetti: i primi individuano la *premessa* e i secondi la *conclusione*. L'aspetto interessante è che questa relazione si può sperimentare anche a livello corporeo con il movimento del mouse, come si discute in [Baccaglini, Di Martino, Natalini, Rosolini, 2018, pag. 179].

2.2.4 Uno sguardo ai sistemi lineari

Non c'è un errore nel titolo. Riteniamo infatti che nel corso dell'anno sia importante *consolidare* la manipolazione algebrica di polinomi nonché la modellizzazione mediante equazioni. Per farlo, invece di limitarsi a riesaminare questioni già affrontate, si può introdurre un *nuovo* strumento matematico: i sistemi lineari.

Una *motivazione* per gli studenti è presto fornita: i sistemi sono utili per descrivere varie situazioni, in continuità con quanto i ragazzi già conoscono sulle equazioni.

Questo non significa però che impiegarli sia sempre la scelta più efficiente. Ad esempio, non è necessario introdurre un sistema per determinare il numero di monete da 0,10 euro e quello di monete da 0,20 euro, conoscendo il loro numero totale t e il loro valore complessivo; infatti basta indicare con x il numero delle prime per dedurre che le seconde sono $t - x$. Eppure, per diversi ragazzi sembra più naturale ricorrere a due variabili piuttosto che ad una sola: nel nostro esempio infatti, gli studenti spesso preferiscono introdurre una nuova incognita per denotare il numero di monete da 0,20 euro.

La nostra scelta di partire da un contesto concreto permette allo studente di attribuire dei *significati* alle incognite e alle soluzioni e dunque di comprendere meglio cosa vuol dire considerare *contemporaneamente* due equazioni, e che un sistema in due incognite ha come soluzione *una coppia* ordinata di numeri, non due soluzioni distinte.

Come si vede, è un approccio analogo a quello che abbiamo adottato per introdurre le equazioni. E come per le equazioni, prima di considerare tecniche risolutive, verifichiamo se una coppia di numeri è soluzione di un sistema assegnato, anche non lineare. A questo punto non resta che discutere le tecniche risolutive: a nostro avviso, nella classe prima è sufficiente ricorrere al metodo di sostituzione e non serve introdurre principi di equivalenza per i sistemi. Infatti in questo segmento del percorso lo scopo del calcolo non è risolvere un sistema nel modo più efficiente possibile, ma quello, tipico dell'algebra, di *manipolare* espressioni in vista di un *obiettivo;* nel nostro caso, ciò significa ricondursi ad equazioni in un'unica incognita.

Tutti questi aspetti sono sintetizzati nel **foglio di attività 15**, che prevede la risoluzione di sistemi ma anche applicazioni alla cinematica, come scrivere l'equazione della traiettoria di un corpo a partire dalle leggi del moto lungo gli assi orizzontale e verticale.

Un esempio di verifica sugli aspetti geometrici sin qui affrontati e sui sistemi lineari è verifica 4.

2.2.5 Proseguiamo… con la circonferenza

Dopo aver esaminato l'uguaglianza di triangoli e le rette parallele, tradizionalmente i libri di testo propongono l'approfondimento dei quadrilateri e riservano molta importanza alla loro classificazione.

Noi invece preferiamo affrontare la circonferenza, poiché è un tema più stimolante e introduce aspetti sostanzialmente nuovi rispetto ai triangoli. Comunque considereremo i quadrilateri già nella classe prima, nell'ambito del piano cartesiano; è nella classe *seconda* che li guarderemo dal punto di vista sintetico, e lo faremo soprattutto per affinare le abilità di congetturare e di dimostrare, visto che i ragazzi dovrebbero essere più maturi per apprezzarlo.

Il problema isoperimetrico è un buon punto di partenza e lo si può introdurre mediante alcune domande.

Perché molte città nel Medioevo avevano una pianta circolare?
Come ha risolto Didone il problema della fondazione di Cartagine?
Perché le celle delle api hanno struttura esagonale?

Per le prime due questioni si può far riferimento alla **lettura** [Castelnuovo, 1993, pag. 37, 38, 39]. La dimostrazione del risultato è delicata per lo studente, ma può bastare una giustificazione, come quella proposta nel percorso *Proprietà isoperimetrica*[9], curato dal Laboratorio DiCoMat, o quella mostrata nel **video** *Il problema di Didone,* pubblicato sul canale Youtube della prof.ssa Robutti[10].

La terza questione è illustrata in un **video**[11] sullo stesso canale. Tutte le letture e i video proposti in questa sezione sono contenuti nella **lettura *Circonferenza*.**

La circonferenza per tre punti

Costruire la circonferenza per tre punti non allineati è un interessante problema che gli studenti possono risolvere mediante gli strumenti di cui già dispongono.

Il lavoro è descritto nell'**attività *Circonferenza per tre punti*** e nel file **CirconferenzaTrePunti.ggb**, e si può organizzare in più fasi: costruzione su carta e con un software di geometria dinamica, giustificazione rigorosa del procedimento ed infine esplorazione delle caratteristiche dei triangoli che hanno per vertici i tre punti dati.

Volendo, si può approfondire la questione e investigare il numero di punti necessari per tracciare la curva: quante circonferenze passano per due punti e quante per quattro punti assegnati?

È da attività come queste che dovrebbero emergere le proprietà delle corde, non dal racconto del docente fuori da un contesto, se si vuole che gli studenti ne dispongano a lungo e le comprendano davvero. E non c'è motivo di introdurre, *in questa fase,* oggetti geometrici quali settore circolare, segmento circolare… dato che verranno utilizzati solo più avanti.

Un teorema significativo: angoli alla circonferenza e angoli al centro

Il risultato non è banale e, per certi aspetti, ricorda quello sulla som-

[9] https://r.unitn.it/it/maths/dicomatlab/percorsi-didattici-rivolti-principalmente-classi-della-scuola-secondaria-di-secondo

[10] https://www.youtube.com/watch?v=-Qu_KMM5OWE. È importante fare osservare che la giustificazione proposta nel video non è una dimostrazione del risultato.

[11] Le tassellazioni regolari del piano: https://www.youtube.com/watch?v=G9IAhIrxO2Y

ma degli angoli interni di un triangolo. Anche in questo caso è utile investire del tempo per esplorare la relazione tra gli angoli al centro e i corrispondenti angoli alla circonferenza, e solo dopo provare a dimostrare quanto si è congetturato.

Le conseguenze del teorema sono significative e permettono di spiegare la ragione per cui in molti teatri dell'antichità gli spettatori si disponevano su semicirconferenze. È un'occasione per far *uscire* la geometria dall'aula, come illustra con chiarezza un video pubblicato sul sito di *MateMatita*[12].

Inoltre il contesto si presta a sviluppare l'abilità di *interpretare figure* geometriche. Infatti, in modo analogo a quanto visto nella sezione 2.2.4, ma con figure più complesse, si può richiedere di determinare l'ampiezza di un angolo in funzione dell'ampiezza di altri.

Poligoni inscritti e poligoni circoscritti

Per cominciare è importante chiarire cosa sono le rette tangenti ad una circonferenza e quali proprietà hanno.

Possiamo definirle provvisoriamente come le rette che intersecano la circonferenza in un solo punto, tuttavia è bene precisare agli studenti che ciò *non* vale per ogni curva, visto che l'aspetto essenziale non è il numero di punti di intersezione ma il fatto che la retta *approssima* la curva. Ne discuteremo più a fondo nella classe terza[13].

Una proprietà notevole, che utilizzeremo anche nell'ambito della geometria analitica nel secondo biennio, è la perpendicolarità della retta tangente rispetto al raggio condotto al punto di tangenza. Da essa segue l'uguaglianza dei due triangoli rettangoli che restano definiti quando si conducono le tangenti da un punto esterno alla circonferenza e si tracciano i raggi ai punti di tangenza. La dimostrazione della prima non ci sembra particolarmente istruttiva, mentre quella della seconda si può lasciare come esercizio agli studenti.

Ci siamo già occupati dell'inscrivibilità del triangolo nella circonferenza quando abbiamo discusso la costruzione della circonferenza per tre punti.

La circoscrivibilità del triangolo si fonda invece sulle proprietà di tan-

---

[12] http://www.xlatangente.it/page.php?pid=3221. *MateMatita* è il Centro interuniversitario di ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica.

[13] Nel percorso quinquennale che abbiamo realizzato e sperimentato nell'ambito del Progetto proponiamo di anticipare l'introduzione della derivata alla classe terza. In sostanza, si tratta di costruire la definizione mediante attività esplorative e di utilizzare la derivata (solo) delle funzioni potenza per risolvere semplici problemi di ottimizzazione.

genza che abbiamo appena indicato. La questione diventa più interessante se si traccia la circonferenza inscritta mediante un *software* di geometria dinamica e si cura la *comunicazione*, in particolare la descrizione delle proprietà geometriche che intervengono (**attività *Circonferenza Inscritta*** e file **CirconferenzaInscritta.ggb**). Il legame tra i due registri di rappresentazione è forte, poiché a ciascuna proprietà corrisponde uno specifico strumento di GeoGebra: ad esempio, la perpendicolarità del raggio si ottiene mediante lo strumento *Retta perpendicolare*.

Il passo successivo è considerare i quadrilateri. Gli studenti possono esaminare *autonomamente* dal libro di testo le condizioni di inscrivibilità e di circoscrivibilità alla circonferenza e le dimostrazioni della loro necessità: è un'ottima occasione per osservarsi mentre si imparano "cose nuove", utilizzando ciò che si sa. Le dimostrazioni della sufficienza non ci sembra aggiungano molto ad un'attività già ricca.

Infine si può osservare che i poligoni regolari sono inscrivibili e circoscrivibili, come suggerisce l'intuizione, e piuttosto approfondire come queste figure compaiano nelle opere d'arte e nelle costruzioni, magari attraverso ricerche individuali.

Eratostene misura la Terra

L'esame delle *questioni metriche* relative alla circonferenza richiede una conoscenza più profonda dei numeri e sensibilità per l'approssimazione; pertanto conviene riservarlo alla classe seconda.

Invece il procedimento con cui Eratostene ha compiuto un'impresa enorme per i suoi tempi si presta ad essere discusso già in questa fase del percorso. La situazione offre interessanti spunti di discussione, ad esempio le misure effettuate: l'inclinazione dei raggi del sole e la lunghezza di un arco di circonferenza sulla Terra... Magari la questione può essere approfondita da alcuni studenti, che poi la illustrano ai compagni.

2.2.6 Elaborare e interpretare dati: la statistica descrittiva

La statistica descrittiva è uno dei nuovi argomenti previsti dalle Indicazioni nazionali, che lo collocano nell'ambito *Dati e previsioni* assieme alla probabilità. Ne abbiamo già esaminato alcuni aspetti, soprattutto nel contesto delle percentuali: di fatto, senza attribuire nomi, abbiamo calcolato *frequenze assolute e relative*, abbiamo interpretato *diagrammi a barre*, ma soprattutto abbiamo operato con *dati reali,* come quelli desunti da indagini ISTAT.

Per questo ci proponiamo di sistemare in breve tempo le nozioni di base già incontrate, per poi introdurre nuovi strumenti che consentano di effettuare analisi più ricche. Prima però è opportuno discutere alcune situazioni che motivano lo studio del tema.

Malattie, sondaggi, giornali

Raccogliere dati, rappresentarli, elaborarli e analizzarli sono attività significative e, nel contempo, delicate. Anche per il cittadino, come emerge dalla **lettura** [Castelnuovo, 2003, pag. 56 e 57] e dalla **lettura** ***Statistica***.

La prima mostra come gli studi statistici sul mongolismo condotti nel secolo scorso abbiano permesso di chiarire alcuni aspetti di una *malattia* della quale prima non si sapeva quasi nulla. La seconda lettura approfondisce i *sondaggi* politici ed elettorali: essi sono talmente rilevanti da dover essere pubblicati, *per legge*, su un sito gestito dalla Presidenza del Consiglio dei Ministri. Il documento inoltre mostra come si possano suggerire messaggi diversi a seconda di come si presentano i dati: ciò avviene, ad esempio, se si forniscono e si confrontano solo le frequenze assolute ma non i loro rapporti con opportuni valori di riferimento, oppure se nei *grafici* si utilizzano scale non monometriche sugli assi. Talvolta queste (volute?) ambiguità si trovano addirittura sulle pagine dei quotidiani.

Infine la **lettura** [Perelli, 2002] fa riflettere sull'evoluzione storica della statistica: nata come attività pratica, volta ad esempio a censire le risorse dello Stato, si trasforma poi in disciplina che indaga quantitativamente la società e diversi altri settori.

Insomma, la statistica non è semplicemente una "questione di numeri"! Eppure molti libri di testo si limitano a presentare l'argomento attraverso elenchi di nomi, quali unità statistica, carattere, modalità… che aggiungono poco alla comprensione del tema. Secondo noi, ha più senso iniziare con letture come quelle che abbiamo indicato e piuttosto indirizzare gli studenti a desumere il significato dei termini specifici dal contesto oppure da ricerche che possono svolgere autonomamente.

Rappresentare i dati, anche con il foglio di calcolo

I dati grezzi spesso sono poco espressivi. Perciò conviene *organizzarli* in distribuzioni di frequenze assolute e, magari, di frequenze *cumulate*; spesso è utile considerare anche le frequenze relative, soprattutto quando serve *confrontare* due collezioni di dati che hanno numerosità diverse.

Per formarsi un'idea complessiva della situazione, si può ricorrere ad opportune rappresentazioni grafiche; ce ne sono di vari tipi, ma secondo noi basta considerare i *diagrammi a barre* e gli *areogrammi*. Tra i primi meritano un'attenzione speciale quelli che prevedono di rappresentare la frequenza come area e non come lunghezza, e che sono chiamati "istogrammi": infatti essi forniscono un'immagine più fedele della consistenza numerica dei dati e sono il punto di partenza per comprendere, nella classe quinta, come si calcolano le probabilità relative a variabili aleatorie continue.

Precisate queste nozioni di base, si può cogliere l'occasione per sviluppare abilità importanti, come individuare una forma di rappresentazione adeguata alla situazione e passare consapevolmente da una forma all'altra. Ad esempio, dedurre le frequenze relative dal diagramma a barre delle frequenze percentuali cumulate.

Quando i dati sono molti è utile ricorrere ad un *foglio di calcolo*, che permette di determinare rapidamente le frequenze dei dati grezzi (con la funzione CONTA.SE) e di rappresentarli mediante diagrammi a barre o areogrammi, a seconda della richiesta. Un'**attività** di questo tipo è ***Dadi*** e i file **LancioDado.xlsx** e **LancioDueDadi.xlsx** sono un esempio di come può essere realizzata.

Approfondimento. Si può *decrittare* un testo in codice, sfruttando la distribuzione delle frequenze relative delle lettere in un testo scritto nella lingua italiana (**attività** ***Frequenze e crittografia***, file **Crittografia.xls** e ***SoluzioneCrittografia***). Il lavoro si può svolgere tranquillamente più avanti nel corso dell'anno scolastico e lo si può fare in modalità interdisciplinare, visto che lo spunto è offerto dalla lettura *Lo scarabeo d'oro* di E. A. Poe ([Poe, 2000, pag. 139-180]).

Sintetizzare i dati

In statistica spesso si ha a che fare con molti dati, perciò non è significativo esaminare nel dettaglio i singoli valori; piuttosto è utile sintetizzarli mediante opportuni indici.

I primi che consideriamo sono gli indici che forniscono informazioni sul *centro* della distribuzione. I ragazzi dovrebbero averli già incontrati nella scuola secondaria di primo grado, ma è opportuno precisarne alcuni aspetti.

Innanzitutto si possono discutere alcune situazioni in cui la media aritmetica interviene in modo significativo, ad esempio come reddito pro capite, interpretandola come quel numero che, sostituito ad ogni dato, ne lascia *invariata la somma*. Successivamente si esprimerà la media in funzione delle frequenze assolute e poi delle sole *frequenze relative*: è un primo, importante passo verso la definizione di valore atteso di una variabile aleatoria, di cui naturalmente ci occuperemo solo nelle classi successive al biennio.

Per proseguire, si può investigare la proprietà di linearità di questo valore di sintesi e fare così *algebra* nel senso che abbiamo chiarito nelle sezioni precedenti. Precisamente, dopo aver intuito su esempi la relazione tra la media dei numeri cx_i o $x_i + c$ e la media dei numeri x_i, si può provare a dimostrarla anche nel caso generale.

D'altronde la media aritmetica non è sempre l'indice di posizione più espressivo. Ad esempio, nel 2014 il reddito annuale medio delle famiglie italiane era di 30.500 euro, ma il "valore centrale" dei dati era di 25.700 euro[14]; dunque è opportuno tener conto anche di quest'ultimo valore. Si tratta della *mediana* e gli studenti possono analizzarne autonomamente la definizione da un **video**[15] del Laboratorio DiCoMat.

Approfondimento. Per comprendere a fondo il significato di media si possono svolgere le **attività *Media come baricentro*** e ***Media per via sperimentale***.

Nella prima si interpreta la distribuzione dei dati come una distribuzione di masse e si sperimenta che la media aritmetica dei dati è l'ascissa del *baricentro* del sistema di masse. Su questo risultato si basa la seconda attività. Lo scopo è determinare in modo empirico la media di una distribuzione e, per farlo, si rappresenta su un cartoncino il diagramma a barre delle frequenze, lo si sospende opportunamente e si individua il punto in cui esso è in equilibrio. Le due attività si possono affrontare anche più avanti nel corso dell'anno, magari in collaborazione con il docente di fisica.

Ma media e mediana non bastano

La media aritmetica e la mediana, da sole, non sono sempre sufficienti a sintetizzare in modo significativo la distribuzione dei dati.

Per comprenderlo basta esaminare l'andamento delle temperature registrate ogni ora in una giornata di primavera: la media non fornisce alcuna indicazione dell'escursione termica che può essere anche notevole. La questione diventa ancora più chiara se si confrontano due distribuzioni di dati che hanno la stessa media, ma che sono disposti diversamente rispetto ad essa: ad esempio, "vicini" al valore centrale in una, "lontani" nell'altra. Queste situazioni dovrebbero convincere gli studenti che è opportuno introdurre un nuovo valore di sintesi, un valore che misuri la *dispersione* dei dati rispetto alla media.

---

[14] I dati sono forniti da Bankitalia: http://www.ilsole24ore.com/art/notizie/2015-12-03/bankitalia-2014-frena-calo-reddito-famiglie-italiane--151530.shtml?uuid=ACKq5RmB

[15] http://laureescientifiche.science.unitn.it/simulazione_risorse/quesito-11.html

Ma quale indice conviene considerare nel *primo biennio*?

Il più semplice è la semiampiezza dell'intervallo di variazione dei dati, ma ha l'inconveniente (che è istruttivo *discutere* con la classe) di dipendere unicamente dal valore massimo e dal valore minimo. Una misura più efficace è la deviazione standard; tuttavia, è delicato giustificare la sua espressione, e dunque c'è il rischio che i ragazzi focalizzino l'attenzione solo sul calcolo, senza comprenderne il significato.

Noi preferiamo ricorrere ad un approccio intermedio: considerare la *distanza interquartile* e rappresentare la distribuzione mediante il *box-plot,* che contiene almeno il 50% dei dati centrali e dunque fornisce un'immagine semplificata, ma comunque espressiva, dell'insieme dei valori. Utili riferimenti sono la **dispensa** ***Dispersione dei dati*** e il file **DispersioneDati.xls**, ma anche la **lettura** [Paola et al., 2014, pag. 278].

Come abbiamo già discusso, le situazioni di cui si occupa la statistica sono spesso caratterizzate da un numero elevato di dati. Pertanto, se non si vuole limitare l'analisi a questioni costruite artificialmente per scopi didattici, è opportuno ricorrere ad un foglio di calcolo.

L'**attività** ***Numero di componenti*** richiede di esaminare la distribuzione delle famiglie italiane per numero di componenti e si basa sui dati raccolti nei censimenti ma anche su quelli forniti dall'Annuario ISTAT relativo all'anno 2014; il file **NumeroComponenti.xlsx** mostra come si può realizzare. In quest'analisi il foglio di calcolo è utile soprattutto poiché richiede di *pianificare* il procedimento e di scrivere opportune *formule*, e dunque esige di utilizzare le lettere e curare la sintassi.

2.2.7 Algebra: ulteriori strumenti

Fattorizzare polinomi

Del calcolo letterale abbiamo considerato fin qui soprattutto lo *sviluppo* di espressioni polinomiali, ossia la loro trasformazione mediante la proprietà distributiva. Perciò resta ancora da esaminare la fattorizzazione, che costituisce l'altra *direzione* principale del calcolo e che ora intendiamo discutere, prendendo ispirazione anche dal classico e ancora attuale articolo [Prodi e Villani, 1982].

La nostra idea è di presentare la fattorizzazione semplicemente come la manipolazione algebrica "inversa" della moltiplicazione di polinomi: non si tratta perciò di un nuovo argomento, a differenza di come appare in alcuni libri di testo. Concretamente, si individua una possibile scomposizione e si controlla la sua correttezza moltiplicando i fattori ottenuti, secondo uno schema del tipo *tentativo-verifica*. Così si *impara* da eventuali errori e si sperimenta uno dei modi caratteristici del fare matematica. Per queste ragioni è un approccio che si dovrebbe adottare anche in altri contesti, ad esempio nel calcolo delle primitive di una funzione nella classe quinta[16].

Osserviamo inoltre che a ciascuna delle due principali direzioni del calcolo corrisponde uno specifico comando offerto dalla vista CAS di GeoGebra; perciò il software può costituire un utile supporto per esplorare oppure per controllare la correttezza delle manipolazioni effettuate.

Prima di tutto, però, è cruciale discutere l'*utilità* della fattorizzazione. Infatti alcuni studenti sono disorientati perché non vedono la ragione di operare in senso inverso allo "sviluppare" oppure perché non hanno chiaro l'obiettivo della manipolazione. Ancora una volta, una motivazione proviene dalle equazioni: scomporre in fattori permette di risolvere alcune equazioni di grado superiore al primo; e, più in generale, permette di esprimere un polinomio come prodotto di polinomi "elementari", in stretta analogia con la fattorizzazione dei numeri naturali mediante numeri primi.

Ma quali polinomi è formativo fattorizzare? Le Indicazioni nazionali sono nette:

[…] fattorizzare semplici polinomi.

Del resto, sono "pochi" i polinomi che si possono scomporre in fattori di grado minore. Ad esempio, è nulla la probabilità che il polinomio $xy + mx + ny + q$ sia fattorizzabile nel prodotto di polinomi di primo grado, scegliendo a caso ciascuno dei coefficienti m, n, q nell'intervallo $[-N, N]$ dove N è un numero positivo fissato a piacere ([Prodi e Villani, 1982]).

La nostra interpretazione della normativa è che sia sufficiente esaminare le due situazioni che si presentano con maggior frequenza: tutti gli addendi del polinomio hanno un fattore comune; il polinomio si può esprimere come prodotto notevole della forma $(a + b)^2$ oppure $(a + b)(a - b)$.

Come si noterà, non abbiamo menzionato la scomposizione di po-

---

[16] Infatti, in molti casi, non serve ricorrere ai lunghi elenchi di formule che propongono i libri di testo. Basta congetturare una possibile primitiva della funzione indicata, calcolarne la derivata e controllare se è uguale alla funzione data; in diverse situazioni basterà "aggiustare" le costanti moltiplicative. Ne discutiamo più in dettaglio nei materiali del Progetto realizzati (e sperimentati) per la classe quinta.

linomi quali $x^3 + x^2 + 2x + 2$ e che tradizionalmente si dice "fattorizzazione parziale". Piuttosto preferiamo investire del tempo per esprimere polinomi della forma $x^2 + bx + c$, dove b e c sono numeri interi, come prodotto di fattori di primo grado, visto che compaiono spesso nelle applicazioni.

A questo punto del percorso si può proporre una verifica sulla circonferenza dal punto di vista sintetico, sugli aspetti di base della statistica descrittiva e sulla fattorizzazione di polinomi, come verifica 5. La prova, volutamente, non riguarda le frazioni algebriche, in modo che gli studenti possano affrontare con gradualità lo studio dell'algebra e disporre di tempi più lunghi per consolidare quanto appreso.

Somme e prodotti di frazioni algebriche

Questi oggetti matematici si possono introdurre in classe mediante alcuni problemi proposti nel **foglio di attività 16** e che ora sintetizziamo per il docente.

Nel moto uniformemente accelerato, esprimere la velocità di un corpo in funzione solo dell'accelerazione, della velocità iniziale e della posizione.
Data la formula che lega due resistenze elettriche R_1, R_2 in parallelo alla resistenza equivalente R, verificare che R si può esprimere come $\dfrac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2}$.

I quesiti si prestano ad essere affrontati in attività nelle quali gli studenti si mettono in gioco, discutono tra loro e provano a manipolare algebricamente le espressioni che intervengono. La necessità di portare a termine il calcolo dovrebbe motivarli a studiare le operazioni con le frazioni algebriche.

Secondo noi è sufficiente considerare *semplici* moltiplicazioni e addizioni di frazioni algebriche.

Per iniziare, è utile riesaminare le operazioni con le frazioni numeriche e poi estendere il procedimento al caso in cui al posto dei numeri ci sono le lettere. Ma con attenzione: operare con le lettere *non* è come operare con i numeri! Ne abbiamo già discusso nella sezione 2.2.2 e abbiamo osservato che il fraintendimento può essere fonte di gravi errori nel calcolo.

Tuttavia il rimedio non è fare "tanti esercizi", ma affiancare alla manipolazione algebrica qualche attività esplorativa; ad esempio, sondare se una data uguaglianza letterale è vera e giustificare la risposta mediante un controesempio oppure mediante una dimostrazione, a seconda dell'esito.

E *non* è nemmeno utile proporre *regole*. Un esempio emblematico è quella che riportano i manuali per costruire "il" denominatore comune di più frazioni algebriche. Invece di memorizzarla, lo studente dovrebbe ricostruirla volta per volta e per verificare la bontà della scelta compiere il passaggio inverso, ossia dividere il numeratore e il denominatore di ogni frazione per i loro fattori comuni, e controllare che la frazione così ottenuta coincida con quella di partenza.

Più in generale, vogliamo dare agli studenti ricette di calcolo che presto dimenticano e che suggeriscono un'idea distorta del fare matematica? Oppure vogliamo guidarli a *ricostruire* il procedimento volta per volta, a sviluppare strumenti di *controllo* e far maturare in loro l'*esigenza* di impiegarli?

Sono domande nodali e la nostra risposta dovrebbe essere chiara per quanto espresso finora e concorda pienamente con quella discussa in [Antonini, 2020]. Con ciò non vogliamo dire che non siano utili esercizi di *routine*. Anzi, è necessario che i ragazzi sviluppino una certa abilità operativa, ne effettuino la manutenzione e si confrontino anche con il libro di testo; ma, a nostro avviso, il livello di difficoltà non dovrebbe superare quello del **foglio di attività 16**.

Ancora equazioni

Gli strumenti algebrici sviluppati nel percorso dovrebbero consentire agli studenti di risolvere le equazioni fratte, con una certa autonomia. La loro introduzione può essere motivata da un problema come questo.

> *Un'indagine condotta su 50 ditte che hanno un numero di dipendenti non superiore a 5 ha rilevato che la media del numero dei dipendenti per ditta è 3,56. L'indagine è poi stata estesa alle ditte della zona che hanno 6 dipendenti e viene comunicata la nuova media complessiva.*
> *Le informazioni fornite sono sufficienti per ricavare il numero di ditte che hanno 6 dipendenti?*

In quest'ambito si può discutere anche la risoluzione di equazioni polinomiali di grado *superiore al primo*, in modo da riprendere la motivazione che avevamo dato alla fattorizzazione di polinomi. Ne proponiamo alcuni esempi nel **foglio di attività 17**, assieme a questioni di riepilogo sulle frazioni algebriche.

E la divisione di polinomi? E le disequazioni?

Nella classe prima non ci sembra opportuno considerare ulteriori aspetti algebrici, per le ragioni che ci proponiamo ora di chiarire.

Il nostro percorso è frutto di scelte impegnative, tra cui privilegiare lo sviluppo di *abilità* rispetto ai contenuti ed esaminare i *vari* temi previsti dalle Indicazioni nazionali, non solo l'algebra e la geometria; per realizzarle serve pianificare in modo accurato le attività e stabilire una scala di priorità: in questo quadro, la divisione di polinomi non ci sembra urgente.

Ma c'è un'altra ragione: come vedremo nella sezione 2.3.8, invece di seguire l'algoritmo classico della divisione, preferiamo ricavare il polinomio quoziente imponendo che i coefficienti soddisfino un opportuno sistema lineare. Questa tecnica ha molti vantaggi, ma richiede che lo studente sia più maturo, e per questo secondo noi va proposta nella classe seconda.

Anche le disequazioni meritano una riflessione. Per comprenderle a fondo è opportuno esaminarle mediante il linguaggio delle *funzioni* e dal punto di vista *grafico*. Ma c'è un rischio: se lo studente lavora solo con le funzioni lineari (sia che le conosca già sia che le apprenda contestualmente), può essere indotto a codificare delle regole risolutive ad hoc e ad applicarle meccanicamente. In tal caso, il registro grafico non costituisce più una risorsa per osservare la situazione da un'altra angolazione e non aggiunge nulla rispetto all'approccio algebrico.

Per questo è meglio affrontare le disequazioni nella classe seconda, quando lo studente dispone del linguaggio delle funzioni e di un insieme ricco di funzioni elementari.

2.2.8 Coordinate cartesiane nel piano e aree di poligoni

Fin dalla classe *prima* gli studenti dovrebbero esaminare semplici questioni geometriche anche per via analitica. Infatti, questo approccio permette di guardare da un *altro punto di vista* gli oggetti matematici già introdotti per via sintetica e dunque di comprenderli meglio. Inoltre permette di sviluppare *abilità* importanti, come passare da un registro di rappresentazione all'altro, ma anche di *consolidare* il calcolo in un contesto che lo motiva.

Il metodo delle coordinate dovrebbe essere già noto agli studenti dalla scuola secondaria di primo grado, ma approfondirne alcuni aspetti al primo anno lascia loro il tempo per interiorizzarlo, anche in vista della classe seconda in cui si affronteranno questioni più impegnative.

È uno strumento ricco, come è precisato in [Villani, 2006, pag. 164]: è *sistematico*, poiché prevede un unico schema di lavoro per ogni situazione, mentre l'approccio sintetico si basa su strategie ideate appositamente per lo specifico problema in esame; è generale ed è *efficace,* poiché sfrutta gli strumenti dell'algebra.

D'altra parte, proprio la ricchezza del metodo comporta un rischio: ridurre la risoluzione a schemi standard di calcolo, senza tener conto degli aspetti geometrici. È quanto osserva lo stesso autore in [ICMI, 1998]:

La geometria analitica si presuppone presenti modelli geometrici per situazioni geometriche. Ma non appena gli studenti sono introdotti a questi nuovi metodi, essi sono improvvisamente proiettati in un nuovo mondo di simboli e di calcoli nel quale il collegamento fra situazioni geometriche e i loro modelli algebrici viene meno e le interpretazioni geometriche dei calcoli numerici sono spesso trascurate.

Per questo è opportuno non privilegiare il registro algebrico e sollecitare gli studenti a considerare gli aspetti geometrici coinvolti, in ogni fase del lavoro.

Gli strumenti di base

Per iniziare, è importante discutere con i ragazzi il senso e l'utilità di introdurre un sistema di coordinate cartesiane nel piano: esso permette di associare ad ogni *punto* del piano una coppia ordinata di *numeri reali* e, all'inverso, di interpretare ogni coppia ordinata di numeri reali come punto del piano. Tale corrispondenza induce un *legame* tra enti geometrici ed oggetti algebrici e consente così di esaminare le situazioni dai due punti di vista e di passare da uno all'altro a seconda delle necessità.

Queste idee fanno ormai parte della formazione matematica di base, ma sono state precisate solo nel diciassettesimo secolo, come conseguenza del contesto *economico* e *sociale* e dello sviluppo delle *scienze*. È una questione non banale, che merita di essere approfondita e lo si può fare in modo semplice mediante la lettura [Alexandrov et al., 2000, pag. 220, 221].

Chiarite le idee di fondo, una prima attività è determinare la *distanza* tra due punti di coordinate assegnate. La formula è una conseguenza immediata del *teorema di Pitagora,* anzi "è" il teorema di Pitagora interpretato in coordinate e, come tale, i ragazzi dovrebbero saperla ricostruire volta per volta. Inoltre dovrebbero riconoscere che essa non è necessaria quando i due punti appartengono ad una retta parallela agli assi. In questo caso è anche importante saper esprimere la distanza tra due punti quando le coordinate sono indicate mediante lettere: ad esempio, scrivere in funzione di b la distanza tra i punti $P(1,b)$ e $Q(1,2)$, dove $b < 2$. Tutti aspetti da discutere in classe, perché spesso non sono ovvi per gli studenti.

Si può poi discutere come determinare le coordinate del *punto medio* di un segmento, note quelle dei suoi estremi. La formula corrisponde a ciò che suggerisce l'intuizione, ossia ciascuna coordinata è la media aritmetica delle coordinate degli estremi, ma ricavarla esplicitamente costituisce un'ulteriore occasione per utilizzare l'algebra in un contesto geometrico. Il primo passo è riconoscere che, grazie all'uguaglianza di opportuni triangoli, ci si riduce a lavorare sulle proiezioni del segmento lungo gli assi cartesiani. Successivamente si esprime ciascuna coordinata del punto medio come somma di due contributi: la coordinata dell'estremo "minore" e la lunghezza di metà del segmento proiezione; oppure, simmetricamente, si può pensare come differenza tra la coordinata dell'estremo "maggiore" e la lunghezza di metà del segmento proiezione.

Sviluppare abilità: integrare i due approcci, rappresentare, dimostrare

Gli strumenti introdotti si possono impiegare per affrontare i semplici problemi del **foglio di attività 18** e del **foglio di attività 19**, che hanno lo scopo di sviluppare precise abilità matematiche più che consolidare contenuti specifici.

Una delle questioni proposte è calcolare l'area di un triangolo, note le coordinate dei vertici. Vari libri di testo la collocano nell'ambito della retta nel piano cartesiano e propongono di calcolare la lunghezza dell'altezza mediante la formula che fornisce la distanza di un punto da una retta. Noi invece preferiamo che lo studente si prenda del tempo per osservare il triangolo e lo *interpreti* come differenza tra figure geometriche di cui sa determinare l'area in modo immediato. Ad esempio, può pensarlo come differenza tra un opportuno rettangolo con i lati paralleli agli assi e tre triangoli rettangoli.

Se poi uno dei lati del triangolo di partenza è parallelo agli assi, allora il calcolo dell'area è ancora più veloce, poiché la lunghezza di una base e dell'altezza corrispondente si ricavano subito dalle coordinate dei vertici.

Molti sono i vantaggi offerti da questa strategia, ma il più significativo è che *integra* l'approccio analitico e quello *sintetico*: anche se un problema è collocato nel piano cartesiano, non vuol dire che si debba risolvere mediante le formule generali della geometria analitica.

In questo ricco ambito si possono anche discutere questioni che *non* hanno come risposta un numero e dunque contribuiscono a fornire un'idea più completa di cosa significa fare matematica.

Una di queste è *rappresentare graficamente* semplici sottoinsiemi del piano definiti mediante condizioni sulle coordinate. Si tratta di semipiani, semicirconferenze… ma soprattutto si tratta di utilizzare più registri e passare *consapevolmente* da uno all'altro.

Si può anche provare a *dimostrare* per via analitica qualche risultato significativo, come il teorema di Varignon per i quadrilateri o la relazione tra la lunghezza della mediana relativa all'ipotenusa e la lunghezza dell'ipotenusa. Per farlo, si *sceglie* un opportuno sistema di coordinate cartesiane, e già questo dà valore all'attività; si traduce poi la richiesta geometrica in termini algebrici, ad esempio in un'equazione che ha come incognita la coordinata di un punto, e si risolve il problema così riformulato; infine si *interpretano* geometricamente i risultati ottenuti. È uno schema di lavoro formativo, che si dovrebbe applicare anche nella risoluzione di diversi problemi nell'ambito della geometria analitica.

Uno sviluppo significativo: le formule dell'area di semplici poligoni

Vari problemi proposti nei due fogli precedenti richiedono di calcolare l'area di triangoli e di quadrilateri. Le formule sono già note agli studenti dalla scuola secondaria di primo grado e si può cogliere l'occasione per giustificarle: è un primo approccio alla questione nodale di determinare *l'area* di sottoinsiemi del piano, che va sviluppata in vari momenti del quinquennio.

Il percorso seguito da molti libri di testo consiste nell'esaminare in dettaglio l'equiscomponibilità dei poligoni, per poi passare alle misure e, solo alla fine, alla giustificazione delle formule delle aree. Tuttavia questo approccio formale a noi sembra troppo delicato per lo studente, pertanto preferiamo seguire una via più diretta e privilegiare gli aspetti costruttivi, in accordo con [Villani, 2006, pag. 112].

Precisamente, assumiamo la formula dell'area del rettangolo e l'additività della misura dell'area. L'idea intuitiva è di individuare nel poligono opportuni triangoli e "spostarli" in modo da ottenere una figura di area nota; rigorosamente ciò significa ricorrere ai criteri di uguaglianza dei triangoli. Così, a partire dalla formula dell'area del rettangolo, si giustifica quella del parallelogramma, poi da questa si ricava quella del triangolo ed infine quella del trapezio.

Un esempio di verifica sugli ultimi aspetti esaminati è **verifica 6**.

Quanto discusso fin qui costituisce, a nostro avviso, ciò che merita affrontare nella classe prima. Per il lavoro estivo proponiamo la **lettura *Letture per la classe prima*** e il **foglio di attività 20**, che riporta le questioni nodali discusse nel corso dell'anno scolastico e delle quali è bene che gli studenti dispongano a lungo.

2.3 Un percorso per la classe seconda

2.3.1 Dalla pendenza alla retta nel piano cartesiano

Ci sembra ragionevole iniziare con l'esame della retta nel piano cartesiano. Innanzitutto poiché il tema permette di *riprendere* aspetti fondamentali del percorso della classe prima, come il metodo delle coordinate, il calcolo algebrico e alcuni elementi di geometria sintetica. Ma anche per disporre di un *esempio notevole*, quello dei modelli lineari, a cui far riferimento quando verrà affrontato il delicato tema delle funzioni.

Partiamo dalla pendenza…di una strada

Un segnale ci avvisa che la strada ha pendenza del 15%; cosa significa questa indicazione?

È una questione da discutere con gli studenti, lasciando spazio alle loro proposte. Per rispondere, basta considerare opportuni triangoli rettangoli e osservare che la pendenza è il rapporto tra le lunghezze dei loro cateti, ossia tra il dislivello superato e lo "spostamento orizzontale". L'*immagine* di questi triangoli va poi *tradotta* in coordinate così da ottenere la nota formula che definisce la pendenza della retta, come è descritto nella **dispensa** ***Pendenza della retta***, che mostriamo nel paragrafo 3.4 assieme agli altri materiali realizzati sul tema.

Questo *tipo* di approccio è promosso dalla ricerca ed è così descritto in [Baccaglini, Di Martino, Natalini, Rosolini, 2018, pag. 56 e 51]:

> *[…] i concetti matematici, quando la loro natura lo permette, dovrebbero essere appresi nella modalità di pensiero quotidiana e non tecnica. Bisognerebbe cominciare con tanti esempi e non–esempi attraverso i quali viene formata la concept image. Questo non significa che la definizione formale non deve essere introdotta.*
>
> *[…] la concept image è l'insieme delle strutture cognitive che l'individuo associa ad un concetto matematico. […] può essere una rappresentazione visuale del concetto […]. Può essere un insieme di impressioni o di esperienze.*

In realtà vorremmo di più, ossia che l'immagine ottenuta e l'abilità di tradurla in simboli restassero disponibili a lungo. Ciò va esplicitato agli studenti ed essi vanno guidati a farlo, in modo che possano maturare gradualmente precise abilità *metacognitive*.

Come vedremo, la pendenza è l'oggetto matematico su cui fondare l'esame della retta nel piano cartesiano e, più avanti, anche quello della derivata. Perciò, prima di proseguire, è opportuno che i ragazzi ne consolidino il significato e sviluppino abilità operative mediante il **foglio di attività 1**; il punto d'arrivo è formulare una *regola di spostamento* lungo la retta: detta m la pendenza, ad ogni spostamento orizzontale Δx corrisponde uno spostamento verticale $m \cdot \Delta x$.

Dalla pendenza all'equazione della retta

La regola permette di costruire in modo espressivo l'equazione di una retta non verticale, come mostra la **dispensa** ***Equazione della retta: costruzione***.

L'idea è che, fissato un suo punto (x_0, y_0), l'ordinata di un qualsiasi punto (x, y) della retta si può pensare come somma della *quota* y_0 e del *dislivello* $m(x - x_0)$.

Complessivamente si ottiene dunque $y = y_0 + m(x - x_0)$ (*). E questa è la forma a cui faremo sempre riferimento anche negli esercizi, riservando attenzione al caso particolare $x_0 = 0$.

Discuteremo in seguito il caso delle rette verticali poiché non è banale per i ragazzi costruirne consapevolmente l'equazione, anche se è semplice descriverle nel linguaggio naturale; invece i libri di testo spesso non tengono conto di queste difficoltà e le propongono tra gli esempi iniziali.

Tuttavia, *prima* ancora di scrivere l'equazione della retta, è opportuno discutere con gli studenti due aspetti: la sua *utilità* e l'*obiettivo* del lavoro. Ad esempio, si può provare a stabilire se il punto (5,0) appartiene alla retta che passa per (–2,–3) e (10,2): si conclude presto che… il disegno non basta. È anche opportuno chiarire presto il significato di *equazione* di un ente geometrico: ce ne occuperemo in dettaglio nella classe terza, ma già ora si possono considerare alcuni semplici esempi, quali la circonferenza o l'asse di un segmento, come mostriamo nel **foglio di attività 2**.

Dopo aver ricavato l'equazione della retta nella forma (*), la si può utilizzare per determinare l'equazione in alcune semplici situazioni, che esaminiamo nella **dispensa *Equazione della retta: questioni di base***.

Si può proporre agli studenti di leggerla *autonomamente* e di valutare il proprio apprendimento misurandosi nella risoluzione di esercizi analoghi, e poi discutere in classe gli eventuali dubbi emersi. È una modalità di lavoro analoga a quella delle *Situazioni di apprendimento* del progetto Orientamat ([Orientamat, 2006]) e si avvicina a quella nota come *flipped classroom*; come abbiamo precisato nell'Introduzione del volume, questo approccio didattico si può adottare anche per altre dispense del percorso.

Per concludere questa parte resta da tracciare la retta a partire dalla sua equazione. Ma prima si dovrà precisare l'interpretazione geometrica dei coefficienti dell'equazione $y = mx + q$, a cui conduce la formula (*), anche attraverso l'**attività** descritta nel file **EquazioneRettaParametri.ggb**.

Rette parallele e rette perpendicolari

Qual è la relazione tra le pendenze di due rette perpendicolari?

Per iniziare, si può *esplorare* la questione su foglio quadrettato, provando a determinare per via grafica la pendenza della retta perpendicolare nell'origine O ad una retta r di equazione data, ad esempio $y = 2x$.

Il passo successivo consiste nel *giustificare* il risultato ottenuto per una generica retta passante per l'origine e questo si può fare ad esempio sfruttando l'uguaglianza di due opportuni triangoli rettangoli. Precisamente, detti P e Q due punti rispettivamente sulla retta r e sulla sua perpendicolare, e H, T le loro proiezioni sull'asse x, i triangoli OHP e QTO sono uguali, pur di scegliere P e Q in modo che OH e TQ abbiano entrambi lunghezza 1. Ora, se si considerano i rapporti tra i due cateti in ciascun triangolo e si tiene conto dei segni delle pendenze, si ottiene la relazione cercata. Comunque è formativo *dimostrare* il risultato anche per via analitica, ad esempio ricorrendo al teorema di Pitagora.

Invece l'uguaglianza delle pendenze di due rette parallele è immediata e la sua dimostrazione ci sembra didatticamente poco significativa.

Resta da discutere l'intersezione tra due rette e la sua descrizione analitica mediante un sistema di equazioni. Il lavoro da fare non è molto, visto che gli studenti hanno già esaminato nella classe prima gli aspetti algebrici e la tecnica risolutiva per sostituzione; pertanto basterà curare soprattutto l'*interpretazione* geometrica.

A questo punto i ragazzi dovrebbero disporre degli strumenti di base per operare con la retta nel piano cartesiano e, in particolare, per scrivere l'equazione dell'asse di un segmento e calcolare la distanza di un punto da una retta. Per determinare quest'ultima, preferiamo ricavare volta per volta la proiezione ortogonale del punto sulla retta, senza ricorrere alla formula che tutti i testi riportano ma che poi gli studenti presto dimenticano.

Altre questioni significative sono determinare il baricentro, l'ortocentro o il circocentro di un triangolo di vertici assegnati. Anzi, l'equazione della retta costituisce un efficace strumento proprio per *dimostrare* per via analitica l'esistenza dell'ortocentro: come si discute in [Villani, 2006], non si dovrebbe utilizzare il metodo delle coordinate solo per calcolare e non si dovrebbe dimostrare solo nel contesto della geometria sintetica.

Queste e altre questioni sono raccolte nel **foglio di attività 3**, che offre una sintesi sull'argomento.

I modelli lineari

L'approccio seguito fin qui è quello della *geometria analitica*, ossia la retta è stata considerata come luogo di punti e, fissato un sistema di coordinate cartesiane, è stata messa in corrispondenza con un'equazione lineare in due incognite.

D'altra parte la retta si può pensare anche come *grafico* di una funzione polinomiale di primo grado e si può adottare ad un livello intuitivo questo punto di vista per modellizzare semplici problemi di scelta, come il confronto tra due tariffe per il parcheggio. Questi esempi costituiranno un riferimento su cui lo studente potrà contare più avanti per comprendere meglio il lavoro con le funzioni e i grafici.

A conclusione di questo segmento del percorso si può assegnare una prova, come verifica 1, che è mostrata nel paragrafo 3.1, assieme a tutte le prove a cui si fa riferimento in questo capitolo.

2.3.2 Utilizzare davvero funzioni e grafici

La nozione di funzione è centrale nel curricolo di matematica della scuola secondaria di secondo grado, ma *quando* introdurla e con quali *obiettivi*?

Ci sembra che il momento adatto per iniziare ad utilizzare il *linguaggio* delle funzioni sia dopo l'avvio del secondo anno, sostanzialmente per due ragioni. Innanzitutto gli studenti hanno così avuto il tempo di prendere confidenza con alcuni fondamentali oggetti matematici coinvolti - ossia tabelle, rappresentazioni grafiche e formule – secondo le modalità discusse nel percorso della classe precedente. In secondo luogo, poiché i ragazzi sono più maturi per apprezzare il livello di astrazione e di formalizzazione richiesto.

I libri di testo spesso introducono le funzioni nella classe prima e le utilizzano per interpretare, anche graficamente, equazioni e disequazioni di *primo grado*. Ma perché introdurre un linguaggio che ha un vasto ambito di applicazione se poi lo si utilizza solo nel caso specifico delle funzioni lineari? Anzi, se lo studente dispone solo di un tipo di grafico può essere indotto a codificare specifiche regole operative e ad applicarle senza realmente comprenderne le ragioni e la portata; in tal caso il nuovo punto di vista offre un'alternativa a quello algebrico ma non lo arricchisce davvero.

Eventualmente si può anticipare qualche aspetto delle funzioni nella classe prima, se serve per affrontare lo studio della *fisica;* tuttavia è bene tener presente che gli studenti dovrebbero avere già alcune idee sull'argomento, poiché compare negli Obiettivi specifici di apprendimento delle Indicazioni nazionali al termine della classe terza della scuola secondaria di *primo* grado:

> *[…] usare il piano cartesiano per rappresentare relazioni e funzioni empiriche o ricavate da tabelle, e per conoscere in particolare le funzioni del tipo $y = ax$, $y = a/x$, $y = ax^2$, $y = 2^n$ e i loro grafici e collegare le prime due al concetto di proporzionalità*.

Arriviamo così alla seconda questione posta all'inizio del paragrafo: con quali obiettivi affrontare il tema delle funzioni e dei grafici nel primo biennio? Secondo noi, soprattutto per *modellizzare* semplici situazioni e per *interpretare* equazioni e disequazioni. Ma anche per disporre di un *linguaggio* efficace ed univoco, e per sviluppare uno strumento che consenta di affrontare questioni del tipo: è vero che se $a < b$ *allora* $a^2 < b^2$?

Gli elementi di base

Si può presentare la funzione come *macchina* input-output, schema proposto perfino in vari testi universitari, come il classico [Apostol, 1985], oltre che in alcuni manuali per la scuola secondaria di secondo grado, ad esempio in [Paola et al., 2014].

Presto, però, va pensata come *legge* che associa ad ogni elemento di un insieme un elemento di un altro insieme, e vanno introdotti i simboli per descriverla.

A rigore, questa caratterizzazione non si può considerare una definizione, anche se lo era per Dirichlet nella prima metà dell'Ottocento; d'altra parte, ci sembra prematuro proporre allo studente del primo biennio la caratterizzazione attuale come terna costituita da due insiemi e da un sottoinsieme del loro prodotto cartesiano. Infatti, come è evidenziato in [Sfard, 1992] e [Malara, 2009], il percorso di apprendimento dovrebbe seguire qualche tappa dell'evoluzione storica del concetto, non invertirne l'ordine. Anzi, le concezioni che mostrano i ragazzi sul tema spesso rispecchiano quelle dei matematici che hanno operato tra il diciassettesimo e il diciannovesimo secolo; ad esempio, per molti studenti la funzione è solo una qualsiasi espressione analitica, proprio come pensava Eulero tre secoli fa.

In quest'ottica non ci sembra opportuno introdurre la rappresentazione sagittale, almeno finché non si parla di suriettività o di iniettività; questioni che si possono affrontare tranquillamente nel secondo biennio. È più importante che gli studenti prendano confidenza con il linguaggio così introdotto e ne apprezzino l'efficacia e l'espressività, magari mediante gli esercizi raccolti nel **foglio di attività 4**.

Tuttavia non si dovrebbe ricorrere unicamente ai simboli, altrimenti gli studenti potrebbero identificare il concetto di funzione con la sua rappresentazione simbolica ([Malara, 2009]); perciò è opportuno utilizzare anche il *registro grafico* e quello *numerico*, e dunque esaminare pure tabelle di valori.

Per iniziare si può tracciare per punti il *grafico* di una legge oraria, ad esempio $s(t) = 10t - t^2$, allo scopo di visualizzare con immediatezza le caratteristiche del moto; poi si può allargare lo sguardo ed analizzare elettrocardiogrammi[17], profili altimetrici… discutere il ruolo dei grafici nell'informazione ma anche costruirne alcuni, come si propone nell'**attività *Grafici***.

[17] Precisamente, sull'asse x è riportato il tempo mentre sull'asse y è riportata la differenza di potenziale registrata da elettrodi posti sul corpo e generata dall'attività del cuore.

Gli studenti dovrebbero disporre presto di un ulteriore strumento: le *funzioni base*, per utilizzare il termine adottato da Villani; nel primo biennio riteniamo che siano sufficienti la funzione costante e le funzioni x, x^2, $\frac{1}{x}$, $|x|$, ossia quelle citate nelle Indicazioni nazionali, ed inoltre x^3 e $\sqrt{x}$.

Come primo approccio, i ragazzi tracciano alcuni punti del grafico, prima su carta e poi mediante un foglio di calcolo, e *confrontano* quanto disegnato con il grafico di riferimento proposto nella **dispensa *Grafici delle funzioni base***. Quest'ultimo passo è necessario, dato che ci sono infinite funzioni il cui grafico passa per un numero finito di punti assegnati; anzi, non si dovrebbe perdere l'occasione per discutere "cosa succede" tra un punto e l'altro.

Nel contempo è importante che i ragazzi conoscano esempi di situazioni in cui intervengono tali funzioni speciali, sappiano individuare quelle che descrivono le relazioni di proporzionalità diretta ed inversa, e comprendano *come* esse operano. Ciò significa saper indicare (e giustificare) come varia $f(x)$ al variare di x e saper rispondere a domande del tipo:

se x raddoppia è vero che $f(x)$ raddoppia?

A questo punto del percorso gli studenti dovrebbero apprezzare le definizioni di grafico, immagine e zeri della funzione, riportate nella **dispensa *Funzioni: aspetti di base***. Anzi, dovrebbero riuscire a precisarle *loro stessi* assieme al docente, traducendo nel linguaggio simbolico le immagini mentali costruite grazie alle attività svolte.

Oltre a quelli indicati nella dispensa, non ci sembra che per ora servano altri termini; del resto, più che saper ripetere nuove definizioni, non è meglio saper *interpretare* un enunciato espresso nel linguaggio delle funzioni? Ad esempio:

traccia il grafico di una funzione f: $[0,5] \to \boldsymbol{R}$ *che verifichi la proprietà:* $\forall\, a, b \in [0,5]$ *tali che* $a < b$ *vale* $f(a) > f(b)$.

Leggiamo il grafico di una funzione

Interpretare equazioni e disequazioni mediante le funzioni e modellizzare sono questioni delicate. Pertanto conviene prima imparare a ricavare informazioni su una funzione dal suo grafico e, in particolare, a determinare le soluzioni di $f(x) = k$ e $f(x) \leq k$.

All'inizio è meglio lavorare con grafici tracciati su foglio *quadrettato* e relativi a funzioni delle quali non è nota l'espressione analitica. In questo modo i ragazzi sono indotti ad operare più *consapevolmente,* visto che la risposta si ottiene solo da un esame attento della figura e non da un calcolo meccanico.

Concretamente si tratta di un esercizio di *traduzione* in più passi, dal registro simbolico a quello grafico. Ad esempio, la condizione $f(x) > 2$ diventa in prima battuta: *i punti del grafico di f che stanno sopra la retta di equazione* $y = 2$; ma di solito la richiesta è: *per quali x vale*… perciò si deve compiere un ulteriore passo e considerare le ascisse dei punti individuati in precedenza.

È importante collocare alcune domande di questo tipo in un contesto reale. Ad esempio, si può analizzare lo sviluppo altimetrico di una gara ciclistica: così gli studenti possono contare anche sugli aspetti *semantici* e forse sono meno portati a confondere i valori assunti da x con quelli assunti da $f(x)$, visto che hanno il rassicurante significato rispettivamente di distanza percorsa e di quota.

Per consolidare il lavoro svolto, si può affrontare la questione *inversa*, ossia tracciare un possibile grafico che soddisfi specifiche condizioni assegnate sulla funzione ed espresse nel linguaggio simbolico; analizzare la situazione dai due punti di vista permette di comprendere meglio entrambi.

Tutti questi tipi di esercizi sono raccolti nel **foglio di attività 5** e alcuni di essi sono risolti nella **dispensa *Risoluzione del foglio 5***. Ma è utile ricorrere anche ad un software come GeoGebra; ad esempio, per visualizzare dinamicamente le soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ al variare del parametro k, come proponiamo nell'**attività** descritta nel file **FunzioniNumSol.ggb**.

Utilizziamo i nuovi strumenti: interpretare disequazioni e modellizzare

A questo punto del percorso gli studenti dovrebbero disporre di tutti gli elementi per interpretare semplici equazioni e disequazioni mediante le funzioni. Perciò si può compiere il passo finale e assegnare le funzioni mediante la loro *espressione analitica,* anche a tratti, e considerare dunque disequazioni della forma $f(x) \leq g(x)$, ad esempio $\sqrt{x} \leq x + 1$.

Per risolverle basta rappresentare il grafico delle funzioni f e g, e in questo modo ci si riconduce alle questioni discusse nella sezione precedente. Negli esempi che proponiamo, le coordinate dei punti di intersezione spesso si leggono direttamente dalla figura, ma si richiede comunque la verifica calcolando i valori delle due funzioni nel punto; altrimenti per determinarle basta risolvere un'opportuna equazione.

I riferimenti per questa parte del percorso sono il **foglio di attività 6** e la **dispensa *Risoluzione del foglio 6***, oltre all'**attività *Disequazioni e funzioni – con GeoGebra*** con il file **FunzioniDisequazioni.ggb**, che mostra come utilizzare GeoGebra per esplorare la situazione e per controllare la correttezza dei passi compiuti.

In definitiva, quale valutazione si può dare al nostro approccio alle equazioni e disequazioni?

Indubbiamente è impegnativo e richiede un'accurata programmazione delle varie fasi, ma ci sembra che l'investimento sia ampiamente ripagato poiché consente di:

- risolvere *rapidamente* vari tipi di equazioni e disequazioni; ad esempio, la disequazione $\frac{1}{x} < |x|$ non si risolve così agevolmente per via algebrica
- risolvere mediante un *unico* procedimento diversi tipi di equazioni e disequazioni, anche irrazionali e con moduli
- *visualizzare* globalmente la situazione; ad esempio, se si interpreta graficamente la disequazione $x^2 < 9$ ci si rende immediatamente conto che non è equivalente a $x < 3$
- ridurre la risoluzione di disequazioni a quella di *equazioni*
- *stimare* le soluzioni di equazioni, individuando per mezzo della figura un intervallo a cui la soluzione appartiene.

Peraltro, come abbiamo accennato nel paragrafo 2.1, questo approccio è promosso dall'UMI ed è previsto nelle Indicazioni nazionali:

> *Lo studio delle funzioni […] consentiranno di acquisire i concetti di soluzione […] delle disequazioni […] nonché le tecniche per la loro risoluzione grafica e algebrica.*

Osserviamo inoltre che gli strumenti così sviluppati dovrebbero permettere di modellizzare semplici situazioni e anche di riformulare nel nuovo e più potente linguaggio i modelli lineari discussi nel paragrafo 2.3.1. Un esempio è riportato nel **foglio di attività 6**.

Approfondimento. Magari più avanti nel percorso, si possono esaminare situazioni più articolate, quali il calcolo dell'IRPEF descritto nell'**attività *IRPEF*** con il file **Irpef.xlsx**, nella quale è citato l'articolo 53 della Costituzione.

Uno sviluppo: trasformare grafici

Per disporre di una classe più vasta di grafici, si possono costruire, a partire dal grafico di una data funzione f, quelli delle funzioni $f + c$, $-f$ e $|f|$.

In una prima fase si può esplorare come viene trasformato il grafico di qualche funzione base f. A regime l'obiettivo è che lo studente sia in grado di riconoscere il tipo di trasformazione *direttamente* dall'espressione analitica della funzione, anche nel caso in cui ad una stessa funzione siano applicate più trasformazioni.

Al lavoro su carta è utile affiancare poi l'esplorazione mediante un software, ad esempio con l'**attività** descritta nel file ***Traslazioni.ggb***[18].

Si possono così modellizzare situazioni più ricche e risolvere una classe più ampia di disequazioni, come quelle che compaiono nel **foglio di attività 7**, ma anche interpretare questioni più articolate nel linguaggio delle funzioni, ad esempio quella proposta in un **video**[19] realizzato con il Laboratorio DiCoMat.

Tuttavia le abilità operative non bastano: è bene che i ragazzi sappiano *giustificare* i principali passi che compiono, in particolare nella risoluzione di equazioni e disequazioni. Infatti, come sostiene Habermas in [Habermas, 2001], non si conosce davvero se non si sanno fornire le ragioni.

> *Noi conosciamo fatti e possediamo un sapere su di essi soltanto quando, contemporaneamente, sappiamo perché i giudizi corrispondenti sono veri. Altrimenti parliamo di sapere intuitivo o implicito, di un sapere pratico di come si fa qualcosa. Si può benissimo intendersi di qualcosa senza sapere che cosa è che costituisce queste competenze. Invece l'espresso sapere qualcosa è implicitamente legato a un sapere perché e rimanda, per questo, a potenziali giustificazioni.*

2.3.3 Un caso notevole: il secondo grado

Nell'ambito del tema *Funzioni e grafici* abbiamo già incontrato semplici equazioni di secondo grado e le abbiamo interpretate mediante le funzioni; anzi, ancora nella classe prima abbiamo risolto alcune equazioni di grado superiore al primo ricorrendo alla scomposizione in fattori e alla legge di annullamento del prodotto.

Ora intendiamo affrontare la questione in modo sistematico e discutere il caso generale; prima però diamo uno sguardo alle radici.

Radici: un'occasione per fare algebra

È quanto sostengono le Indicazioni nazionali, dato che alle radici numeriche si applicano le stesse proprietà formali del calcolo con i polinomi: ad esempio, l'espressione numerica $(\sqrt{2}+1)^2$ si sviluppa in modo esattamente analogo all'espressione algebrica $(b+1)^2$.

Premesso ciò, si deve decidere quali aspetti considerare. Secondo noi, nel primo biennio basta che lo studente operi con radici quadrate

---

[18] Realizzato da Katia Danzi.

[19] http://laureescientifiche.science.unitn.it/simulazione_risorse/quesito-19.html

e con radici cubiche, disponga della proprietà della moltiplicazione di radici (ossia $\sqrt{a}\ \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ per ogni a, $b \geq 0$), ne intuisca la ragionevolezza per il legame con le proprietà delle potenze e la sappia dimostrare. Inoltre vorremmo che sapesse giustificare mediante un controesempio che non vale un'analoga proprietà per l'addizione, o, in altri termini, che la funzione radice quadrata non è lineare.

Nel primo biennio non servono ulteriori proprietà, ed è bene che i ragazzi ne siano consapevoli: ad esempio, il "portar fuori" che compare nei libri di testo non è altro che un'applicazione immediata della legge della moltiplicazione, e dunque è superfluo codificarla come regola; anzi, è fuorviante per l'idea di matematica che suggerisce. Per ragioni analoghe non ci sembra opportuno discutere la razionalizzazione del denominatore. Del resto, le stesse Indicazioni nazionali si premurano di precisare che

> *L'acquisizione dei metodi di calcolo dei radicali non sarà accompagnata da eccessivi tecnicismi manipolatori.*

Piuttosto gli studenti dovrebbero saper utilizzare la definizione di radice per ricavare da una formula una variabile in funzione delle altre: la definizione diventa così uno *strumento* per fare affermazioni significative, non è ridotta ad un enunciato da ripetere per assolvere il *contratto didattico*[20]. Tutti questi aspetti intervengono nel **foglio di attività 8**, in cui volutamente compaiono calcoli solo con radici *numeriche*, ad eccezione dell'inversione di formule.

Vogliamo concludere questo breve esame degli aspetti di calcolo con due considerazioni.

Una è che non c'è fretta di introdurre la notazione esponenziale per le radici: lo si può fare più avanti nell'ambito della funzione esponenziale, quando i nuovi simboli non sembreranno calati dall'alto ma saranno *motivati* dalla decisione di preservare la proprietà caratterizzante di tale funzione.

Inoltre, in questa prospettiva, si possono posticipare tranquillamen-

---

[20] Il *contratto didattico* è stato introdotto da G. Brousseau nell'ambito della Teoria delle situazioni didattiche. In [Brousseau, 1986] l'autore lo definisce come

> *l'insieme dei comportamenti dell'insegnante che sono attesi dall'allievo e l'insieme dei comportamenti dell'allievo che sono attesi dall'insegnante.*

Di questa sorta di contratto fanno parte soprattutto regole non scritte e convenzioni mai esplicitate che vengono accettate dal docente e dallo studente. Ad esempio, nel tentativo di imitare il linguaggio utilizzato dal docente o dal libro di testo, lo studente può essere indotto ad esprimersi in una forma analoga, ma senza preoccuparsi di fare affermazioni corrette.

te al secondo biennio i classici esercizi che richiedono di determinare l'insieme di definizione di funzioni irrazionali, in un contesto più *ricco* in cui si confrontano diversi tipi di funzioni e comunque sulla base di *motivazioni* "concrete", come quella di stabilire per quali valori della velocità v è definita la quantità di moto relativistica

$$q(v) = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Oltre il calcolo

Perché introdurre le radici? Cominciamo con l'osservare che le ragioni sono di natura teorica, dato che nella pratica le misure coinvolgono solo numeri razionali.

Per lo studente del primo biennio una motivazione può essere il fatto che $\sqrt{2}$ è lunghezza della diagonale del quadrato di lato 1, e questo è un risultato di rilevanza storica.

Inoltre $\sqrt{2}$ rappresenta il rapporto, teorico, tra i lati di un foglio di *formato A4*: si ottiene tale numero richiedendo di dividere "a metà" un rettangolo in modo che ciascuno dei due rettangoli ottenuti sia simile a quello di partenza, come è illustrato nell'attività M@t.abel *Il foglio A4*[21]. Merita far osservare ai ragazzi che però nella *pratica* le misure del foglio sono codificate da norme internazionali e non coincidono esattamente con quelle teoriche previste.

D'altronde $\sqrt{2}$ è un numero che ha uno sviluppo decimale infinito e non periodico, come si può dimostrare *per assurdo*, in accordo con quanto prevedono le Indicazioni nazionali. Si può proporre di determinare alcune cifre del suo sviluppo decimale, o di quello di un altro numero irrazionale, e lo si può fare mediante l'**attività** descritta nel file RadiciStima.xlsx, seguendo ancora il suggerimento della normativa:

> *Lo studio dei numeri irrazionali […] fornirà un'occasione per affrontare il tema dell'approssimazione.*

D'altra parte è importante che lo studente non confonda la radice con il *procedimento* per stimarla, ma arrivi a pensarla direttamente come *oggetto* matematico ben preciso. Infatti, come spiega A. Sfard in [Sfard, 1991], nella fase iniziale della costruzione di un concetto prevale una visione procedurale; ma poi, per affrontare situazioni via via più articolate, è opportuno riferirsi alla nozione matematica come fosse una cosa reale e manipolarla senza occuparsi dei suoi dettagli.

[21] http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/il-foglio-a4/

Per favorire tale transizione, nel caso delle radici si può richiedere di tracciare alcuni segmenti che abbiano misura irrazionale: ad esempio, $\sqrt{17}$ si ottiene considerando l'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha cateti di lunghezza 1 e 4; l'aspetto rilevante è che il disegno mostra *direttamente* l'oggetto, non un processo come avveniva invece nell'attività precedente.

Approfondimento. La radice di due è anche il tema del libro [Rittaud, 2014]. Nella **lettura *Radice di due*** indichiamo le parti del testo che ci sembrano più significative per gli studenti: dal rettangolo "diagonale", che Vitruvio propone come modello di atrio ideale, all'introduzione del formato di carta ottimale, stabilito *per legge* durante la rivoluzione francese.

Equazioni di secondo grado: dai modelli al completamento del quadrato

Varie situazioni si prestano ad essere modellizzate mediante equazioni di secondo grado.

Il lato di un rettangolo è sezione aurea del semiperimetro; se il semiperimetro ha lunghezza 1, quale lunghezza hanno i lati?
Stabilire quale interesse annuo si deve applicare in regime di capitalizzazione composta per aumentare del 3% il capitale in due anni.
In un moto uniformemente accelerato, in quale istante è raggiunta una posizione fissata?

Sulla base del lavoro proposto nella classe prima, ci aspettiamo che i ragazzi non abbiano difficoltà a schematizzare questi semplici problemi mediante equazioni. Ma poi come risolverle?

Abbiamo già esaminato i casi speciali $ax^2 + bx = 0$ e $ax^2 + b = 0$, che i libri di testo si ostinano ad indicare con nomi specifici. Perciò ora rimane da discutere il caso generale. Nella fase iniziale, il *completamento del quadrato* ci sembra un approccio formativo e utile. Formativo poiché permette di fare algebra, nel senso di manipolare un'espressione in vista di un obiettivo; utile poiché interviene in diversi contesti, come nella scrittura dell'equazione della circonferenza nella forma espressiva $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ ma anche nella ricerca di primitive di funzioni razionali.

Approfondimento. Il completamento del quadrato ammette una significativa interpretazione geometrica, impiegata dagli algebristi arabi nel nono secolo per dimostrare la correttezza delle soluzioni di alcuni tipi equazioni di secondo grado, ricavate per via algebrica (anche se mediante un approccio retorico, ossia senza ricorrere ai simboli). Esaminiamo l'approccio nella **lettura *Le equazioni di secondo grado nella storia*** attraverso autorevoli riferimenti, tra cui il classico testo di storia della matematica [Boyer, 1990].

Approfondimento. Magari più avanti nel percorso, si può implementare mediante un foglio di calcolo la risoluzione della generica equazione di secondo grado: è un'occasione per utilizzare la funzione fondamentale *SE*, che rappresenta una delle istruzioni di base della programmazione. L'**attività** è realizzata nel file RisoluzioneEquazione2grado.xlsx.

Un esempio di verifica sulle funzioni, sul calcolo con le radici e le manipolazioni algebriche relative alle equazioni di secondo grado è verifica 2. Ancora una volta abbiamo scelto di proporre una prova che verte su più argomenti e che coinvolge diverse abilità.

Non solo calcoli

Applicando il completamento del quadrato al generico polinomio di secondo grado si può ricavare la formula risolutiva dell'equazione corrispondente. È un procedimento ampiamente descritto nei libri di testo, perciò si può assegnare come lettura individuale agli studenti, per sviluppare la loro autonomia.

Si può poi allargare lo sguardo e considerare semplici equazioni fratte ed equazioni che contengono un parametro, allo scopo di consolidare l'abilità di *manipolare* espressioni algebriche ma anche di distinguere il ruolo del parametro da quello dell'incognita.

Il lavoro si completa con la modellizzazione di situazioni di vario tipo mediante equazioni di secondo grado.

Le funzioni polinomiali di secondo grado

Per iniziare, si possono *investigare* alcune caratteristiche del grafico (simmetria, immagine, massimi o minimi) e il significato geometrico dei coefficienti con l'**attività** ***Grafico di funzioni polinomiali di secondo grado*** e il file Grafico2Grado.ggb. Si può poi costruire una formula per il punto di massimo (minimo): basta interpretare tale punto come media degli zeri della funzione e osservare che l'espressione trovata vale anche quando la funzione non ha zeri; in questo secondo caso basta la verifica in casi specifici, anche se è bene che i ragazzi abbiano chiaro che ciò non costituisce una dimostrazione.

Un primo traguardo è tracciare il grafico di tali funzioni a partire da alcuni punti *notevoli,* ovvero le eventuali intersezioni con l'asse x, il punto in cui la funzione assume il valore massimo[22] (minimo), l'intersezione con l'asse y e il suo simmetrico rispetto all'asse di simmetria; ma

[22] Talvolta si utilizzerà il nome *vertice* della parabola, anche se è un termine proprio della geometria analitica. Non riteniamo sia un problema, purché lo studente sappia la differenza tra i due punti di vista.

conviene anche determinare qualche altro punto, così da realizzare un disegno più preciso.

Poi si possono interpretare equazioni e disequazioni di secondo grado mediante le funzioni ed analizzare semplici situazioni in cui intervengono funzioni polinomiali di secondo grado, come nel **foglio di attività 9** e nell'attività **Lancio.ggb**[23], nella quale si visualizza il moto di un grave. Ci aspettiamo che gli studenti riescano ad affrontarle in modo *autonomo*, grazie a quanto hanno appreso nel contesto più generale delle funzioni e dei grafici.

A questo punto, perché non sfruttare gli strumenti così acquisiti per risolvere semplici problemi di ottimizzazione?

Una questione classica è discussa nell'attività *Rettangoli di area massima*: si effettuano delle prove con rettangoli disegnati sul foglio di carta, si investiga dinamicamente la situazione mediante una *cordicella* e poi si esplora il problema con il file **Isoperimetrico1.ggb**. È un lavoro fondamentale per comprendere quale sia la richiesta di un problema di ottimizzazione e per rendersi conto che non basta esaminare casi specifici ma è *necessario* discutere cosa accade al generico rettangolo.

Per compiere quest'ultimo passo, gli studenti costruiranno la funzione che esprime l'area del rettangolo in termini della lunghezza di uno dei suoi lati; non è immediato per tutti, e per questo abbiamo realizzato il file **Isoperimetrico2.ggb**, che aiuta a collegare i rettangoli in esame alla funzione introdotta.

L'attività è dettagliata nella traccia proposta, ma ai ragazzi se ne può mostrare solo una parte, per lasciare loro la *libertà* di esplorare e di discutere, come abbiamo osservato in varie occasioni; in ogni caso, si inizia dal lavoro in piccoli gruppi per arrivare alla formalizzazione mediata dal docente. Questo approccio ha come quadro di riferimento la *teoria della mediazione semiotica,* sviluppata da Bartolini Bussi e Mariotti e illustrata con chiarezza in [Bartolini Bussi e Mariotti, 2009], e si ispira al pensiero della Castelnuovo, che attribuiva un ruolo fondamentale alla manipolazione di *oggetti materiali*.

Si possono poi proporre altri semplici problemi di ottimizzazione che conducono a funzioni di secondo grado, anche in ambito non geometrico, come massimizzare il ricavo nella vendita di un prodotto al variare del prezzo e del numero di potenziali clienti; anche se il modello è molto semplificato, è una situazione che motiva i ragazzi.

Un ultimo aspetto che val la pena discutere è la *struttura* della fun-

[23] Realizzato da Michele Avancini. Il contesto è illustrato in un quesito del foglio di attività 9.

zione polinomiale di secondo grado: si può citare in classe il teorema del resto[24] e utilizzarlo per mostrare che, se la funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ ha zeri x_1 e x_2, allora si può scrivere nella forma $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. È un risultato di cui è bene gli studenti dispongano a lungo e rafforza l'idea che conoscere i polinomi vuol dire anche sapere *come* sono fatti e non solo come si manipolano algebricamente.

Infine, si può assegnare una verifica sul secondo grado come verifica 3. Essa tiene conto sia degli aspetti algebrici che di quelli relativi alle funzioni.

2.3.4 Mettere in gioco la probabilità

Le Indicazioni nazionali per il primo ciclo di istruzione e quelle per i licei introducono ad ogni livello scolastico il calcolo delle probabilità e ne precisano vari aspetti: dalle prime valutazioni, anche quantitative, per la scuola primaria, fino alle distribuzioni di probabilità per la classe quinta liceo. Comunque da tempo Prodi sosteneva l'importanza e la necessità di affrontare il tema; lo dice con chiarezza in [Prodi et al., 2003, pag. 8], di cui è citato un estratto nel paragrafo 2.1.

Il percorso che ora ci proponiamo di illustrare si fonda sulle riflessioni e sulle sperimentazioni condotte da diversi anni dal Laboratorio DiCoMat e descritte nell'ipertesto [Cappello e Mazzini, 2017], da cui sono tratti gran parte dei materiali, talvolta con alcune modifiche.

Come si noterà, a questa sezione riserviamo considerazioni più estese che ad altre parti del percorso. La ragione è che la probabilità è un argomento di cui gli insegnanti non hanno generalmente grande esperienza didattica e che non tutti hanno affrontato negli studi universitari.

La probabilità è dappertutto

Giochi d'azzardo, alcol test e test clinici, numeri ritardatari, casi giudiziari... sono contesti in cui la probabilità interviene in modo significativo e che suscitano generalmente l'interesse degli studenti. Pertanto l'idea è di presentare in dettaglio alcune di queste situazioni e condensarle in domande del tipo:

> *se punto sui numeri ritardatari al gioco del Lotto, ho più probabilità di vincere?*

Lo scopo è far emergere le *convinzioni* degli studenti, in modo da

[24] Dato un polinomio p nella variabile x, di grado maggiore o uguale ad 1, il resto della divisione di p per $x - a$ è $p(a)$.

poter radicare con continuità le nuove conoscenze su quelle effettivamente possedute. Le risposte razionali si costruiranno più avanti nel percorso, dopo aver introdotto gli strumenti matematici per farlo.

Ancora più coinvolgente è realizzare un laboratorio di giochi d'azzardo (simulati!), in cui gli studenti effettuano più giocate alla roulette, al 10 e Lotto e al gioco del Chevalier de Méré… e tengono traccia di quanto perdono o guadagnano in ogni partita. Tra l'altro, i materiali richiesti non costano molto e si possono reperire facilmente.

Per realizzare questi intenti si può far riferimento alla **lettura *Motivazioni alla probabilità*** e alle **attività *Situazioni di incertezza* e *Casinò***.

I numeri del caso: prime valutazioni di probabilità

Il passo successivo è costruire in modo più organizzato semplici modelli probabilistici mediante i quali fare delle *valutazioni* di probabilità, ossia esprimere mediante un *numero* il "grado di fiducia" che si attribuisce al realizzarsi di un evento, sulla base delle informazioni di cui si dispone. Il nostro problema guida riguarda il lancio di due dadi:

> *su quale punteggio, dato dalla somma dei numeri che escono su ciascun dado, scommetteresti?*

Mettiamoci le *mani!* In un contesto laboratoriale i ragazzi lanciano materialmente i dadi, esaminano gli esiti, schematizzano la situazione, formulano congetture e provano a *giustificarle*. Poi, mediante una discussione collettiva, si può modellizzare il problema con una tabella a doppia entrata e *decidere* di valutare la probabilità mediante lo schema classico.

In alternativa si può iniziare da un problema ancora più stimolante: stabilire se nel lancio di tre dadi conviene scommettere sul *9* oppure sul *10*. Il quesito è legato alla zara, un gioco medioevale citato da Dante nel sesto canto del Purgatorio, ed è ampiamente discusso in vari articoli, ad esempio in [Barra, 2002, pag. 11] e [Barra e Gallo, 2017].

Su queste basi gli studenti possono affrontare in modo più autonomo i quesiti proposti nel **foglio di attività 10**, dei quali è fornita la risoluzione in una dispensa: si tratta ancora di dadi, ma anche di lanci di monete, del gioco della morra… Ulteriori esercizi, per il consolidamento, si trovano di solito in ogni libro di testo.

Questi esercizi e semplici problemi sono importanti soprattutto perché promuovono lo sviluppo di varie abilità, tra cui riconoscere la simmetria della tabella e scegliere in modo *flessibile* il modello: per i lanci di monete spesso conviene utilizzare un grafo ad albero, mentre per i lanci di dadi a volte è più efficace ricorrere ad una tabella "contratta", ossia distinguere su ciascun dado solo i due eventi *esce un numero pari* e *esce numero dispari*.

C'è un altro aspetto che merita attenzione: alcune rappresentazioni grafiche mostrano che la probabilità di un evento è una *misura* dell'insieme che lo rappresenta; è un fatto notevole, che utilizzeremo anche nel secondo biennio e nella classe quinta.

Approfondimento. Se c'è tempo, vale la pena investigare il *giudizio di probabilità* mediante alcune attività di tipo operativo-sperimentale.

- *Lanciamo questa gomma; su quale faccia scommettereste?*
  In questa situazione non siamo portati a ritenere che gli esiti siano tutti equiprobabili, a differenza di quanto generalmente ci sentiamo di dire per il lancio di un dado. Ma facciamo un passo indietro e proviamo ad esaminare più a fondo lo stesso lancio del dado: l'equiprobabilità è suggerita dalla simmetria dell'oggetto, dall'omogeneità dei materiali di cui è costituito… tuttavia, si può stabilire con certezza se il dado ha davvero queste proprietà? Non proprio; pertanto dobbiamo concludere che l'equiprobabilità non è una verità assoluta, ma in fondo è una nostra *decisione*, che prendiamo sulla base di valutazioni soggettive.
- *Consideriamo questo mazzo costituito da 40 carte. Qual è la probabilità di estrarre un asso?*
  L'insegnante prepara il mazzo sostituendo i 4 assi con altrettante carte di diverso valore, ma non lo comunica agli studenti. Così saranno stupiti nel constatare che non esce mai un asso, anche se si effettuano molte prove. Li stiamo ingannando? In realtà intendiamo semplicemente veicolare un concetto ben preciso: il valore di probabilità che una persona attribuisce ad un evento dipende dalle *informazioni* di cui dispone, non dall'evento in sé. In questo senso va intesa la famosa affermazione di de Finetti ([De Finetti, 1974, Introduzione]):

  [...] la mia tesi, paradossale e un po' provocatoria, ma genuina, è che semplicemente la probabilità non esiste.

  Comunque il ruolo che rivestono le informazioni nel formulare un giudizio non interessa solo la matematica, ma riguarda anche altri ambiti, ad esempio l'insider trading[25]. È bene farlo osservare agli studenti. Addirittura, usarle in modo scorretto può costituire reato, come attesta il decreto legislativo n. 58 del 24 febbraio 1998, testo unico delle disposizioni in materia di intermediazione finanziaria.

  Al termine di questa fase del percorso, gli studenti dovrebbero aver

[25] Ossia l'acquisto o la vendita di titoli finanziari (ad esempio, azioni) di una data società, effettuato da chi dispone di informazioni che non sono di dominio pubblico, grazie alla posizione che ricopre in quella società o alla propria professione.

sviluppato una certa confidenza con i nuovi oggetti matematici e dovrebbero riuscire a proporne essi stessi una prima formalizzazione, con la guida del docente. In questo contesto ci sembra prematuro introdurre l'approccio assiomatico alla probabilità e parlare di enti quali spazio campionario e misura di probabilità; piuttosto preferiamo assumere come primitivi i termini *evento*, *evento certo* ed *evento impossibile*, e chiarire il loro significato mediante alcuni esempi.

Sono le idee alla base della **dispensa** ***Valutazioni di probabilità***, che si discosta dai libri di testo anche per il fatto di essere proposta solamente *dopo* l'esplorazione e non all'inizio del percorso sul tema.

Approfondimento. L'attenzione agli aspetti concettuali prosegue con il **foglio di attività 12**, del quale è proposta la risoluzione in una dispensa. Negli esercizi si discute, in particolare, l'equiprobabilità e la scelta dei possibili esiti di un esperimento e si focalizza l'attenzione sulla comunicazione e l'argomentazione.

C'è ancora un aspetto che è importante considerare: per determinare il numero dei "casi favorevoli" o dei "casi possibili", a volte è utile ricorrere al *contare gli elementi di un insieme,* ossia ai procedimenti che abbiamo sviluppato all'inizio del percorso della classe prima. Li utilizzeremo anche nelle prossime sezioni, ad esempio per valutare la probabilità di vincere il primo premio al SuperEnalotto o la probabilità di ottenere un *full* nel gioco del poker.

La probabilità alla prova: esperimenti e simulazioni

Fin qui abbiamo esaminato come effettuare valutazioni di probabilità e quali attenzioni prestare. Ma quali informazioni danno i "numeri del caso", ossia i valori che forniscono i nostri modelli? In altre parole

cosa succede nella pratica e cosa si può prevedere sugli esiti di un esperimento casuale?

Per comprenderlo è utile iniziare con esperimenti *materiali*, tuttavia ci si accorge presto che per ottenere risultati significativi servono molte prove e dunque conviene ricorrere ad un foglio di calcolo.

Diciamo subito che le prove e le simulazioni dovrebbero accompagnare fin dall'inizio la valutazione teorica della probabilità, dato che i due punti di vista si arricchiscono a vicenda; e se in questo testo ne parliamo in sezioni diverse, è solo per ragioni di chiarezza espositiva. Inoltre è bene tener presente che l'interpretazione degli esiti è delicata e che il calcolatore, a rigore, *non* può generare numeri casuali, anche se produce delle sequenze di numeri che ai fini pratici esibiscono (quasi) lo stesso comportamento.

Stabilito ciò, si può affinare l'esame del lancio di due dadi come proponiamo nell'**attività *Lancio di due dadi*** con il file **DueDadi.xlsx**. L'idea di fondo è di elaborare gli esiti mediante le *frequenze relative* ed è riportata nella traccia di lavoro, ma sarebbe meglio emergesse da una discussione collettiva in classe, orchestrata dal docente. Mediante lo stesso approccio si dovrebbero tracciare le conclusioni, che condensiamo nella **dispensa *Risoluzione della questione del lancio di due dadi*** e visualizziamo nel file **DueDadiFrequenze.xlsx**.

Una formalizzazione per gli studenti del biennio è la **dispensa *Probabilità e frequenze***, che è coerente con quanto si legge nelle Indicazioni nazionali:

> *[Lo studente] apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica.*

Più in generale, questa parte del percorso ci sembra coerente con le considerazioni didattiche ed epistemologiche sui diversi approcci alla probabilità esposte in [Rossi, 1999] dalla docente che ha fatto parte della Commissione Brocca per la riforma del sistema scolastico negli anni '80 e '90.

Pensare in termini elementari: verso la legge della moltiplicazione

Restano ancora aperte alcune questioni poste all'inizio del percorso sulla probabilità, come quelle relative ai test clinici. Le affronteremo dopo aver mostrato che esprimere e *pensare* un evento in termini di eventi elementari permette di trattare più agevolmente varie situazioni articolate.

Per iniziare, si può esaminare la probabilità dell'*evento complementare* e poi passare ad esplorare la probabilità dell'unione di due eventi, ma senza introdurre il "teorema della probabilità totale": i libri di testo lo propongono in varie situazioni, tuttavia spesso è un'inutile complicazione poiché si può arrivare allo stesso risultato semplicemente contando i "casi favorevoli" e i "casi possibili" (dell'evento unione).

Concretamente il percorso che proponiamo è descritto nel **foglio di attività 13** e ha come filo conduttore una celebre questione posta a Pascal dal Chevalier de Méré nel 1654.

- La prima parte della richiesta riguarda la probabilità di ottenere almeno un *6* nel lancio di quattro dadi. Gli studenti dovrebbero presto accorgersi che contare i "casi favorevoli" è lungo e delicato, e così raccogliere il suggerimento di considerare l'evento complementare. Poi possono congetturare la relazione tra le probabilità dei due eventi e, assieme al docente, provarne la validità; si tratta di una *dimostrazione* formativa poiché coinvolge due proprietà di base della probabilità: il valore di probabilità dell'evento certo e l'additività della probabilità sulle coppie di eventi disgiunti.

- Tuttavia il contesto è interessante anche per un altro aspetto: permette di approfondire il linguaggio degli insiemi e il significato dei connettivi logici *non*, *e*, *o,* nonché di curare il passaggio da un registro di rappresentazione all'altro.
- Mediante gli strumenti così introdotti, i ragazzi dovrebbero essere in grado di discutere l'argomentazione fornita da Chevalier de Méré a sostegno delle sue valutazioni di probabilità relative al gioco proposto. È un buon investimento di tempo poiché gli errori che commettono gli studenti nel calcolo delle probabilità sembrano rispecchiare, fin troppo fedelmente, quelli commessi dai matematici nel corso della storia ([Paola et al., 2014]).

È arrivato così il momento di introdurre la *legge della moltiplicazione*, un risultato fondamentale che consente di risolvere efficacemente molte questioni, come determinare la probabilità che un test clinico fornisca risposte errate, conoscendo la sensibilità e la specificità del test oltre alla prevalenza della malattia.

Per (ri)scoprire assieme agli studenti il teorema, conviene considerare un modello più semplice, quello dell'*urna,* e calcolare la probabilità di estrarre, ad esempio, due palline di colore dato; naturalmente (… per il docente) si distinguerà tra due modalità: estrazione con reimmissione e senza reimmissione. Per cominciare si può determinare il valore cercato mediante una tabella a doppia entrata oppure contando le coppie che rappresentano i "casi favorevoli" e i "casi possibili". In seguito si modellizza il problema in maniera più efficiente e generale mediante un diagramma ad albero, pesando ciascun ramo con il valore di probabilità dell'evento corrispondente, e ricercando *sul grafo* una relazione tra la probabilità di estrarre le due palline e le probabilità elementari di estrarre le singole palline.

Questa formula rappresenta la legge della moltiplicazione e si può *giustificare* mediante un'analogia idrodinamica: il grafo si interpreta come un condotto per l'acqua e ogni valore di probabilità diventa la portata massima del tubo corrispondente, come illustrato in [Cappello e Mazzini, 2017, sezione 5.3]. Non si tratta di una deduzione rigorosa[26], tuttavia a scuola, come sosteneva de Finetti in [de Finetti, 1959]:

[26] La legge della moltiplicazione si dimostra immediatamente a partire dalla definizione di probabilità condizionata: $p(A|B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

[...] occorre far penetrare il perché dei risultati, non farne verificare l'esattezza [...] perché l'importanza dell'imparare deve essere subordinata a quella di capire.

Gli aspetti discussi in questa sezione sono *formalizzati* per lo studente del primo biennio nella **dispensa *Probabilità di eventi non elementari***. Esercizi di consolidamento sono proposti invece nel **foglio di attività 14** e sono commentati in una dispensa, ma se ne trovano di significativi anche nei libri di testo.

Ora i ragazzi dovrebbero disporre degli strumenti per esaminare *razionalmente* alcune delle domande poste all'inizio del percorso di probabilità e richiamate nel **foglio di attività 15**. Il materiale è arricchito da una dispensa che mostra la risoluzione di un quesito e da un **video**[27] realizzato con il Laboratorio DiCoMat, che può essere utilizzato anche in una modalità analoga alla *flipped classroom*: gli studenti analizzano autonomamente il filmato prima della lezione, affrontano i quesiti dello stesso tipo proposti nel foglio e poi li discutono in classe.

Eppure, come abbiamo già osservato, la conoscenza teorica non basta per comprendere cosa succede nella pratica, ma serve effettuare anche esperimenti materiali e simulazioni mediante un foglio di calcolo. Per questo proponiamo l'**attività *Monete ritardatarie*** con il file **MoneteRitardatarie.xlsm**.

Il punto di arrivo del percorso di probabilità per il primo biennio può essere l'**attività *Problema dei compleanni*** (il problema è poi risolto in una dispensa), nella quale si affronta il classico problema proposto da R. von Mises nel 1939, che ha applicazioni in vari ambiti. Suggeriamo di investigare la distribuzione delle date di nascita nelle varie classi dell'Istituto e solo in un secondo momento passare alla risoluzione formale.

Eventualmente quest'ultima si può posticipare al secondo biennio, per investire piuttosto più tempo nell'analisi del problema. Ad esempio, si può sondare l'ipotesi di equidistribuzione delle nascite nel corso dell'anno: secondo i dati ISTAT relativi al 2012, si va dalle circa 800 nascite in alcuni giorni alle quasi 2000 in altri; ciò aiuta a comprendere che le assunzioni alla base del modello non sono frasi da scrivere per assolvere il *contratto didattico*, ma sono nostre *decisioni*, che potrebbero anche discostarsi significativamente dalla realtà.

[27] https://youtu.be/-1xAxHO-UdQ

Mettere davvero la probabilità in gioco: i giochi d'azzardo

Perché affrontare il tema a scuola e perché farlo (anche) nell'ora di matematica?

Innanzitutto la questione ha *rilevanza sociale*, come traspare dalle letture iniziali, e può costituire uno spunto significativo per attività di Educazione Civica. Ma c'è di più: secondo uno studio del CNR [CNR, 2018], nel 2017 circa il 37% degli studenti tra i 15 e i 19 anni ha partecipato a giochi d'azzardo e, tra coloro che hanno giocato, circa il 7% ha un profilo di gioco considerato "problematico". Certo la questione è complessa e coinvolge aspetti che vanno ben oltre la matematica; d'altronde, secondo gli autori dello studio, *parlarne* in classe è utile, visto che ha fatto diminuire queste percentuali negli anni.

Un primo approccio al tema può essere l'attività "Casinò", che prosegue con la valutazione della probabilità di vincere ai giochi effettuati, come abbiamo discusso.

È già molto, ma se vogliamo che i ragazzi dispongano degli strumenti per esaminare criticamente le situazioni e prendano decisioni razionali, è opportuno introdurre la nozione di *gioco equo*. Fissato un evento (ad esempio, *esce il 6 nel lancio di un dado*) il docente propone di scommettere sulla sua realizzazione, fissa le puntate (ad esempio, 1 euro sull'uscita del 6 e 1 euro sulla non uscita) e le aggiusta progressivamente finché tutti accettano di partecipare. Così gli studenti stessi dovrebbero arrivare a formulare la condizione di equità, tenendo conto dei valori di probabilità che intervengono.

Si possono poi discutere alcuni esempi notevoli, magari quelli analizzati nella **dispensa *Equità di alcuni giochi***, per arrivare ad interpretare la somma trovata come *guadagno medio* atteso su "molte" partite, facendo ricorso all'approccio frequentista. Infine, per formarsi un'idea più chiara di cosa succede nella pratica, si può svolgere l'**attività *Guadagno al gioco*** con il file **Guadagno.xls** oppure esaminare uno dei **video**[28] realizzati dagli autori del progetto "Fate il nostro gioco".

Un esempio di verifica sul calcolo delle probabilità è **verifica 4**. In essa compaiono anche questioni relative al calcolo algebrico, in modo da considerare abilità di tipo diverso e indurre gli studenti ad effettuare la manutenzione di quanto affrontato.

[28] https://www.youtube.com/watch?v=638tHQuOMwc

Ulteriori approfondimenti

Concludiamo l'esame di questo segmento del percorso con alcuni materiali che lo integrano. I titoli sottolineati indicano le sezioni a cui si riferiscono, ma si possono collocare anche in momenti diversi.

- La probabilità è dappertutto
  Anche nella storia e nella *biologia*. I ragazzi possono approfondirlo attraverso le **letture** [Aczel, 2005, pag. 9-14] e [Castelnuovo, 2017, pag. 53-63].

- I numeri del caso
  A cosa serve ricavare un valore di probabilità se poi non si ha un'idea di *quanto* è "piccolo"?
  In effetti, sviluppare la sensibilità numerica è uno degli obiettivi del nostro percorso ed è un'abilità necessaria per prendere decisioni consapevoli, ad esempio nell'ambito del gioco d'azzardo. Cerchiamo di farlo con il **foglio di attività 11**, anche attraverso due **video** illuminanti, realizzati dal progetto *Fate il nostro gioco*[29] e proposti nella trasmissione televisiva Le *Iene*[30].

- La probabilità alla prova
  Come investigare più a fondo l'andamento degli esiti nel lancio di due dadi? Considerando numeri elevati di lanci (1000, 10.000…) e calcolando lo scarto tra le frequenze relative e i valori di probabilità corrispondenti.
  Per realizzare i nostri propositi è di grande utilità l'applicazione VBA[31], che permette di automatizzare ancora di più le prove, come avviene nell'**attività** ***Lancio di due dadi: approfondimento*** con il file **DueDadiApprofondimento.xlsm**.
  Si può proseguire osservando cosa succede nel lancio di tre dadi. L'**attività** è descritta nel file **TreDadi.xlsx** e i grafici che si ottengono costituiscono l'occasione per fare un cenno alla curva normale ([Barra, 2002]).
  C'è un'ulteriore schematizzazione grafica che illustra in modo espressivo l'andamento delle frequenze e che contribuisce, assieme agli altri esperimenti esaminati, a chiarire l'interpretazione frequentista della probabilità. È proposta nell'**attività** ***Lanci di monete*** ed è basata sull'articolo [Barra, 2017], che merita di essere esaminato.

- Pensare in termini elementari
  La probabilità interviene in diversi contesti, anche nelle aule di tribunale.

---

[29] https://www.youtube.com/watch?v=SOB_4PyhpN8
[30] https://www.youtube.com/watch?v=grpA_lnABT0
[31] Visual Basic for Application.

Alcuni esempi classici di uso distorto della legge della moltiplicazione sono presentati nella **lettura *Casi giudiziari***.

- Mettere la probabilità in gioco
  Non abbiamo ancora considerato il *10 e Lotto* e uno dei giochi che più attrae gli studenti: il poker. Si può organizzare un vero e proprio torneo, discutere, ad esempio, perché la *scala reale* vince sul *full* e così ricondursi a valutare la probabilità delle diverse configurazioni. Questa è in sintesi l'**attività *Probabilità nel gioco del poker***; il calcolo delle probabilità richieste è mostrato nella dispensa che la accompagna.

2.3.5 Dalle ombre alle figure simili

Ombre e carte geografiche per iniziare

Figure che hanno la *stessa forma* compaiono in vari contesti.

Ad esempio, per determinare in modo elementare l'altezza di una torre, si può piantare un'asta e misurare la lunghezza della sua ombra e di quella della torre; formalmente ciò significa considerare due triangoli rettangoli[32] che hanno gli angoli corrispondenti uguali e sfruttare la proporzionalità tra i loro lati. La questione si può presentare in classe come problema aperto. I ragazzi si confrontano tra loro e provano a risolverlo ricorrendo alle conoscenze di cui già dovrebbero disporre, visto che le Indicazioni nazionali per il primo ciclo prevedono tra gli Obiettivi di apprendimento al termine della scuola secondaria di primo grado:

> *Riconoscere figure piane simili in vari contesti e riprodurre in scala una figura assegnata.*

La situazione si può rendere più interessante considerando una piramide al posto della torre, come nel noto problema brillantemente risolto da Talete nel sesto secolo a.C., illustrato nella **lettura** [Odifreddi, 2013].

Un contesto analogo è quello delle carte geografiche: si può provare a ricavare la distanza *reale* tra due località fissate sulla mappa. In questo caso non si tratta di lavorare con i triangoli, ma di decifrare il significato di scala, ossia di comprendere cosa si intende con scritture del tipo *1:25.000*.

[32] Uno è il triangolo rettangolo che ha come cateti l'asta e la sua ombra, l'altro è il triangolo rettangolo che ha come cateti la torre (schematizzata con un segmento) e la sua ombra.

Poligoni simili

Attività come quelle che abbiamo descritto motivano a studiare figure che hanno la *stessa forma* e ad attribuire un nome alla caratteristica che le lega.

Per iniziare, si possono visualizzare coppie di poligoni di questo tipo, proiettando sul banco con un fascio di luce una figura realizzata con il cartoncino, in modo che il piano del cartoncino e quello della proiezione siano paralleli. Gli studenti misurano angoli e lati e provano a *formulare* una definizione di poligoni simili.

Il passo successivo consiste nel *sondare* le condizioni così trovate sugli angoli e sui lati: sono dipendenti oppure è necessario verificare entrambe per essere certi che i poligoni siano simili? Per i quadrilateri è necessario, come si prova abbastanza facilmente mediante due controesempi, mentre per i triangoli basta verificare l'uguaglianza degli angoli. Non ci sembra il caso di dimostrare quest'ultimo fatto e nemmeno di introdurre gli altri criteri di similitudine dei triangoli, visto che si può costruire un percorso sensato utilizzando solo il criterio sugli angoli e che le loro dimostrazioni sono troppo raffinate per lo studente del primo biennio. È meglio investire del tempo per costruire brevi *catene deduttive* ed investigare questioni più significative, come quelle che ora proponiamo.

Risultati significativi: perimetri, aree (e volumi) di figure simili

Il rapporto tra i perimetri di figure simili è uguale a quello tra le lunghezze dei lati corrispondenti, e il rapporto tra le aree è uguale al quadrato di quello tra tali lunghezze.

Il teorema relativo alle aree si può dimostrare in modo elementare nel caso dei triangoli, anzi se ne può proporre l'esame individuale dal libro di testo. Per i poligoni la dimostrazione completa prevede di curare vari dettagli, ma può bastare l'*idea* di suddividere il poligono in triangoli simili tracciando le diagonali relative ad un vertice, per utilizzare il risultato trovato prima. Ancora più articolata è la dimostrazione della relazione tra i volumi di solidi simili, ma ci si può accontentare di effettuare la verifica in casi semplici, ad esempio per il parallelepipedo.

Comunque, oltre a sistemare gli aspetti formali, è opportuno che i ragazzi *visualizzino* come effettivamente crescono le aree in funzione del lato, ad esempio disegnando quadrati di lato doppio, triplo…

La questione è legata ad uno dei tre *problemi classici dell'antichità*, la costruzione con riga e compasso del lato del cubo di volume doppio, che merita di essere illustrato brevemente in classe.

Ma i risultati sulle aree e sui volumi intervengono anche nell'argomentazione di Galilei contro l'esistenza dei giganti, tratta dai *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* del 1638. La esaminiamo nella **lettura** ***Cambiamento di scala***, che contiene anche il riferimento ad un video del PSSC[33], ormai datato ma didatticamente molto profondo.

Approfondimento. Si può investigare se gli esseri viventi nel crescere mantengono la stessa forma. Ad esempio, prendendo ispirazione dalla **lettura** [Castelnuovo et al., 1992, pag. 105-107], si può controllare se le foglie di una stessa pianta sono simili. Meglio se i dati sono raccolti direttamente dai ragazzi, che così sono indotti a discutere quali dimensioni considerare e sono più motivati ad elaborare le misure ottenute. L'intera esperienza è descritta e documentata nell'**attività *Crescita e forma in natura***.

Sono dunque vari gli aspetti che abbiamo introdotto nell'ambito delle figure simili. Per rielaborarli e consolidarli, oltre al libro di testo, proponiamo il **foglio di attività 16**.

Approfondimenti, ma non solo

Se si traccia l'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo, lo si suddivide in due triangoli rettangoli che sono simili tra loro e al triangolo di partenza; poi, sfruttando la proporzionalità tra i lati dei tre triangoli ottenuti, si possono ricavare immediatamente i teoremi di Euclide.

Ciò che è rilevante per noi è il *procedimento* mediante il quale si ricavano i due risultati, che consiste nell'interpretare una figura geometrica e nell'operare su di essa in vista di un obiettivo. Anche per questo non riteniamo indispensabile che lo studente ricordi i due teoremi; del resto, nella scuola secondaria essi intervengono in problemi che spesso si possono risolvere applicando più volte il teorema di Pitagora.

Un'altra questione interessante è la suddivisione di un segmento in un dato numero di parti uguali mediante riga e compasso. La discutiamo nell'**attività *Suddivisione di un segmento*** e nel file **SuddivisioneSegmento.ggb**, prima effettuando la costruzione mediante il software GeoGebra e poi dimostrandone la correttezza.

Come nelle altre attività, è cruciale che gli studenti *esprimano* anche verbalmente le proprie strategie, prima in piccoli gruppi e poi collettivamente con la guida dell'insegnante, che ha un ruolo *fondamentale* anche quando si lavora con un software di geometria dinamica. A tal proposito, nel manuale di didattica della matematica [Baccaglini, Di Martino, Natalini, Rosolini, 2018, pag. 168] si precisa:

[33] Physical Science Study Committee. Il video si può trovare all'indirizzo: https://www.youtube.com/watch?v=JFJgGm6TdcY

La costruzione di significati matematici con cui le attività consentono di mettersi in relazione, deve essere mediata dall'insegnante, che promuoverà processi di "decontestualizzazione" dei significati specifici legati al micromondo […]. A partire dalle produzioni individuali degli studenti di "testi situati" […], l'insegnante favorisce la produzione collettiva di "testi matematici" attraverso l'attività di verbalizzazione.

Una proporzione significativa, anche per ragioni culturali, è quella che definisce la *sezione aurea* di un segmento. Il valore di questo speciale rapporto si può ricavare risolvendo un'equazione di secondo grado ed interviene in diversi contesti, ad esempio nel triangolo isoscele che ha angoli alla base di ampiezza 72° oppure nel pentagono regolare.

Una ricca letteratura pretende di riconoscerla anche in contesti non matematici, quali la facciata del Partenone di Atene e il corpo umano "ideale", ma diversi studi hanno mostrato l'infondatezza di tali attribuzioni: se ne discute, ad esempio, in [Rosso, 2010] e in [Villani, 2003, pag. 55]. D'altra parte non si può verificare mediante misure che il rapporto tra segmenti sia esattamente uguale ad un dato numero, poiché ogni misura è inevitabilmente soggetta ad errori.

E il teorema di Talete?

Assieme al teorema di Pitagora, è uno dei risultati più *importanti* della geometria del piano ([Villani, 2003, pag. 181]) e interviene nella dimostrazione dei criteri di similitudine e di diverse altre proposizioni.

Inoltre traduce nel registro geometrico *un fatto* che si osserva nella realtà e che ha rilevanza storica: la lunghezza dell'ombra prodotta da un bastone è proporzionale alla lunghezza del bastone. Precisamente, i raggi solari sono rappresentati da rette parallele, il bastone da un segmento su una retta "trasversale", il terreno da un'altra "trasversale", e l'ombra del bastone dal segmento corrispondente su quest'ultima.

Per queste due ragioni può valere la pena accennare al teorema, anche se poi non lo utilizzeremo nello sviluppo del percorso.

2.3.6 Trigonometria del triangolo rettangolo

Le Indicazioni nazionali prevedono lo studio della trigonometria e delle funzioni circolari già nel primo biennio:

Saranno inoltre studiate le funzioni circolari e le loro proprietà e relazioni elementari, i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli e il loro uso nell'ambito di altre discipline, in particolare nella fisica.

Tuttavia, per non appesantire troppo il bagaglio dei contenuti da esaminare, ci sembra opportuno compiere delle scelte e posticipare l'esame del punto di vista delle funzioni alle classi successive. Anzi, non serve nemmeno esaurire tutti gli aspetti geometrici: è sufficiente considerare la trigonometria del triangolo *rettangolo* e dunque introdurre seno, coseno e tangente per angoli *acuti*.

L'obiettivo principale è sviluppare un modo, tra gli altri possibili, di *guardare* le figure geometriche e di *interpretarle:* in sostanza si tratta di individuare opportuni triangoli rettangoli e considerare uguaglianze nelle quali compaiono sia lati che angoli; non i soli lati oppure i soli angoli, come avviene invece nelle sezioni di geometria sintetica esaminate nel percorso. Naturalmente ciò non toglie che si possano introdurre ulteriori aspetti nel momento in cui sono richiesti per lo studio di altre discipline e, in particolare, della fisica.

Dal rapporto tra i cateti alla tangente di un angolo

Per iniziare, si può richiamare il problema di determinare l'altezza di una torre o di un edificio, che abbiamo risolto nell'ambito delle figure simili individuando due opportuni triangoli rettangoli simili.

Ora si osserva che la misura richiesta si può scrivere in termini del *rapporto* tra i *cateti* di uno dei due triangoli e che tale rapporto dipende solo da un angolo, quello che i raggi del sole formano con l'orizzontale. Tale espressione compare in *diverse* situazioni di interesse storico oppure in applicazioni geometriche: nella determinazione della distanza di una nave dal porto[34] oppure della profondità di un pozzo[35], nella definizione di pendenza di una retta, nel calcolo dell'area di un poligono regolare…

Pertanto è giustificato esaminare a fondo questo rapporto e indicarlo mediante un nome specifico, quello di *tangente* di un angolo acuto. La sua formalizzazione e i principali aspetti che esamineremo sono riportati nella **dispensa *Trigonometria del triangolo rettangolo***.

Per prendere confidenza con il nuovo oggetto matematico, si possono determinarne alcuni valori esatti mediante il teorema di Pitagora: $tan\,30°$, $tan\,45°$ e $tan\,60°$; in generale, però, si dovrà ricorrere alla calcolatrice, che sostituisce le tavole o il regolo calcolatore a cui si faceva riferimento nel passato. D'altra parte, se non si vuole che gli studenti

[34] È un procedimento che alcuni storici attribuiscono a Talete: si può determinare la distanza sfruttando la similitudine tra un triangolo opportuno, che ha un vertice nella nave e uno nel porto, e un triangolo riprodotto su pergamena. G. Loira lo descrive nel classico testo *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, edizioni Hoepli, a pag. 19.

[35] Si tratta di un problema discusso da Leon Battista Alberti nell'opera *Ludi Matematici*.

riducano la tangente ad un tasto dello strumento, vale la pena ricavare *empiricamente* alcuni valori approssimati, disegnando l'angolo e misurando la lunghezza di opportuni segmenti; e all'inverso, dato il valore della tangente, tracciare il corrispondente angolo acuto sfruttando la quadrettatura del foglio.

Si può poi osservare che la tangente è *funzione* dell'angolo e investigare se il suo andamento è lineare; tuttavia, come dicevamo, per l'esame sistematico degli aspetti funzionali è meglio attendere il secondo biennio.

In ogni caso, un primo traguardo è tornare al problema guida, osservando che determinare l'altezza della torre ora richiede solo la misura della lunghezza di un segmento e dell'ampiezza dell'angolo di visuale; basterà poi applicare la definizione di tangente.

Il problema inverso: dalla tangente all'angolo

Una strada rettilinea sale, per un tratto, con pendenza del 12%; quale angolo forma rispetto all'orizzontale?

È una questione che spesso pongono gli stessi studenti e che conduce all'introduzione dell'arcotangente. Per ora non serve dare una definizione rigorosa di questa funzione; è più efficace partire da uno *schema* del tipo $\alpha \rightarrow tan\,\alpha$, che sintetizza la richiesta di determinare la tangente di un angolo di ampiezza data, e osservare che il problema della strada si può rappresentare nella forma $\alpha \leftarrow tan\,\alpha$. In altre parole, basta che lo studente comprenda che si tratta di un problema inverso e lo pensi come passare "da destra a sinistra" nello schema.

Poi, per effettuare il calcolo, può utilizzare la funzione tan^{-1} della calcolatrice.

Ma la tangente non basta

Un corpo di massa m scende lungo un piano inclinato che forma un angolo α con l'orizzontale. Come calcolare le componenti parallela e perpendicolare al piano della forza peso?

Gli studenti dovrebbe presto rendersi conto che in questa situazione non conviene ricorrere alla tangente poiché è nota la misura dell'ipotenusa e dunque non intervengono solo i cateti, come avveniva invece nei problemi precedenti. Pertanto, invece del rapporto tra i cateti, si considereranno quelli tra ciascun cateto e l'ipotenusa.

Si introducono così *seno* e *coseno* di un angolo acuto. Come nel caso della tangente, si calcolano alcuni valori esatti, se ne approssimano altri mediante il righello, e si mostra come seno e coseno permettano di risolvere in modo efficace il problema del piano inclinato.

Prima di proseguire, osserviamo che il nostro percorso sulla trigonometria segue uno *schema* diverso, anzi *inverso*, rispetto a quello dei libri di testo. Infatti, di solito propongono i seguenti passi:

- introduzione delle funzioni circolari mediante la circonferenza goniometrica
- esame di svariati aspetti di calcolo, tra cui equazioni, disequazioni e formule trigonometriche
- applicazione degli strumenti così sviluppati alla risoluzione di problemi geometrici (solo alla fine!)[36].

Questa impostazione non rispecchia l'ordine storico in cui sono stati sviluppati i contenuti ed è frutto di una sistemazione a posteriori, ma soprattutto non ci sembra rispettare i ritmi di apprendimento degli studenti ed è meno motivante.

Tra l'altro, è eccessivo e fuorviante indicare come "teoremi fondamentali del triangolo rettangolo" i risultati che esprimono la lunghezza di un lato in termini di quella di un altro e di una funzione goniometrica dell'angolo. Per ricavare la misura di un lato non serve infatti memorizzare ulteriori formule: è sufficiente esplicitare volta per volta la *definizione* di un'opportuna funzione goniometrica, come rapporto tra lati del triangolo, e poi manipolare tale uguaglianza.

Questo è l'approccio che proponiamo ai nostri studenti per affrontare i semplici problemi ed esercizi dei **fogli di attività 17** e **18**, e che illustriamo in un **video**[37] realizzato con il Laboratorio DiCoMat. L'obiettivo dei materiali è comunque più trasversale e consiste nell'affinare alcune *abilità* fondamentali, quali interpretare figure geometriche, *visualizzare* figure nello spazio (ad esempio, l'angolo tra la diagonale di un cubo e quella di una sua faccia), esaminare la descrizione di un procedimento e *tradurlo* nel linguaggio naturale (come la valutazione della distanza Terra – Sole, proposta più di duemila anni fa da Aristarco).

In definitiva, si tratta di compiere un ulteriore passo verso un approccio maturo al fare matematica e avvicinarsi così al modo di operare del matematico esperto.

[36] Come abbiamo già chiarito, nel primo biennio noi affronteremo solo l'ultimo punto di questo schema.

[37] http://laureescientifiche.science.unitn.it/simulazione_risorse/quesito-18.html

Facciamo (un po') i geometri

I risultati a cui siamo arrivati consentono anche di misurare indirettamente distanze tra oggetti materiali. Nell'attività *Misure indirette con la trigonometria* ne consideriamo alcune: la distanza tra il pavimento e il soffitto del piano di un palazzo, la larghezza di un fiume…; ma si può determinare anche la pendenza di una rampa per disabili, verificando che non superi il valore dell'8% stabilito dal Decreto ministeriale n. 236 del 1989.

Come pianificare il lavoro?

Innanzitutto servono gli strumenti per misurare segmenti e angoli: la corda metrica, la livella, il goniometro e l'inclinometro, che si utilizza per determinare l'ampiezza di angoli su un piano verticale. Quest'ultimo dispositivo può essere realizzato dagli stessi *studenti*: basta applicare ad un goniometro un mirino e un filo a piombo. Le misure raccolte si possono confrontare con quelle fornite da alcune *applicazioni* per smartphone, come *Livella*, scaricabile liberamente. Certo, entrambi i dispositivi non sono precisi, ma se da una parte si perde in accuratezza dall'altra si guadagna in consapevolezza.

Costruiti gli strumenti, si deve decidere quali misure effettuare e come elaborarle per ottenere la distanza richiesta. Poi non resta che raccogliere i dati… sul campo, riflettere sugli inevitabili errori che si commettono ed eventualmente confrontare i risultati ottenuti con quelli che forniscono strumenti più precisi.

2.3.7 Uno sguardo alla formalizzazione: parallelogrammi e quadrilateri. E la circonferenza?

Abbiamo già considerato i quadrilateri nel percorso relativo alla classe prima, ma non ne abbiamo approfondito gli aspetti sintetici per aver modo di esaminare altri temi della geometria, ad esempio la circonferenza, e per dedicare più attenzione allo sviluppo di alcune abilità di base, come l'interpretazione di figure.

Ora ci proponiamo di esaminare tali poligoni più nel dettaglio, soprattutto per affinare le capacità di definire, congetturare e dimostrare.

Partiamo dagli oggetti…

Per iniziare, si può proporre di esplorare come si trasforma un rettangolo realizzato mediante il Meccano quando si schiacciano i lati:

cosa varia, cosa si conserva, quali proprietà si mantengono?

Dopo una prima fase di indagine libera, si può suggerire di considerare il perimetro, l'area, la somma degli angoli interni, coppie di angoli, le diagonali…

L'approccio è ispirato ai lavori della Castelnuovo, convinta dell'utilità didattica di *manipolare oggetti*, di esaminarli in modo dinamico e di individuarne così proprietà geometriche. Il disegno non è altrettanto efficace, come l'autrice spiega in [Castelnuovo, 2017, pag. 83]:

> *1) il disegno non suggerisce problemi perché offre un numero finito di casi […];*
> *2) non conduce l'osservazione, e quindi non può portare all'intuizione della verità, per il fatto che è statico;*
> *3) non può inoltre, e ciò è evidente, fornire un'immagine reale di una situazione spaziale.*

Queste attività esplorative si collocano in modo naturale nella scuola secondaria di primo grado; tuttavia se gli studenti del liceo non le avessero effettuate negli anni precedenti, è bene offrire loro la possibilità di recuperarle, magari prevedendo tempi più brevi[38]. Del resto, lavori come quello citato all'inizio della sezione 2.2.3 mostrano che la sistemazione formale avviene con meno difficoltà se è preceduta dall'esplorazione e dalla elaborazione di congetture.

Tornando al nostro percorso, oltre al problema con il Meccano si può proporre un'altra questione, che sembra mettere in difficoltà perfino studenti universitari:

> *assegnati due segmenti che hanno un estremo in comune, costruire mediante riga e compasso il parallelogramma che li ha come lati.*

Una traccia di discussione per entrambi i problemi si trova nell'**attività** ***Investighiamo i parallelogrammi***.

… per arrivare alla formalizzazione

A questo punto si tratta di organizzare le osservazioni compiute nelle attività operativo-sperimentali e, sulla base di queste, proporre una definizione di parallelogramma e provare ad enunciare le proprietà relative a lati, angoli, diagonali.

---

[38] Infatti, secondo uno studio classico condotto dai coniugi Van Hiele, sembra che l'apprendimento della geometria debba avvenire attraverso livelli ben distinti di astrazione, e che non si possa passare ad un nuovo stadio se prima non si è interiorizzato il precedente; ne parla Villani in [Villani, 2006, pag. 17], precisando però che la suddivisione proposta è forse troppo rigida.

La loro dimostrazione è un'applicazione elementare dei criteri di uguaglianza dei triangoli, perciò può essere lasciata al lavoro autonomo degli studenti. Piuttosto è significativo discutere se le proprietà individuate si possono invertire, ossia se caratterizzano i parallelogrammi; e, tra queste, cercare quella che permette di giustificare una costruzione con riga e compasso che risolva il problema proposto.

Peraltro il contesto offre l'occasione di approfondire il significato di condizione *necessaria* e di condizione *sufficiente*, nonché di *implicazione* logica tra due proposizioni.

Non è una questione da poco, anche perché la conoscenza di senso comune a volte si discosta dalle regole del ragionamento stabilite in matematica. Ad esempio, la pubblicità sfrutta consapevolmente la convinzione per la quale se vale un'implicazione allora deve valere anche la sua inversa, come osserva Bernardi in [Villani et. al. 2012, pag. 37][39]. Altre implicazioni errate sono discusse in un significativo video[40] realizzato con il Laboratorio DiCoMat.

Oltre i parallelogrammi

Su queste basi, si possono invitare gli studenti a proporre definizioni per gli altri quadrilateri notevoli. La discussione dovrebbe indurre ad approfondire il *ruolo* della definizione e a riflettere sul fatto che uno stesso oggetto matematico si può definire in modi *diversi*, pur equivalenti tra loro, e che, per farlo, si seguono spesso criteri di essenzialità e di economicità ([Villani et al., 2012, sezione 11.2]).

Poi i ragazzi possono provare a rappresentare mediante uno schema grafico le varie famiglie di quadrilateri e le loro relazioni insiemistiche; esercitano così un'altra forma tipica del pensiero matematico, *classificare*, a cui i libri di testo riservano generalmente grande importanza.

Invece non ci sembra utile esaminare lunghi elenchi di proprietà, richiedere di studiarli e riprodurne le dimostrazioni. Piuttosto preferiamo sviluppare l'abilità di sondare se una data affermazione è vera e di giustificare la risposta in modo autonomo; ad esempio, si può

---

[39] L'autore scrive:

> *"Chi è giovane veste gli abiti della linea Dress up". Questa affermazione pubblicitaria corrisponde all'implicazione: se uno è giovane allora veste Dress up" […]. Peraltro, il messaggio pubblicitario induce indirettamente a pensare l'implicazione inversa: "se uno veste Dress up, allora è giovane", invogliando così ad acquistare quei capi d'abbigliamento nella speranza di sentirsi un po' più giovani.*

[40] http://laureescientifiche.science.unitn.it/simulazione_risorse/quesito-1.html

investigare la perpendicolarità delle diagonali del rettangolo e del rombo.

La verifica 5 è un esempio di prova sugli aspetti geometrici affrontati nelle sezioni precedenti, ossia figure simili, trigonometria nel triangolo rettangolo, quadrilateri notevoli. Anche in questo caso, oltre ai contenuti, siamo interessati a valutare diverse abilità, in particolare l'interpretazione di figure e l'argomentazione.

Torniamo alla circonferenza

Come abbiamo discusso nella sezione 2.2.5, la nostra idea è di affrontare la circonferenza nella classe prima, ma riteniamo che convenga discutere le questioni metriche nella classe seconda, quando gli studenti hanno una maggior esperienza per comprendere e realizzare semplici processi di approssimazione.

Per cominciare, è opportuno ricordare la definizione del numero π come rapporto tra la misura della circonferenza e quella di un suo diametro. La formalizzazione può essere preceduta da un'attività *esplorativa*, che porta a congetturare come tale rapporto non dipenda dalle dimensioni della circonferenza: si riportano in una tabella le misure dei diametri e delle circonferenze di vari oggetti circolari e si considera il loro rapporto.

Il passo successivo è *investigare* l'area del cerchio, *approssimandolo* con poligoni ciascuno dei quali è unione di triangoli uguali che hanno un vertice nel centro e gli altri due sulla circonferenza. Si può farlo utilizzando una fetta d'arancia, ottenuta sezionando il frutto lungo un piano equatoriale: essa si può schematizzare come unione di triangoli uguali e dunque se ne può calcolare l'area.

Per ricavare intuitivamente la formula che fornisce l'area del cerchio si può osservare che, al crescere del numero dei triangoli in cui è suddiviso, la somma delle lunghezze delle basi si "avvicina" alla misura della circonferenza e che la misura delle altezze dei triangoli si "avvicina" al raggio. Naturalmente questa *non* è una giustificazione formale, ed è bene ricordarlo agli studenti, ma costituisce un passo ulteriore verso la costruzione del *concetto* di area, una delle nozioni su cui si fonda l'analisi e che preciseremo dopo il primo biennio.

La parte operativa dell'attività è descritta in un lavoro di tesi[41] realizzato nell'ambito del Laboratorio DiCoMat e si può approfondire con stime dell'area mediante la quadrettatura.

---

[41] https://edulab.unitn.it/dicomat/geometria-ss-i-g/cerchio/ L'attività è *Arance e spugne*.

2.3.8 Sviluppi dell'algebra: disequazioni e sistemi

Abbiamo già esaminato disequazioni e sistemi di equazioni.

Le prime, nel contesto delle *funzioni*, proponendo, ad esempio, di interpretare graficamente richieste del tipo:

determinare per quali x vale $x^2 < 4$*;*
determinare per quale durata della sosta è più conveniente la tariffa di un parcheggio rispetto ad un'altra, *con le tariffe espresse da funzioni lineari a tratti.*

I sistemi lineari di due equazioni in due incognite sono stati introdotti come strumento per modellizzare (già nella classe prima) e per rappresentare analiticamente l'intersezione di due rette nel piano cartesiano, suggerendo di risolverli per sostituzione. Pertanto rimangono ancora da studiare alcuni altri semplici tipi di disequazioni e di sistemi e va arricchito il bagaglio di strategie risolutive.

Come nei casi esaminati, si cureranno sia gli aspetti *sintattic*i che quelli *semantici*, ossia l'uso corretto dei simboli e la trasformazione di espressioni ma anche la loro interpretazione. Si ricorrerà ancora a più registri di rappresentazione - linguistico, simbolico, grafico - e si richiederà agli studenti di saper passare consapevolmente da uno all'altro.

Dall'idea di soluzione ai principi di equivalenza delle disequazioni

Prima di esaminare strategie risolutive è utile investigare il concetto di *soluzione* di una disequazione, analogamente a quanto abbiamo visto per le equazioni e per i sistemi: gli studenti possono verificare per sostituzione se un dato numero è soluzione di una disequazione assegnata.

Chiarito questo aspetto, osserviamo che i ragazzi dovrebbero già essere in grado di risolvere diverse disequazioni e, in particolare, quelle polinomiali di primo e secondo grado, poiché le hanno già incontrate nell'ambito delle funzioni.

D'altronde per risolvere alcune disequazioni è necessario manipolarle algebricamente, perciò è opportuno riflettere se i principi di equivalenza relativi alle equazioni si possono estendere alle disequazioni. L'esplorazione va lasciata agli studenti; il docente può precisare che, in realtà, i principi di equivalenza sono una diretta conseguenza delle proprietà (del campo ordinato) dei numeri reali. E che moltiplicare un numero per -1 significa operare una *simmetria* rispetto allo zero sulla retta reale: ciò permette di visualizzare con chiarezza che il verso della disuguaglianza tra due numeri cambia quando si moltiplicano entrambi per -1, o, in generale, per un numero negativo.

Ancora disequazioni e sistemi di disequazioni

Una questione significativa che conduce ad una disequazione fratta è la seguente.

Per l'effetto Doppler, la frequenza f percepita da un osservatore fermo dipende dalla velocità v dell'onda emessa dalla sorgente. Precisamente, se la sorgente è in moto lungo una retta verso l'osservatore, allora

$$f = a \cdot \frac{v}{v - b}$$

dove a, b sono due costanti opportune. Determina per quali valori della velocità v la frequenza f è maggiore di un valore assegnato.

Si tratta innanzitutto di comprendere le ragioni per cui non si può "eliminare" il denominatore, come avviene invece nel caso delle equazioni. È un aspetto da discutere con attenzione se si vuole che resti disponibile a lungo, sollecitando i ragazzi ad esprimere formalmente cosa sottintende il termine "eliminare".

Inoltre gli studenti dovrebbero arrivare a costruire *consapevolmente* il tipico schema grafico per lo studio del segno proposto nei manuali. In particolare dovrebbero aver chiaro che ogni riga rappresenta la *funzione* associata al numeratore, al denominatore o ad un loro fattore, e che il simbolo "+" non identifica l'insieme delle soluzioni, ma i valori dell'incognita che rendono positiva tale funzione.

Si possono considerare come fattori anche semplici espressioni irrazionali oppure con valori assoluti. Ma non serve introdurre tecniche specifiche, poiché il segno di ogni fattore si deduce dall'andamento della funzione associata, mediante l'approccio generale esaminato nella sezione 2.3.2.

Rispetto alla risoluzione delle disequazioni fratte, quella dei sistemi di disequazioni in una incognita è più immediata e il confronto tra i due diversi procedimenti risolutivi contribuisce a comprendere meglio entrambi.

Alla risoluzione di disequazioni è dedicato il **foglio di attività 19**, nel quale si richiede anche di valutare e *giustificare* se alcune disuguaglianze si possono dedurre da una disuguaglianza elementare assegnata: è la base su cui fondare manipolazioni algebriche *consapevoli* delle disequazioni. Si propone inoltre di scrivere una disequazione fratta, dato l'insieme delle sue soluzioni: è la richiesta inversa a quella di risolvere una disequazione ed induce ad osservare il procedimento risolutivo da *un'altra angolazione,* in modo da comprenderlo più a fondo.

Completiamo i sistemi di equazioni

Per iniziare, si possono *descrivere* varie situazioni mediante sistemi di secondo grado: le intersezioni di una parabola e di una retta, oppure semplici problemi in cui interviene il teorema di Pitagora.

È anche importante discutere i sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite poiché intervengono in contesti significativi, quali la ricerca dell'equazione della parabola che passa per tre punti assegnati. Per risolverli conviene operare sulle equazioni per addizione e sottrazione, ricorrendo all'approccio che sui testi è indicato come metodo di *riduzione*.

L'impiego di ulteriori tecniche risolutive, come il metodo di Cramer, ci sembra un'inutile complicazione, che stride con l'indicazione della normativa di semplificare il calcolo. È più importante mostrare come la legge dell'*annullamento* del prodotto permette di ricondurre la risoluzione del sistema a quella di due o più sistemi elementari; non è una questione scontata nemmeno per gli studenti universitari.

Oltre alle disequazioni e ai sistemi

Quanto esaminato fino qui costituisce un buon traguardo per l'algebra del primo biennio. Tuttavia si possono approfondire ulteriori questioni, che intervengono in vari contesti e che si utilizzeranno anche nel secondo biennio.

Alcune proposte di approfondimento sono raccolte nel **foglio di attività 20**:

- esaminare se una data disuguaglianza si può dedurre da un'altra assegnata ricorrendo al *grafico* delle funzioni base
- estendere la classe di disequazioni esaminate finora, considerando funzioni della forma $f(x + c)$, dove f è una funzione base e c è una costante; si investigherà come ottenere il loro grafico da quello di f e non dovrebbe essere difficile concludere che si tratta di una traslazione lungo l'*asse x*
- studiare come varia l'insieme delle soluzioni di famiglie di disequazioni al variare di un parametro.

Un'ultima questione è invece proposta nel **foglio di attività 21**:

determinare il quoziente e il resto della divisione tra due polinomi.

Il nostro approccio alla divisione riprende quello suggerito in [Villani, 2003, pag.160, 161] e sostituisce l'algoritmo riportato nei libri di testo ma che gli studenti dimenticano presto.

Supponiamo, ad esempio, di voler dividere il polinomio

$$p(x) = 2x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 8x - 3 \text{ per } x - 3.$$

Osserviamo innanzitutto che p è divisibile per $x - 3$, visto che $p(3) = 0$. Poi notiamo che il polinomio quoziente $q(x)$ deve essere della forma

$$q(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1, \text{ dove } a, b \text{ sono coefficienti incogniti.}$$

Pertanto, se si esplicita la definizione di quoziente, si ottiene

$$(x - 3)(2x^3 + ax^2 + bx + 1) = 2x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 8x - 3.$$

Questa uguaglianza, per il teorema di identità dei polinomi, si traduce in un sistema lineare di tre equazioni nelle incognite a e b, che si risolve agevolmente.

Se invece la divisione $s(x):t(x)$ ha resto non nullo $r(x)$, allora basta seguire un procedimento analogo sfruttando l'uguaglianza più generale

$$t(x)q(x) + r(x) = s(x).$$

Un esempio di prova sugli aspetti algebrici e sulle questioni geometriche relative ai quadrilateri è verifica 6. Gli esercizi relativi agli aspetti di approfondimento si possono eventualmente sostituire con quesiti meno articolati che vertono sugli aspetti di base.

A nostro avviso, quanto discusso fin qui completa ciò che è significativo affrontare nel primo biennio. Per il lavoro estivo proponiamo la lettura ***Letture classe seconda*** e il **foglio di attività 22**, che riporta le questioni nodali affrontate nel corso dell'anno scolastico e di cui è bene disporre a lungo.

2.4 Un percorso in sintesi

Nei paragrafi precedenti abbiamo esaminato in dettaglio un possibile percorso per il primo biennio. Ora ci proponiamo di dare uno sguardo d'insieme: schematizzeremo gli aspetti che riteniamo opportuno affrontare e forniremo un'indicazione dei tempi, che si basa sulla nostra esperienza e sulle *sperimentazioni* effettuate. Naturalmente questa sintesi, come l'intero lavoro, è una *proposta*, tra le tante possibili; e va adattata al contesto e alla propria sensibilità didattica.

I contenuti e le modalità sono suddivisi in *blocchi,* ossia parti elementari del percorso, ciascuno dei quali è esaminato in una sezione dei paragrafi 2.2 e 2.3: ad esempio, il blocco *1. Numeri* per la classe prima è illustrato nella sezione 2.2.1.

I tempi indicati in tabella comprendono le *verifiche* e prevedono un impegno annuale complessivo di 155 unità orarie di lezione[42]; la stima si basa sull'ipotesi di disporre di 5 unità orarie a settimana e sulla considerazione che alcune vengono impiegate in uscite didattiche, assemblee studentesche, progetti… Esse corrispondono alla disponibilità oraria settimanale stabilita dalla normativa per i Licei scientifici. Invece per l'opzione scienze applicate, nella classe seconda le unità orarie si riducono a 4; perciò per tali classi si dovrà adattare leggermente lo schema. Si comprende che i tempi indicati non possono che essere approssimativi.

2.4.1 Classe prima

CONTENUTI e MODALITÀ	***TEMPI*** *(unità orarie)*
1. Numeri	
Contare gli elementi di un insieme: dal grafo ad albero all'introduzione del calcolo combinatorio; sequenze con ripetizioni e senza ripetizioni (password, anagrammi), raggruppamenti di 2 o 3 elementi in cui l'ordine non è significativo; fattoriale.	*10*
Numeri naturali, numeri primi e teorema fondamentale dell'aritmetica. Numeri interi, proprietà distributiva della moltiplicazione e segno del prodotto, applicazione al calcolo mentale. Numeri razionali, frazioni, giustificazione della definizione di somma di frazioni, semplici espressioni. *Una tabella per le potenze, proprietà caratterizzante ed estensione della definizione all'esponente zero e agli esponenti interi.*	*15*
Allineamenti decimali: un'ulteriore rappresentazione dei numeri razionali; cenni ai numeri irrazionali; arrotondamento e notazione scientifica, semplici stime. *Percentuali, variazione percentuale, sconto e inflazione; dal modello additivo al modello moltiplicativo. Verso l'uso delle lettere.*	*12*

[42] Nella sperimentazione del percorso nelle nostre classi ogni unità oraria è di 50 minuti.

CONTENUTI e MODALITÀ	***TEMPI*** *(unità orarie)*
2. Algebra: equazioni e polinomi	
Modellizzazione mediante semplici equazioni.	*5*
Soluzione di un'equazione, insieme delle soluzioni; principi di equivalenza e risoluzione delle equazioni di primo grado intere. *Manipolazioni algebriche in vista di un obiettivo: in una formula esprimere una variabile in funzione delle altre. Ulteriori modelli.* *Uso delle lettere in matematica. Aspetti di calcolo: la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione e le operazioni con i polinomi; quadrato di un binomio, differenza di quadrati e loro interpretazione geometrica.*	*22*
3. Geometria sintetica: primi passi	
Dimostrare: dall'esame di casi specifici alla dimostrazione, ruolo del controesempio; esempi di dimostrazioni in ambito geometrico e aritmetico, giustificazioni mediante rappresentazioni grafiche. *Idea di ente primitivo e di assioma.* *Termini primitivi (punto, retta, piano), segmento, angolo; definizione di altezza, mediana e bisettrice di un triangolo, asse di un segmento.* *Criteri di uguaglianza dei triangoli come assiomi, indeformabilità del triangolo e applicazioni; semplici catene deduttive.* *Costruzioni con riga e compasso e loro giustificazione: asse di un segmento e bisettrice di un angolo; cenno ai problemi classici dell'antichità.* *Rette parallele; somma degli angoli interni di un triangolo: dalla piegatura su carta alla dimostrazione; relazione tra i lati dei triangoli: disuguaglianza triangolare.* *Esempi di costruzioni con un software di geometria dinamica: intersezione degli assi, delle bisettrici e delle altezze nel triangolo e punti notevoli.*	*25*
4. Sistemi lineari	
Modellizzazione mediante sistemi lineari di due equazioni in due incognite, risoluzione per sostituzione.	*5*

CONTENUTI e MODALITÀ	TEMPI (unità orarie)
5. Circonferenza	
Circonferenza, cenni al problema isoperimetrico, costruzione della circonferenza passante per tre punti. Perpendicolarità tra retta tangente e raggio; angoli al centro e angoli alla circonferenza, quadrilateri inscritti e circoscritti. Misura di Eratostene del raggio della Terra.	*10*
6. Statistica descrittiva	
Sondaggi, esame di rappresentazioni distorte dei dati; la statistica nella storia. Rappresentazione dei dati mediante frequenze relative e cumulate nonché mediante istogrammi e aerogrammi. Sintesi dei dati: valori di posizione (media aritmetica e mediana) e di dispersione (distanza interquartile e rappresentazione mediante box-plot).	*6*
7. Algebra: sviluppi	
Semplici fattorizzazioni di polinomi in una variabile; legge dell'annullamento del prodotto, equazioni di grado maggiore di uno.	*10*
Moltiplicazione e addizione di frazioni algebriche. Equazioni fratte, insieme di definizione di un'equazione fratta.	*15*
8. Piano cartesiano. Aree di poligoni	
Metodo delle coordinate e sua motivazione storica. Distanza tra due punti nel piano cartesiano e teorema di Pitagora, punto medio di un segmento. Interpretazione geometrica di condizioni algebriche e schematizzazione algebrica di proprietà geometriche. Semplici dimostrazioni per via analitica. Giustificazione delle formule dell'area del triangolo e dei parallelogrammi per via sintetica.	*15*
Approfondimento	
Statistica mediante un foglio di calcolo: rappresentazione ed elaborazione di dati. Risoluzione della generica equazione di primo grado mediante un foglio di calcolo.	*5*

2.4.2 Classe seconda

CONTENUTI e MODALITÀ	TEMPI (unità orarie)
1. Retta nel piano cartesiano	
Dalla pendenza di una strada alla definizione di pendenza della retta nel piano cartesiano. *Appartenenza di un punto di coordinate date ad una curva; equazione della retta nella forma* $y = y_0 + m(x - x_0)$. *Rette perpendicolari, parallele e relazioni tra le pendenze, intersezione tra due rette.* *Procedimento per determinare la distanza di un punto da una retta.* *Descrizione di sottoinsiemi del piano tramite condizioni algebriche e loro rappresentazione. Semplici dimostrazioni per via analitica.* *Schematizzazione di semplici situazioni mediante modelli lineari.*	22
2. Funzioni e grafici	
Dall'idea di funzione alla formalizzazione (Dirichlet), insieme di definizione e immagine. *Funzioni base e loro grafici: costante,* x, x^2, x^3, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\lvert x \rvert$; *funzioni a tratti.* *Lettura del grafico: determinazione delle soluzioni di* $f(x) = k$, $f(x) \geq k$, $f(x) \geq g(x)$; *definizione di zeri e di grafico di una funzione. Trasformazioni di grafici mediante traslazioni e simmetrie.* *Interpretazione mediante le funzioni di equazioni e disequazioni, anche irrazionali e con moduli.* *Modellizzazione mediante funzioni, esame critico di grafici in vari contesti.* *Descrizione di proprietà delle funzioni mediante i simboli specifici.*	15
3. Il secondo grado	
Radice quadrata e radice cubica; dimostrazione della irrazionalità di $\sqrt{2}$, *aspetti storici e applicazioni (foglio A4…); stime di numeri irrazionali.* *Aspetti di calcolo: moltiplicazione e addizione di radici quadrate numeriche; uso della definizione di radice n-esima per esprimere una variabile in funzione delle altre in una formula.* *Modellizzazione mediante equazioni di secondo grado. Scrittura del polinomio di secondo grado nella forma* $a(x - b)^2 + c$ *(completamento del quadrato).*	10

CONTENUTI e MODALITÀ	*TEMPI* (unità orarie)
Formula risolutiva dell'equazione di secondo grado. *Scomposizione in fattori di un polinomio di secondo grado e teorema del resto.* *Funzioni polinomiali di secondo grado: significato geometrico dei coefficienti, coordinate del punto di massimo (minimo) della funzione; disequazioni di secondo grado.*	*15*
Semplici problemi di ottimizzazione: dalle prove materiali all'esplorazione mediante il software e alla formalizzazione.	*5*
4. Calcolo delle probabilità: un primo approccio	
Probabilità in gioco: un laboratorio sul gioco d'azzardo, esame di varie situazioni (test clinici, genetica, casi giudiziari, probabilità nella storia…). *Numeri del caso: prime valutazioni di probabilità; modelli, decisioni e stime; valutazioni per mezzo del calcolo combinatorio; il giudizio di probabilità; schema di valutazione classico.* *Probabilità alla prova: esperimenti materiali e simulazioni mediante un foglio di calcolo, andamento delle frequenze relative e assolute, interpretazione frequentista.* *Pensare in termini elementari: evento complementare, legge della moltiplicazione e grafi ad albero; le operazioni fondamentali sugli insiemi e i connettivi logici, negazione di una proposizione e quantificatori.*	*15*
Gioco equo e simulazioni. Problema dei compleanni.	*5*
5. Figure simili	
Dalle ombre e dalle carte geografiche alle figure simili. *Poligoni simili, il caso speciale dei triangoli: uguaglianza degli angoli; semplici catene deduttive, suddivisione di un segmento in parti uguali.* *Costante di proporzionalità e rapporto tra perimetri, tra aree e (cenno) tra volumi; crescita e forma negli esseri viventi: dalle esperienze alla giustificazione di Galilei.* *Approfondimenti: la sezione aurea, l'enunciato del teorema di Talete.*	*10*

CONTENUTI e MODALITÀ	TEMPI (unità orarie)
6. Trigonometria del triangolo rettangolo	
Definizione di tangente, seno e coseno di un angolo acuto; problema inverso: trovare l'ampiezza dell'angolo. Interpretazione di figure nel piano e nello spazio, in situazioni desunte anche dalla fisica, e determinazione degli elementi incogniti; pendenza e tangente.	8
Misura indiretta di distanze anche utilizzando strumenti elementari per la misura di angoli.	2
7. Quadrilateri e parallelogrammi. Area del cerchio	
Congetture e dimostrazioni: proprietà e definizione del parallelogramma, i quadrilateri; significato di condizione necessaria e di condizione sufficiente.	5
Numero π approssimazione dell'area del cerchio e giustificazione della formula.	3
8. Disequazioni e sistemi	
Disuguaglianze tra numeri reali ed equivalenza di disequazioni. Disequazioni di primo e secondo grado in una incognita; segno di una funzione e disequazioni fratte. Cenno ai sistemi di disequazioni.	15
Modellizzazione mediante sistemi non lineari; intersezioni tra una parabola e una retta. *Sistemi lineari in tre incognite, metodo di riduzione; parabola per tre punti.* *Divisione tra polinomi mediante la risoluzione del sistema che ha come incognite i coefficienti del quoziente.*	10
Approfondimento e consolidamento	
Ulteriori aspetti del software GeoGebra (ad esempio vista CAS). *Alcuni laboratori sul calcolo delle probabilità (ad esempio il poker).*	5
Consolidamento dei principali aspetti relativi alla retta, alle funzioni e al calcolo algebrico che devono essere disponibili anche nelle classi successive (si possono già proporre parti di quesiti, ad esempio la risoluzione di un'equazione, tratti dalle verifiche relative alla classe terza).	10

Bibliografia e sitografia del capitolo 2

[Aczel, 2005] Aczel, A.D. (2005). *Chance. Dai giochi d'azzardo agli affari (di cuore).* Milano: Raffaello Cortina.

[Alexandrov et al., 2000] Alexandrov, D., Kolmogorov, A.N., Lavrent'ev, M.A. (2000). *Le matematiche.* Torino: Bollati Boringhieri. Prima edizione: 1974.

[Antonini, 2020] Antonini, S. (2020). Insegnare regole o insegnare la matematica? *Incontri di Didattica della Matematica*. AIRDM.

https://www.airdm.org/wp-content/uploads/2020/05/AperiAIRDM_SA.pdf

[Apostol, 1985] Apostol, T.M. *Calcolo. Volume primo. Analisi 1.* Torino: Bollati Boringhieri.

[Baccaglini, Di Martino, Natalini, Rosolini, 2018] Baccaglini Frank, A., Di Martino, P., Natalini R., Rosolini G, (2018). *Didattica della matematica*. Milano: Mondadori.

[Bartolini Bussi e Mariotti] Bartolini Bussi, M. G., Mariotti M. A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della Matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*. 32 A-B, 270-294.

[Barra, 2002] Barra, M. (2002). Teorema del limite centrale a scuola a partire dall'esperienza e con il problem solving. Somma di alcuni numeri aleatori e Metodo di Montecarlo. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 25 A-B (6), 591-627.

[Barra e Gallo, 2017] Barra, M., Gallo, R. (2017). Motivazioni per lo sviluppo del calcolo delle probabilità: scienza, assicurazioni e banche. Gioco d'azzardo, cultura, rischi di plagio e banche. *Progetto Alice*. 53, 213-308.

[Boero, Garuti, Mariotti, 1996] Boero, P., Garuti, R., Mariotti, M.A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. *Proceedings of the 20th PME Conference – Valencia*. 2, 121-128, 113.

[Boyer, 1990] Boyer, C.B. (1990). *Storia della matematica*. Milano: Mondadori.

Titolo originale: A History of mathematics, edita nel 1968.

[Brousseau, 1986] Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthods de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique del mathématiques*. 7 (2), 33-115.

[Cappello e Mazzini, 2017] Cappello, L., Mazzini, F. (2017). *Mettiamo in gioco la probabilità: percorsi per il primo biennio e oltre.*

https://edulab.unitn.it/dicomat/probabilita/mettiamo-in-gioco-la-probabilita/

[Castelnuovo, 1992] Castelnuovo, E., Gori Giorgi, C., Valenti, D. (1992). *Matematica oggi. Per il biennio vol. .2* Firenze: La Nuova Italia.

[Castelnuovo, 1993] Castelnuovo E. (1993). *Pentole, ombre, formiche*. Firenze: La Nuova Italia.

[Castelnuovo, 2017] Castelnuovo, E. (2017). *Didattica della matematica*. Torino: UTET. Prima edizione 1963.

[CNR, 2018] Cerrai, S., Resce G., Molinaro S. (2018). *Consumi d'azzardo* 2017.

https://www.epid.ifc.cnr.it/wp-content/uploads/2019/09/Consumi-dazzardo-2017.pdf

[de Finetti, 1959] de Finetti, B. (1959). *Matematica logico intuitiva*. Napoli: Cremonese.

[de Finetti, 1974] de Finetti, B. (1974). *Theory of Probability.* London-New York-Sydney-Toronto: John Wiley & Sons.

Traduzione di *Teoria delle probabilità* (1970).

[Duval, 2006] Duval, R. (2006). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica*. 20 (4), 585-619.

[Paola et al., 2014] Fenaroli, G., Guala, E., Goizueta, M., Paola, D., Sanna G. (2014). Il problema delle parti per un'introduzione al pensiero probabilistico. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 37 (6), 573-584.

[Habermas, 2001] Habermas, J. (2001). *Verità e giustificazione.* Bari: Laterza.

[Hofstadter, 1990] Hofstadter, D.R. (1990). *Godel, Escher, Bach.* Milano: Adelphi.

[ICMI, 1998] Mammana, C., Villani, V., (curatori) (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. *An ICMY Study*. Kluwer.

[Kieran, 2004] Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in early grades: what is it? *The Mathematics Educator.* 8 (1), 139-151.

[Lolli, 2014] Lolli, G. (2014). *Se viceversa*. Torino: Bollati Boringhieri.

[Malara, 2009] Malara, N.A. (2009). Il concetto di funzione: aspetti epistemologici e didattici. In D'Amore B., Sbaragli S. (a cura di). *Pratiche matematiche e didattiche in aula, atti 23° Conv. Naz. Incontri con la Matematica.* 19-27. Bologna: Pitagora.

[Mariotti et al., 2003] Mariotti, M.A., Cerulli, M. (2003). Espressioni numeriche ed espressioni letterali: continuità o rottura? *La matematica e la sua didattica*. 17 (1), 43-63.

[MIUR, 2010] MIUR *(*2010*). Indicazioni nazionali degli obiettivi specifici di apprendimento per i licei.*

https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf

[Odifreddi, 2013] Odifreddi, P. (2013). Il turista matematico. Così Talete scoprì il segreto delle piramidi di Giza. *La Repubblica*. 6/08/2013, pag. 35.

http://www.piergiorgioodifreddi.it/wp-content/uploads/2010/08/odifreddi.pdf

[Orientamat, 2006] Sito del *Progetto Orientamat.*

http://www.science.unitn.it/orientamat/

[Paola et al., 2014] Paola, D., Impedovo, M. (2014). *Matematica dappertutto. Volume A.* Bologna: Zanichelli.

[Prodi e Villani, 1982] Prodi, G., Villani V. (1982). Anche il calcolo letterale può essere intelligente. *Archimede*. 34 (4), 163-173.

[Pedemonte, 2008] Pedemonte B. (2008). Argomentation and algebraic proof. *ZDM Mathematics Education*. 40 (3), 385-400.

[Perelli, 2002] Perelli D'argenzio, M (2002). Storia della statistica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 25 (6), 523-548.

http://www.salmasoluigi.it/Storia_statistica.pdf

[Poe, 2000] Poe, E.A. (2000). *Racconti del mistero.* Milano: BUR. Prima pubblicazione della raccolta: 1845.

[Prodi et al., 2003] Prodi, G., Bastianoni, A., Foà, D., Sainati, M., T., Tani, N. (2003). *Scoprire la matematica per il biennio della scuola superiore. Guida per l'insegnante.* Milano: Ghisetti e Corvi.

https://gpc-maths.org/data/documents/kieran2004.pdf

[Rittaud, 2014] Rittaud, B. (2014). *La favolosa storia della radice quadrata di due*. Torino: Bollati Boringhieri.

[Rossi, 1999] Rossi, C. (1999). *La matematica dell'incertezza*: *didattica della probabilità e della statistica*. Bologna: Zanichelli.

[Rosso, 2010] Rosso, R. (2010). *Il bello nella matematica: la sezione aurea*.
https://mate.unipv.it/~rosso/aurea.pdf

[Sasso, 2011] Sasso, L (2011). *Nuova matematica a colori. Geometria. Edizione blu.* Torino: Petrini.

[Sfard, 1991] Sfard, A. (1991). Sulla doppia natura delle concezioni matematiche: riflessioni su processi e oggetti come diverse facce della stessa medaglia. *Educational studies in mathematics*. 22, 1-36.

[Sfard, 1992] Sfard, A (1992). Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification- the Case of Function. In: Harel G., Dubinsky E. (eds.). *The Concept of Function – Aspects of epistemology and Pedagogy*, MAA Notes. 25, 59 -84.

[UMI, 2003]. Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., Robutti, O. (comitato di redazione) (2004). *Matematica 2003. Attività e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica. Ciclo secondario*. Lucca: Matteoni stampatore.
https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2020/04/Matematica2003.pdf

[UMI, 2014] UMI-CIIM (2014). *Costruzione di percorsi didattici di matematica coerenti con le indicazioni della riforma.*
https://umi.dm.unibo.it/materiali-umi-ciim/secondo-ciclo/

[Villani, 2003] Villani, V. (2003). *Cominciamo da Zero.* Bologna: Pitagora.

[Villani, 2006] Villani, V. (2006). *Cominciamo dal Punto.* Bologna: Pitagora.

[Villani et al., 2012] Villani, V., Bernardi, C., Zoccante, S., Porcaro, R. (2012). *Non solo calcoli.* Milano: Springer-Verlag Italia.

3 Alcuni materiali didattici

3.1 Le verifiche sommative

I testi delle **verifiche** sommative offrono una panoramica di quanto si fa a scuola e una rappresentazione *concreta* degli aspetti nodali che si discutono, e possono essere più efficaci di molte descrizioni a parole.
Perciò abbiamo pensato di mostrare in questo paragrafo le 12 prove assegnate ad una nostra classe nell'arco del primo biennio e che abbiamo collocato nel percorso nel capitolo precedente.

I testi delle verifiche sono sostanzialmente quelli originali. Sono stati modificati solo quattro quesiti:

- verifica 1 classe prima, esercizio 8: è stato sostituito con una versione più semplice, visto che gli studenti hanno mostrato molte difficoltà nell'affrontarlo
- verifica 5 classe prima, esercizio 3: è stata aggiunta un'ulteriore domanda per esaminare più a fondo la rappresentazione mediante il box-plot
- verifica 4 classe seconda, esercizio 3: è stata sostituita una delle richieste poiché troppo simile ad un'altra, proposta nello stesso quesito
- verifica 6 classe seconda, problema 5: è stato sostituito con uno analogo, ma per il quale la modellizzazione mediante un sistema di equazioni è davvero conveniente e non costituisce solo la richiesta del docente.

I quesiti che proponiamo nelle prove sono di vario tipo, per considerare diverse conoscenze e *abilità*: aspetti più teorici, questioni di calcolo, interpretazione di testi, figure o grafici, argomentazione…

Tuttavia non siamo preoccupati di verificare “tutto”, e del resto non sarebbe nemmeno possibile; puntiamo piuttosto ad una valutazione *completa.* Ciò significa, in primo luogo, focalizzare l’attenzione sui contenuti *fondamentali* nonché sulle procedure di base. E sondare se sono effettivamente *disponibili*, ossia valutare se lo studente sa *impiegare* quanto conosce in situazioni prossime a quelle esaminate a lezione e non si limita a ripetere enunciati o ad applicare schemi di calcolo, senza comprenderne il senso.

In secondo luogo, vuol dire proporre contenuti relativi a *più ambiti*; ad esempio, una verifica sommativa che verte solo sulla risoluzione di sistemi lineari ci sembra povera.

Infine si tratta di andare oltre i contenuti e fare in modo che nella prova siano coinvolte anche diverse *abilità*. È di questa completezza semmai che ci si dovrebbe preoccupare, come evidenzia lo studio [Grugnetti e Villani, 1999, pag. 12].

Per quanto riguarda aspetti più operativi, il tempo previsto per svolgere ogni prova è di *90 minuti*, in modo che gli studenti abbiano la tranquillità necessaria per riflettere sul significato delle richieste, curare l’esposizione, realizzare rappresentazioni grafiche, giustificare con chiarezza i passi compiuti e per controllare i calcoli svolti. Inoltre è consentito l’uso della calcolatrice scientifica, ad eccezione di alcuni esercizi indicati.

Una precisazione: il simbolo * che compare nel testo segnala un quesito di una tipologia che non è stata discussa in classe, ma al quale i ragazzi possono provare a rispondere utilizzando quanto conoscono.

Dopo la verifica gli studenti riesaminano a fondo i quesiti, ne discutono insieme, riscrivono la risoluzione di alcuni di essi curando la formalizzazione, e si confrontano con lo svolgimento scritto che viene loro proposto dal docente. È anche questo un modo per studiare ed imparare.

Ma non basta: dovrebbero riprendere gli esercizi anche *in seguito* e in più occasioni, sia nell’arco del primo biennio che negli anni successivi*;* è per questo che i **fogli di attività** 20 per la classe prima e 22 per la classe seconda, pensati per il lavoro estivo, contengono soprattutto quesiti tratti dalle prove.

E, con l’aiuto del docente, dovrebbero riflettere sui propri punti forti e di debolezza, sull’organizzazione dello studio, a partire dalla gestione degli appunti. Così la verifica diventa un’occasione per ripensare complessivamente il proprio apprendimento ed eventualmente reindirizzarlo; non ci si può accontentare di correggere i singoli errori commessi e di prendere atto delle risposte esatte fornite.

Verifica di matematica

Nei quesiti 3, 4, 5, 7 giustifica in dettaglio il procedimento.

1. Illustra la regola di spostamento sulla tabella delle potenze di base 3 e spiega perché si definisce $3^0 = 1$.

2. Il prodotto di un numero positivo per un numero negativo è negativo. Giustifica tale fatto a partire dalle proprietà delle operazioni, servendoti di un esempio.

3. Quanti sono gli anagrammi della parola PRIMA che finiscono per A?

4. Le targhe dei mezzi agricoli italiani sono costituite da sequenze della forma 2 lettere - 3 cifre - 1 lettera; non si utilizzano le lettere I, O, Q, U.

a) Quante sono le targhe di tale tipo?
b) Quante sono le targhe che non hanno caratteri consecutivi uguali?
c*) Quante sono le targhe che hanno due lettere uguali?

5. La classe 1 M è costituita da 16 femmine e 9 maschi. Quante sono le possibili delegazioni formate da 2 femmine e 2 maschi della classe?

6. Determina a quale numero è uguale ciascuna delle seguenti espressioni.

a) $\left(\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}-1\right)^3-5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2:\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{9}{5}$

b) $\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right):\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{5}{3}-2\right)\right)^2$

7. Scrivi ciascuna delle seguenti espressioni nella forma b^n oppure, se ciò non è possibile, nella forma $a \cdot b^n$, dove a, b, n sono numeri naturali.

$$36^{10}:2 \qquad\qquad 2^{90}-3\cdot 2^{88}$$

8*. Considera il prodotto di numeri naturali decrescenti $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 6\cdot 5$. Prova a scriverlo come rapporto tra due fattoriali. Più in generale, esprimi come rapporto tra due fattoriali il prodotto di numeri naturali $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k)$.

Verifica di matematica

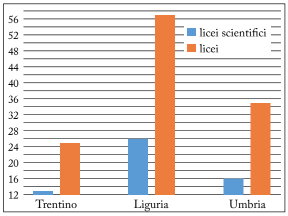
Arrotonda le percentuali alla seconda cifra decimale. Svolgi l'esercizio 2 senza utilizzare la calcolatrice.

1. a) Quali tipi di allineamenti decimali rappresentano un numero razionale? E uno irrazionale?
b) Fornisci un esempio di allineamento decimale compreso tra 10^{-4} e 10^{-3}
c) Sai che a è un numero tale che $10^{-3} < a < 10^{-2}$; tra quali potenze di 10 è compreso il numero $2a$? Giustifica.

2. Calcola le espressioni seguenti e rappresenta i risultati in notazione scientifica. Indica in ogni passaggio le proprietà delle potenze che utilizzi.

$$\frac{1}{5} \cdot (3 \cdot 10^{-3})^3 \cdot (3 \cdot 10^{-4})^{-2} \qquad \frac{(2 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-2})^2}{1{,}2 \cdot 10^{-8}}$$

3. Il grafico riporta il numero di licei scientifici e di licei nel 2014 in Trentino, Liguria e Umbria.
a) Quale percentuale rappresentano i licei del Trentino sul totale dei licei dei tre territori?
b) Ci sono più licei scientifici in Trentino o in Liguria?
Attenzione: la domanda ammette due interpretazioni…



4. Un appartamento costa 150.000 euro. Assumi che il suo prezzo diminuisca del 6% all'anno.
a) Di quanto diminuisce in percentuale il prezzo dell'appartamento in tre anni?
b) Mostra utilizzando le lettere che la risposta al punto a) non dipende dal prezzo iniziale dell'appartamento.
c) Se invece il prezzo diminuisce ogni anno del 6% rispetto a quello iniziale, qual è il prezzo dopo due anni?

5. La quantità di alcol Q_i in un litro di sangue è diminuita del 25% e poi è aumentata di 0,2 g; così è divenuta 0,5 g.
a) Scrivi un'equazione nell'incognita Q_i che descriva come è variata la quantità di alcol e risolvila.
b) Se si rappresenta tale situazione con l'equazione $0{,}25\ Q_i - 0{,}2 = 0{,}5\ Q_i$, quali errori si commettono?

6. Dal quotidiano La Repubblica del 8/10/2003.

… dice il presidente dell'Istat – ma [si può assumere] 1 euro uguale 2.000 lire sì, perché si tratta di un arrotondamento. Ecco allora che il cambio [1 euro uguale a lire] 1.936,27 ha comportato un arrotondamento pari al 3,2%.

- La percentuale indicata non è corretta. Con quale formula il presidente dell'Istat può averla ottenuta?
- Qual è la percentuale corretta?

7*. Di un libro ho letto prima i $\frac{2}{5}$ delle pagine e poi $\frac{1}{3}$ delle rimanenti. Così mi restano da leggere ancora 68 pagine.
Quante sono le pagine del libro?
Scrivi prima un'equazione che descriva la situazione…

Verifica di matematica

1. a) Si dice che si può “trasportare” un addendo da un membro all’altro di un’equazione, cambiandolo di segno. Giustifica tale procedimento mediante i principi di equivalenza, servendoti di un esempio.

b) In ciascuno dei due casi seguenti scrivi un’equazione che abbia l’insieme delle soluzioni S indicato.

$S = \mathbf{R}$ $\qquad$ $S = \{-a,\ a\}$ dove a è un numero positivo fissato.

c) È data l’equazione $cx^2 - x - 2c = 3$ nell’incognita x. Una soluzione è -2; allora quanto vale c?

2. Per ciascuna delle formule seguenti esprimi la variabile indicata in funzione delle altre. Indica in ogni passaggio il principio di equivalenza che utilizzi.

$$a = \frac{v - v_0}{t} \qquad v = ?$$

$$E = m(s - s_0) + c \qquad s = ?$$

3. Determina l’insieme delle soluzioni di ciascuna delle seguenti equazioni. Per la prima equazione, verifica la soluzione che hai trovato.

a) $3(2 - x)(2 + x) - \dfrac{4 - 3x^2}{4} = 12 - \left(\dfrac{3}{2}x - 1\right)^2$

b) $\dfrac{(1 - 2x)(x + 3)}{3} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{(1 - 2x)^2}{2} + 2x\right)$

4. Elena ha percorso in mountain bike un itinerario suddividendolo in tre tappe. La prima misura un terzo dell’intera lunghezza, la seconda misura i $\frac{3}{5}$ della distanza che rimaneva da percorrere per completare l’itinerario e la terza è lunga 12 km. Quanto è lungo l’itinerario?

5. Ad un quiz si guadagnano 500 € per ogni risposta esatta, si perdono 200 € per ogni risposta sbagliata e si perdono 100 € per ogni risposta non data. Jonah ha risposto a 15 domande delle 18 proposte e ha vinto 4.400 €. Quante risposte errate ha dato? E quante corrette?
Risolvi il problema scrivendo una opportuna equazione.

6*. Secondo il Ministero dei Trasporti, lo spazio di arresto s di un’automobile (ossia la distanza percorsa dall’istante in cui viene visto l’ostacolo a quando il veicolo è fermo) che viaggia a velocità v è dato da

$$s = \frac{v^2}{250 \cdot f}.$$

Lo spazio s è espresso in metri, v in km/h, mentre f è una costante che dipende dalle condizioni dell’asfalto.

- È vero che se la velocità iniziale triplica allora triplica anche lo spazio di frenata? Giustifica.
- Nel caso in cui l’asfalto è liscio si ha $f = 0{,}5$. Quale velocità massima può avere un’automobile per non tamponare un’altra ferma 30 m più avanti?
- Se non si tiene conto del tempo di reazione, lo spazio di arresto si può esprimere come $s = \dfrac{v^2}{2a}$, dove a è l’accelerazione del veicolo. Prova a ricavare tale formula a partire dalle relazioni: $s = vt - \dfrac{1}{2}at^2$ e $a = \dfrac{v}{t}$ (t è il tempo di frenata).

Verifica di matematica

1. a) In edilizia si utilizzano triangoli per realizzare strutture rigide; spiega perché mediante i criteri di uguaglianza
b) Costruisci la bisettrice di un angolo con riga e compasso. Giustifica la costruzione
c) Scrivi la definizione di rette parallele nello spazio.

2. Risolvi il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{2x^2-y}{2}=0 \\ (y+1)(y-1)-y+x=y^2 \end{cases}$$

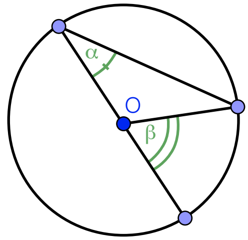
3. La differenza tra l'altezza di un rettangolo e la base è 50 m. Se si aumenta la base di 20 m e si diminuisce l'altezza di 30 m si ottiene un nuovo rettangolo che ha area uguale a quella del rettangolo iniziale.
Quanto misurano i lati del rettangolo iniziale?
Modellizza la situazione mediante un opportuno sistema.

4. Sono dati due triangoli ABC e A'B'C'. Si sa che AB = A'B', AC = A'C' e che le mediane CK e C'K' sono uguali.
- Dimostra che i triangoli AKC e A'K'C' sono uguali
- Dimostra che da ciò si ottiene BC = B'C'.

5. Considera un triangolo isoscele ABC, tale che $\hat{A}=\hat{B}$. Per un punto E del lato AB traccia la retta parallela ad AC. Essa incontra in un punto P il lato BC; essa inoltre incontra in un punto Q la retta per C e parallela ad AB. Dimostra che il triangolo PQC è isoscele.

6*. Se la somma delle cifre di un numero è un multiplo di 3 allora il numero è divisibile per 3.
Prova a dimostrare tale affermazione per i numeri costituiti da due cifre.
Vale il risultato inverso? Giustifica.

7*. In figura è rappresentata una circonferenza di centro O. Dette α e β le ampiezze degli angoli indicati, prova ad esprimere α in funzione di β.



Verifica di matematica

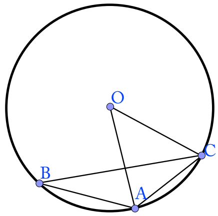
1. a) In molti teatri dell'antichità gli spettatori erano disposti su (più) semicirconferenze. Perché?

b) In una circonferenza di centro O considera un diametro EF. Detto P un punto sulla circonferenza dimostra che

$$E\hat{O}P = 2E\hat{F}P.$$

c) Con il software GeoGebra hai realizzato un triangolo; spiega come puoi costruire la circonferenza inscritta. In particolare indica quali proprietà geometriche e quali strumenti del software utilizzi.

2. In figura è rappresentata una circonferenza di centro O.
È noto che l'ampiezza di $A\hat{B}C$ è 24° e quella di $A\hat{C}B$ è 28°.
Allora qual è l'ampiezza di $B\hat{C}O$?



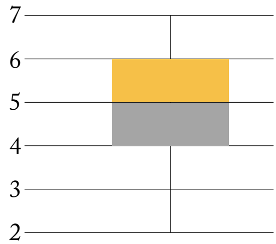
3. Un'indagine su quanti libri hanno letto negli ultimi tre mesi alcuni studenti ha dato i seguenti risultati

Numero libri letti dallo studente	0	1	2	3	4	5
Numero studenti	2	13	11	8	9	7

- Calcola il numero medio di libri letti; scrivi la distribuzione delle frequenze cumulate percentuali
- Fornisci la distanza interquartile e rappresenta la distribuzione del numero di libri letti mediante un box-plot.

La stessa indagine è stata poi condotta su altri studenti. Il box - plot in figura ne rappresenta i risultati.

- Quale informazione si può dedurre sulla percentuale di studenti che hanno letto 4 o più libri?
- Si può dedurre dalla figura che almeno il 50% degli studenti ha letto 5 o 6 libri?



4. La media delle altezze dei 18 studenti di una classe è di 172,1 cm. Durante l'anno si aggiungono alla classe due studenti che hanno altezza uguale tra loro. In questo modo l'altezza media della classe diventa 170,9 cm. Qual è l'altezza dei due nuovi studenti?

5. Fattorizza i seguenti polinomi

$8x^3 - 24x^2 + 18x$ $\qquad ab^5 - a^5b$ $\qquad$ * $30x - 7x^{n+1} - x^{2n+1}$

6*. I dati $y_1, y_2, ..., y_5$ hanno media M e varianza V. Considera poi i dati $y_1 + 2, y_2 + 2, ..., y_5 + 2$: esprimi la loro media in funzione di M ed esprimi la loro varianza in funzione di V, giustificando il procedimento.

Verifica di matematica

1. Scrivi la seguente espressione come un'unica frazione algebrica.

$$\frac{1}{x^3}+\frac{2}{4-x^2}\cdot\left(\frac{3}{2x-2}+\frac{x+1}{x-x^2}\right)$$

2. Nella formula seguente esprimi la variabile p in funzione delle altre.

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=-\frac{2}{r}$$

3. Determina l'insieme delle soluzioni delle seguenti equazioni, dopo aver indicato il loro insieme di definizione.

$$\frac{x^3-3x^2-10x}{x+2}=0 \qquad \frac{1}{2}-\frac{x+1}{x-3}=-\frac{x^2}{2x^2-12x+18}$$

4. Considera il triangolo di vertici A(−4, −6), B(3, −5) e C(2,2).
a) Verifica che il triangolo è isoscele e calcolane l'area
b) Indica con M il punto medio del lato AC e con P il punto della retta passante per M e parallela all'asse y, che ha ordinata $-\frac{13}{5}$; calcola l'area del quadrilatero PBCM.

5. Esamina il teorema:

Dato un quadrilatero, si considerino i punti medi dei suoi lati. Si costruisca il quadrilatero convesso che ha come vertici tali punti. Allora i lati opposti del nuovo quadrilatero sono uguali.

Dimostra il teorema in un caso particolare: considera il quadrilatero OABC che ha il vertice O nell'origine e gli altri vertici nei punti di coordinate A(a, 0), B(b, 2), C(0, 4), dove $b > a > 0$. Mostra l'uguaglianza di una sola coppia di lati.

* Prova poi a dimostrare il teorema ricorrendo alla geometria sintetica (suggerimento: traccia la diagonale OB e utilizza un risultato dimostrato in classe…).

6*. Le grandezze fisiche E e p, relative ad una particella di massa m e velocità v, sono date da

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad p=\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$ dove c è una costante.

Esprimi $\frac{E^2}{c^2}-p^2$ in funzione della sola massa e della costante c.

Se m raddoppia, è vero che il valore dell'espressione $\frac{E^2}{c^2}-p^2$ raddoppia? Giustifica.

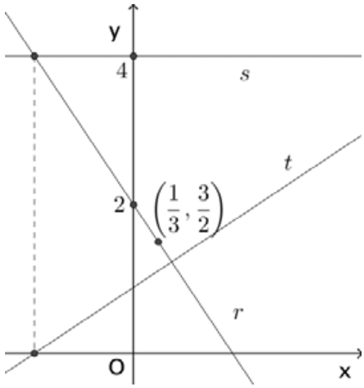
Verifica di matematica

1. La pista da sci 3 – Tre di Madonna di Campiglio ha una pendenza massima del 63%. Un atleta percorre un tratto che ha tale pendenza; se compie un dislivello di 35 m, quanti metri percorre lungo la pista?

2. Giustifica in dettaglio perché la retta che ha pendenza 3 e passa per il punto (1,2), ha equazione

$$y = 2 + 3(x - 1).$$

3. La retta s in figura è parallela all'asse x e le rette r e t sono perpendicolari. Scrivi le equazioni delle tre rette (il segmento tratteggiato è parallelo all'asse y).



4. Parcheggiare in una zona A costa 6 cent al minuto per i primi 40 minuti e poi 4 cent al minuto.

- Traccia il grafico del costo y in euro in funzione della durata x della sosta in minuti
- Scrivi le equazioni delle rette che hai disegnato
- Se si sono spesi 5 euro, quanto è durata la sosta?
- Il parcheggio in una zona B prevede un costo fisso di 1 euro e un costo di 2 cent al minuto. Per quale durata della sosta è più conveniente parcheggiare in zona B?

5. Determina le coordinate dell'ortocentro del triangolo di vertici A(–4,0), B(1,–2), C(2,2).

6*. Rappresenta nel piano cartesiano l'insieme dei punti (x,y) che verificano

- la condizione $(x + 3)(y - 1) = 0$
- la condizione $(x + 3)(y - 1) < 0$.

Verifica di matematica

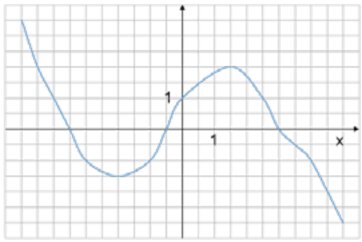
1. Scrivi la seguente espressione nella forma $a + b\sqrt{2}$, dove $a, b \in \mathbf{Z}$.

$$(3-\sqrt{2})(\sqrt{32}-\sqrt{2})+\sqrt{50}-\sqrt{8}\,(2\sqrt{2}-1)^2$$

2. a) Verifica che il numero $\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$ è soluzione dell'equazione $3x^2 - x - 1 = 0$

b) Risolvi l'equazione $x^2 - 8x - 10 = 0$ mediante il completamento del quadrato.

3. Considera il grafico della funzione f: $[-5,5] \to \boldsymbol{R}$ rappresentato in figura.
- Per quali x vale $f(x) \geq -1$?
- Tra quali interi consecutivi è compreso $f(\sqrt{11})$?
- Per quali c l'equazione $f(x) = c$ ha una sola soluzione?



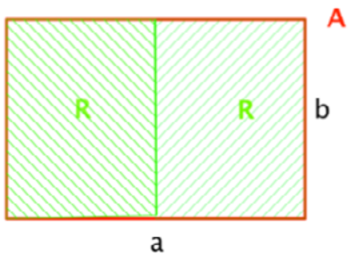
4. Utilizza i grafici delle funzioni base per risolvere le seguenti disequazioni.

$$\frac{1}{x}+1 \leq 2\,|x| \qquad\qquad 6-\sqrt{x} > \frac{x}{3}$$

5. Traccia il grafico della funzione f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{se } x \in (-\infty,1) \\ x^2-2 & \text{se } x \in [1,+\infty) \end{cases}$
- Determina l'immagine e gli zeri di f
- Per quanti a vale $f(a) = f(-\frac{1}{2})$?
- * Prova a tracciare il grafico della funzione $|f|$; giustifica.

6. La grandezza E è inversamente proporzionale al quadrato di r (dove $r > 0$).
- Se r triplica come varia E? Giustifica.
- Scrivi l'espressione analitica della funzione $E(r)$.
  Se la costante di proporzionalità è diversa da 1, vale $E(\sqrt{r}) = \sqrt{E(r)}$?

7. Il foglio rettangolare A in figura ha i lati di lunghezza a e b ed è suddiviso in due rettangoli uguali R. Sappiamo che:
il rapporto tra i lati maggiori di A e di R è uguale al rapporto tra i lati minori di A e di R.
Da questa proprietà deduci quanto vale il rapporto tra i lati del rettangolo A.



Verifica di matematica

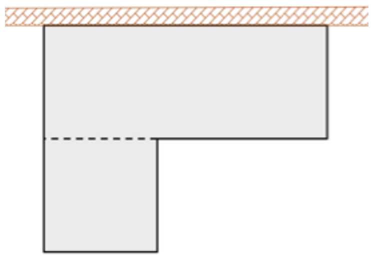
1. Determina le soluzioni delle seguenti equazioni nell'incognita x.

$$\frac{x+1}{4x^2+4x+1}+\frac{3}{4x^2-1}=-\frac{2}{1-2x} \qquad\qquad 2x^2+(1-2k)x=k$$

2. Traccia il grafico della funzione $f(x)=-4x^2-4x+3$, individuando opportuni punti notevoli.
- Qual è l'immagine di f?
- Per quali x vale $f(x)>3-|x|$?
- * Per quale $c\in[-1,1]$ vale $f(c)\leq f(x)$ per ogni $x\in[-1,1]$?
- * Supponi che per $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ la funzione $f(x)$ sia la legge oraria di una palla al tempo x. È vero che in due intervalli di tempo di ampiezza uguale la palla percorre distanze uguali?

3. Una compagnia di trasporti urbani vende in media ogni giorno 3.300 biglietti giornalieri al prezzo di 3 euro. Secondo una ricerca di mercato, per ogni aumento del prezzo del biglietto di 0,10 euro il numero di biglietti venduti diminuirebbe di 75 unità.
Per quale prezzo del biglietto il ricavo è massimo? Giustifica.

4. Con 60 m di staccionata si vuole delimitare un terreno della forma in figura: esso è costituito da un rettangolo e da un quadrato che ha lato uguale al lato minore del rettangolo. Un lato del rettangolo è appoggiato al muro, dunque non va delimitato.
Per quale lunghezza del lato del quadrato il terreno ha area massima?



5*. Supponi che una funzione polinomiale di secondo grado $f(x)=ax^2+bx+c$ abbia due zeri; allora il loro prodotto è uguale al rapporto $\frac{c}{a}$.
- Verifica questa proprietà in un caso particolare a tua scelta
- Dimostrala in generale.

Verifica di matematica

Nei quesiti relativi alla probabilità giustifica il procedimento con schemi grafici (eccetto il n. 4) e con adeguata formalizzazione.

1. Risolvi l'equazione

$$\frac{1}{3x^2-2x-1}=\frac{1}{1-x}-\frac{3x}{9x^2-1}.$$

2. Nel lancio di due dadi "onesti" a 8 facce, uno bianco e uno rosso, qual è la probabilità che il numero uscito sul dado bianco sia minore di quello uscito sul dado rosso?

3. Si stima che in Italia una persona su 150 sia affetta da celiachia, intolleranza permanente al glutine. Un test di ultima generazione per diagnosticarla è il DPG-AGA. La probabilità che esso risulti negativo sul soggetto sano è del 98,5%, mentre la probabilità che risulti negativo sul soggetto celiaco è del 15,6%.
- Qual è la probabilità che il test fornisca indicazioni corrette sull'individuo scelto a caso?
- Spiega perché la probabilità che il test fornisca indicazioni errate è "piccola" (è minore del 2%) nonostante la probabilità di errore sui celiaci non sia "piccola" (è del 15,6%)
- * Se la percentuale dei malati cresce, allora la probabilità che il test dia indicazioni corrette cresce? Giustifica algebricamente.

4. In un sacchetto ci sono 4 palline verdi e 8 gialle. Se ne estraggono tre a caso contemporaneamente. Determina la probabilità che
- tra le palline estratte ve ne sia almeno una gialla
- tra le palline estratte ce ne siano sia di verdi che di gialle.

5.
- Considera più lanci di una moneta "onesta". Traccia un tipico grafico qualitativo delle frequenze relative dell'uscita di "Testa" al variare del numero dei lanci
- Ad un gioco, se vinci ottieni V euro, se perdi paghi S euro; la probabilità che tu vinca è p. Quale guadagno medio ti aspetti su "molte" partite? Giustifica.

6. Considera la seguente versione del poker: si utilizzano 32 carte (7, 8, 9, 10, J, Q, K, A dei quattro semi), ogni giocatore ne riceve 5 e non può cambiarle. La probabilità di ottenere scala reale è circa 0,002%.
Spiega in dettaglio perché la scala reale vince sul full (3 carte dello stesso valore e altre 2 carte di valore uguale tra loro).

7*. Scrivi la funzione polinomiale di secondo grado $p(x)$ che ha zeri 1 e 3 e tale che $p(0) = 9$.

Verifica di matematica

1. a) Traccia due segmenti AB e AD. Costruisci mediante riga e compasso il parallelogramma ABCD. Giustifica la costruzione, ossia dimostra la condizione sufficiente sui parallelogrammi utilizzata

b) Illustra il ragionamento seguito da Galileo per giustificare il fatto che i giganti non possono esistere

c) Il perimetro dell'ottagono regolare R è minore del 20% rispetto a quello dell'ottagono regolare S. Di quanto è più piccola l'area di R rispetto a quella di S?

2. Il 28 marzo 2017 è entrata in circolazione la nuova moneta da una sterlina. Ha la forma di dodecagono regolare e ciascun lato è lungo circa 6 mm. Qual è la sua area?

3. Considera una piramide retta a base quadrata. Sia PQ un lato della base, V il vertice della piramide, VH la sua altezza. Si sa che $\overline{PQ} = 4$ e $V\hat{P}H = 67°$. Determina l'ampiezza dell'angolo tra lo spigolo VP e l'apotema VK della faccia PVQ.

4. In un triangolo rettangolo PQR i cateti PQ e PR hanno lunghezza rispettivamente 15 e 20. Sul cateto PQ fissa un punto S; da esso conduci la perpendicolare all'ipotenusa e sia T il loro punto di intersezione. L'area del triangolo SQT è i $\frac{2}{9}$ di quella del triangolo PQR.
Determina la lunghezza del segmento SQ.

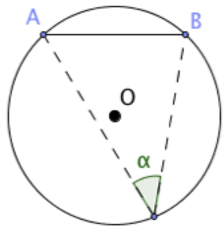
5. Considera un triangolo ABC. Per un punto E del lato AB traccia la retta parallela ad AC. Essa incontra in un punto F il lato BC; essa inoltre incontra in G la retta per C e parallela ad AB.

- Dimostra che i triangoli EBF, GCF e ABC sono simili
- Se BF è $\frac{1}{4}$ di BC e CG ha lunghezza 2, allora qual è la lunghezza di AB?

6*. Considera una circonferenza di raggio r e centro O e sia α un angolo (acuto) alla circonferenza, come in figura. Prova a dimostrare che vale

$$\overline{AB} = 2r \sin \alpha.$$

Suggerimento: traccia il diametro BC e considera il triangolo…



7*. Determina l'ampiezza dell'angolo acuto formato nel piano cartesiano dalla retta passante per l'origine (0,0) e (1,2) e la retta che passa per i punti (–1,1) e (1,3).

Verifica di matematica

1. Due numeri s e t verificano le condizioni $t < 0$, $s \neq 0$ e $st < 3$. Allora quali delle seguenti disuguaglianze sono certamente vere?

$$t < \frac{3}{s} \qquad\qquad \frac{3}{t} - s < 0 \qquad\qquad s^3t^3 < 27$$

Se una disuguaglianza è vera, allora dimostrala. Altrimenti fornisci un controesempio.

2. Determina l'insieme delle soluzioni delle disequazioni che seguono.

$$\frac{-4x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4x + 4} < x \qquad\qquad \frac{2 - |x|}{\sqrt{x+3} - 2} \geq 0$$

Qual è il significato del simbolo "+" che utilizzi nello schema risolutivo delle due disequazioni?

3. Scrivi l'equazione della parabola che passa per i punti $A(1,-1)$, $B(-2,-4)$, $C(4,-7)$.

4. Mediante un opportuno sistema lineare, determina il quoziente e il resto della divisione del polinomio $6x^3 - 5x^2 - 3x$ per il polinomio $3x + 2$.

5. La base maggiore di un trapezio rettangolo supera di 1 il doppio della base minore. Il lato obliquo è lungo $\sqrt{6}$ e la diagonale maggiore è lunga $\sqrt{11}$. Trova l'area del trapezio.

6*. Prova a determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$4x^4 + x^2 - 3 = 0.$$

Suggerimento: poni $x^2 = t$; ottieni così un'equazione nella variabile t…

Prova poi a risolvere la disequazione $4x^4 + x^2 - 3 < 0$. Giustifica.

3.2 I materiali per iniziare: la matematica che conta

Cosa proporre nelle prime due settimane di lezione nella classe prima?

Da una parte vorremmo far comprendere fin da subito agli studenti cosa significa *fare matematica* nella scuola secondaria di secondo grado (ossia rappresentare, argomentare, effettuare stime, generalizzare, dimostrare…) e dall'altra vorremmo discutere con loro alcuni aspetti dei *numeri*, visto che i numeri sono alla base della matematica.

Con un'attenzione: raccontarlo non basta. È necessario che i ragazzi lo *sperimentino* direttamente e, durante le attività, parlino e discutano tra loro; lo dice l'esperienza e lo conferma la ricerca in didattica.

Contare gli elementi di un insieme risponde a queste esigenze. In sostanza si tratta di percorrere gli elementi di base del calcolo combinatorio, ma senza introdurre nomi o limitarsi ad applicare formule generali.

Questo segmento del percorso è descritto in dettaglio nella prima parte della sezione 2.2.1 ed è schematizzato all'inizio della sezione 2.4.1. In questo paragrafo mostriamo invece i materiali realizzati per lo studente, alcuni fogli di attività e una dispensa; prima è però opportuno ricordare brevemente come si inseriscono nel percorso e precisare alcuni aspetti del loro impiego a supporto del lavoro dei ragazzi; il loro significato e le modalità di utilizzo generali sono illustrati nell'introduzione del volume.

Il punto di partenza può essere un *problema aperto,* come quello di determinare il numero dei possibili codici di aeroporti IATA.

Poi si possono discutere alcuni quesiti analoghi e, in particolare, quelli proposti nei quattro **fogli di attività**, e calcolare così quante sequenze soddisfano criteri fissati, cominciando a sviluppare contestualmente alcune abilità, come interpretare un testo, effettuare stime, utilizzare le lettere per generalizzare. Gli studenti li esaminano prima individualmente o in piccoli gruppi, e poi si confrontano con la classe e con il docente.

Il punto d'arrivo è *formalizzare* quanto esaminato ed è bene farlo *assieme* ai ragazzi, anche se ciò comporta un certo investimento di tempo. Precisamente, si individuano alcuni problemi guida e gradualmente si prova a generalizzare il testo e la risoluzione. In questo modo, di fatto, si (ri)costruisce la **dispensa**, che resta comunque un riferimento per la rielaborazione.

Complessivamente queste attività dovrebbero occupare circa *10 ore* di lezione, ma naturalmente dipende dal contesto e da quanto tempo si decide di dedicare all'esplorazione e alla discussione.

Per non appesantire troppo il lavoro degli studenti, è meglio proseguire con un argomento più applicativo, come il calcolo aritmetico e i concetti fondamentali sottesi.

Così al termine del primo mese di scuola si può assegnare una verifica ricca ma equilibrata, come **verifica 1**, mostrata nella sezione 3.1. La prova fornisce un'idea delle richieste che a nostro avviso ha senso fare ai ragazzi a conclusione di questa parte del percorso.

Infine una riflessione. Alcuni aspetti che intendiamo sviluppare ed affinare in queste prime attività compaiono già nelle Indicazioni nazionali per il primo ciclo ([MIUR, 2012]). Ad esempio

> *[…] la matematica […] contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri.*
>
> *Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola.*
>
> *Un'attenzione particolare andrà dedicata allo sviluppo della capacità di esporre e di discutere con i compagni le soluzioni e i procedimenti seguiti.*

Sono affermazioni forti e davvero innovative. Se valgono per il primo ciclo, non dovrebbero valere, ad un livello più profondo e in situazioni più articolate, anche per la scuola secondaria di secondo grado?

Perché allora non svilupparle fin dall'inizio della classe prima, come proponiamo?

Contare gli elementi di un insieme – per iniziare

1. a) Rappresenta mediante un diagramma ad albero tutte le sequenze di tre lettere, scelte tra A, B, C

b) Considera tutte le sequenze di quattro lettere, scelte tra A, B, C, D. Elenca in ordine alfabetico tutte le sequenze di tale tipo comprese tra BDAA e CAAA.

2. Hai dimenticato la password per accedere ad un sito internet. Ricordi però che era lunga 5 caratteri, ciascuno dei quali era scelto tra le dieci cifre e i simboli ! e ?.

a) Quante password del tipo indicato si possono comporre?

b) Immagina di poter digitare 10 password ogni minuto. Entro quanti giorni sei sicuro di accedere al sito?

3. Un byte è costituito da 8 bit e ogni bit può assumere il valore 1 oppure il valore 0.

a) Quante sono le possibili sequenze di 0 oppure 1 (informazioni) che occupano un byte?

b) E 3 byte?
* Dopo aver risposto, prova a fornire la soluzione in un altro modo: utilizza l'approssimazione $2^{10} \approx 1000$

c) Se si scrive un bit in ogni quadretto, tutte le sequenze indicate in b) ci stanno sul tuo quaderno?

4. Dal 1994 le targhe automobilistiche italiane sono costituite dalla sequenza 2 lettere – 3 cifre – 2 lettere. Si utilizzano solo 22 lettere dell'alfabeto (non sono utilizzate le lettere I, O, U, Q). Sia le cifre che le lettere possono essere ripetute.

a) Quante targhe si possono così formare?

b) Nel 2019 sono state immatricolate 1.916.320 automobili. Assumi che ogni anno vengano immatricolate 2 milioni di vetture; allora in quale anno saranno esaurite le possibili targhe?

5. La Corsa Tris è una gara ippica che premia gli scommettitori che indovinano i primi tre cavalli che arrivano al traguardo, nell'ordine di arrivo.

a) Se ad una corsa partecipano 5 cavalli, su quanti possibili terne si può scommettere?

b) E se partecipano 12 cavalli?

Risultati

1) b) BDAA, BDAB, …, BDDD, CAAA; esse sono 17 **2) a)** 248.832 **b)** 18 giorni **3) a)** 256 **b)** circa 16.000.000 **c)** no, servirebbero circa 170.000 facciate (nel formato A4) **4) a)** $22^4 \cdot 10^3$, ossia 234.256.000 **5) a)** 60 **b)** $12 \cdot 11 \cdot 10$ ossia 1320

Contare gli elementi di un insieme – ordine, fattoriale, lettere

Giustifica il procedimento, anche mediante schemi grafici. Non utilizzare la calcolatrice.

1. Una classe ha 12 docenti. Tra essi si devono nominare un coordinatore e un segretario (devono essere due persone diverse). Quante sono le possibili coppie così costituite?

2. Nella tua playlist preferita ci sono 1200 brani musicali. Se i brani vengono riprodotti in ordine casuale, quante sequenze di 23 brani diversi puoi ascoltare?

☐ $1200 \cdot 1199 \cdot \ldots \cdot 1177$ ☐ $1200 \cdot 1199 \cdot \ldots \cdot 1178$ ☐ 1200^{23}

3. Schematizza gli anagrammi (anche privi di senso) della parola DARE.
Quanti sono gli anagrammi della parola CLIMB?

4. Determina a quali numeri sono uguali le espressioni:

$$\frac{12!}{9!} \qquad \frac{7!}{12} \qquad \frac{8!}{12} \qquad \frac{10!}{7!\,3!}$$

5. Il prodotto $123 \cdot 122 \cdot \ldots \cdot 111$ è uguale a

☐ $\frac{123!}{110!}$ ☐ $123! - 110!$

6. A cinque amici viene chiesto di formare una squadra di beach volley. Quante sono tutte le possibili squadre che possono formare?

7. In una classe di 26 studenti si elegge una delegazione di due rappresentanti. Quante delegazioni di studenti della classe si possono formare?

8. Quante password di lunghezza k si possono formare scegliendo ogni carattere tra n simboli?

9. La tua playlist preferita contiene n brani musicali. Se i brani vengono riprodotti in ordine casuale, quante sequenze di k brani diversi puoi ascoltare? Naturalmente vale $k \leq n$.

Risultati
1) 132 **3)** 120 **4)** 1320; 420; 3360; 120 **6)** 10 **7)** 325

Contare gli elementi di un insieme – questioni (un po') più articolate

Giustifica il procedimento mediante schemi grafici e nel linguaggio naturale.

1. Le targhe automobilistiche portoghesi dal 1937 al febbraio 2020 erano costituite da sequenze della forma

2 cifre - 2 cifre - 2 lettere oppure *2 cifre - 2 lettere - 2 cifre* oppure *2 lettere - 2 cifre - 2 cifre*

Le lettere W, Y, K non erano utilizzate.

a) Quante targhe di tale tipo si possono formare?
b) Alle targhe dell'esercito sono riservate le coppie di lettere MX, MG, ME. Quante erano le possibili targhe portoghesi di questo tipo?
c) Quante erano le possibili targhe portoghesi costituite da caratteri (lettere e cifre) diversi tra loro?

2. Il codice fiscale è una sequenza del tipo

6 lettere – 2 cifre – 1 lettera (*) – 2 cifre (**) – 1 lettera e 3 cifre – 1 lettera (***)

Precisamente:
(*): identifica il mese di nascita, dunque può essere scelta tra 12
(**): per gli uomini sono le due cifre del giorno di nascita; per i giorni del mese dall'1 al 9, la prima cifra è 0; per le donne si somma 40 al giorno di nascita
(***): resta determinata una volta fissati gli altri caratteri della sequenza, secondo un algoritmo predefinito.

a) Quante sequenze si possono formare nel caso in cui il mese di nascita sia gennaio?
b) In realtà, il blocco costituito da 1 lettera e 3 cifre identifica il comune italiano oppure lo stato estero di nascita. Al 15 ottobre 2021 i comuni italiani sono 7904 e gli stati sono 248. Se tieni conto di questa ulteriore informazione, quante sequenze (con mese di nascita gennaio) puoi formare?

3. Considera le sequenze di quattro lettere dell'alfabeto italiano.
a) Quante sono in totale?
b) Quante sono quelle che contengono la lettera A unicamente al primo e all'ultimo posto?
c) Quante sono quelle che non contengono doppie, ossia lettere consecutive uguali?
d) Il numero di sequenze aumenta di più se consideriamo sequenze di 5 lettere dell'alfabeto italiano o se consideriamo sequenze di 4 lettere aggiungendo la lettera K all'alfabeto? Giustifica.

4. Quanti sono gli anagrammi della parola LIGABUE? E tra questi, quanti sono quelli che iniziano per LIGA?

5. Mostra che per ogni numero naturale n valgono le seguenti uguaglianze:

$$\frac{(n+1)!}{n \cdot (n-1)!} = n + 1, \text{ con } n \geq 1 \qquad\qquad \frac{n! + (n+1)!}{n+2} = n!$$

6. Due rifugi alpini sono collegati tra loro da 6 diversi sentieri. Vuoi andare dal primo al secondo rifugio e poi ritornare, percorrendo due sentieri differenti all'andata e al ritorno. Quanti percorsi puoi fare?

7. Da un mazzo di 40 carte, 10 per ogni seme, estraggo contemporaneamente 2 carte. In quanti modi posso così ottenere due carte di bastoni?

8. Tre adulti e quattro bambini intendono percorrere una via ferrata in montagna. Devono stare in fila indiana e si vuole che il primo e l'ultimo della fila siano adulti. In quanti modi possono disporsi?

9. a) Quante parole di 5 caratteri si possono formare con le lettere A, B, C, D?
b) Nel modello di Maxwell - Boltzmann si dispongono n particelle distinguibili tra loro, in s regioni di un certo spazio. In altre parole, ad ogni particella si assegna una regione. Se n = 5 e s = 4, quante configurazioni si possono così realizzare? E in generale?
c) Il problema delle particelle e quello delle parole sono analoghi. Indica quali elementi si corrispondono.

10. Tra i numeri di 5 cifre quanti sono i multipli di 10?

Risultati

1) a) 15.870.000 **b)** 90.000 **c)** 7.650.720 **2) a)** $26^7 \cdot 10^5 \cdot 62$ **b)** $26^6 \cdot 10^2 \cdot 62 \cdot 8152$ **3) a)** 194.481 **b)** 400 **c)** 168.000 **4)** 5040; 6 **6)** 30 **7)** 45 **8)** 720 **9) a)** 1.024 **b)** 1.024; s^n **10)** 9.000

Contare gli elementi di un insieme – consolidamento

Giustifica il procedimento mediante schemi grafici e nel linguaggio naturale.

1. Quante sono le diverse sequenze di 10 lanci di un dado in cui esce lo stesso numero al primo e all'ultimo lancio?

2. Considera le password di 4 caratteri, ciascuno scelto tra le lettere dell'alfabeto italiano.
a) Quante password hanno solo i primi 3 caratteri uguali?
b) Quante invece hanno esattamente 3 caratteri uguali?

3. I quattro flautisti e i tre violinisti di un complesso devono sedersi in fila. Se tutti i musicisti che suonano lo stesso tipo di strumento devono sedersi uno accanto all'altro, in quanti modi possono sistemarsi?

4. G.P. Harsdorfer nel testo "Ricreazione" del 1651 riporta la strofa costituita dai due versi:

Onore, arte, denaro, bene, amore, moglie e figlio
l'uomo li ha *cercati, sentiti, sperati* e persi

L'autore considera le strofe che si ottengono modificando l'ordine dei 7 sostantivi in corsivo nel primo verso e l'ordine dei 3 verbi in corsivo nel secondo verso. Quante strofe si ottengono in questo modo?

5. Cerca sul testo di geometria cosa si intende per diagonale di un poligono.
a) Disegna un pentagono e traccia tutte le diagonali. Quante sono?
b) Prova a individuare una formula generale per il numero di diagonali di un poligono di n lati, con $n>3$.
c) Verifica se la formula trovata è corretta per un quadrilatero e per il pentagono che hai considerato al punto a).

6. [*Test ingresso nazionale, corsi di laurea scientifici 2008*] Il codice per aprire un lucchetto è costituito da una sequenza di quattro cifre (da 0 a 9). Ho dimenticato il codice, ma mi ricordo che le cifre sono tutte distinte e che tra le prime tre cifre ci sono sicuramente i numeri 6 e 9. Quante sequenze di quattro numeri dovrei provare per essere certo di aprire il lucchetto?

(A) 100 (B) 118 (C) 336 (D) 600

7. a) Ho acquistato 7 libri e tra essi ne voglio scegliere 3 da leggere in vacanza. Quante scelte posso fare?
b) E se invece ne intendo lasciare 3 a casa, quante scelte posso fare?

8. Una commissione predispone una prova d'esame con quesiti di storia, fisica e inglese; per ciascuna disciplina vengono preparati 3 quesiti. Si decide che la prova debba essere costituita da 8 quesiti, scelti tra quelli predisposti.
Quante prove diverse possono essere realizzate?
All'indirizzo http://laureescientifiche.science.unitn.it/simulazione_risorse/quesito-25.html trovi la risoluzione completa illustrata mediante un video e mediante un testo scritto.

9. Consideriamo una versione del gioco del poker in cui si utilizza un mazzo da 32 carte (A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7 di quattro semi) e al giocatore si distribuiscono contemporaneamente 5 carte. Non si possono cambiare le carte ricevute.

a) In quanti modi si può realizzare un "poker" (ossia 4 carte dello stesso valore e 1 carta di valore diverso)?

b) Ho ricevuto gli assi di cuori, quadri e picche. In quanti modi posso realizzare un "full" (ossia 3 carte dello stesso valore e altre 2 carte di valore uguale tra loro)?

c) In quanti modi si possono ricevere le carte?

d) Prova a valutare la probabilità di realizzare un "poker".

Risultati

1) 6^9 **2) a)** 420 **b)** 1680 **3)** 288 **4)** 30.240 **6)** 336 **7)** 35 **9) a)** 224 **b)** 42 **c)** 201.376

Contare gli elementi di un insieme

• Il problema delle password

a) Sono dati 10 caratteri distinti. Quante password costituite da 4 di essi si possono formare?
b) I 26 studenti di una classe fanno una gara. Quante classifiche delle prime 3 posizioni ci possono essere?

In generale, sono dati un insieme di $\boldsymbol{n}$ elementi distinti e un numero $\boldsymbol{k}$. Si considerano le sequenze di k elementi dell'insieme; è significativo l'**ordine** in cui tali elementi compaiono nella sequenza (ossia se due sequenze hanno gli stessi elementi e questi sono elencati in ordine diverso, allora le due sequenze sono diverse).

Risoluzione
a) Il numero delle password è $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$
b) Il numero di classifiche delle prime tre posizioni è $26 \cdot 25 \cdot 24$.

In generale, se gli elementi si possono **ripetere** nella sequenza, allora il numero di sequenze di k elementi è:

$$\boldsymbol{n^k}.$$

Se gli elementi **non** si possono **ripetere** nella sequenza, allora il numero di sequenze di k elementi è:

$$\boldsymbol{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).}$$

In questa seconda situazione deve essere $k \leq n$.

• Il problema degli anagrammi

Quanti anagrammi si possono formare con la parola CLIMB?

In generale, è dato un insieme di $\boldsymbol{n}$ elementi distinti. Si considerano le sequenze di **tutti** gli n elementi dell'insieme, senza ripetizioni; è significativo l'**ordine** in cui tali elementi compaiono nella sequenza (ossia in ogni sequenza ci sono gli stessi elementi ma essi sono elencati in ordine diverso da quello delle altre sequenze).

Risoluzione
Il numero di tali anagrammi è $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$

In generale, il numero di sequenze di tale tipo è:

$$\boldsymbol{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}.$$

Tale numero si indica con il simbolo $\boldsymbol{n!}$, che si legge "n fattoriale".

- **Il problema delle squadre**

  A cinque amici viene chiesto di formare una squadra di beach volley. Quante sono tutte le possibili squadre che possono formare?

  In generale, sono dati un insieme di $\boldsymbol{n}$ elementi distinti e un numero $\boldsymbol{k} \leq n$. Si considerano i suoi sottoinsiemi costituiti da k elementi distinti; pertanto **non** è significativo l'**ordine** in cui sono elencati gli elementi (ossia se due sottoinsiemi hanno gli stessi elementi, allora sono uguali, anche se gli elementi sono elencati in ordine diverso).

  Risoluzione
  Il numero di squadre è $\frac{5 \cdot 4}{2}$.

  Più in generale, se $k = 2$ allora il numero di sottoinsiemi è

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

3.3 I materiali per investigare le percentuali

Le percentuali sono molto importanti poiché intervengono in diversi ambiti, dalle discipline scientifiche all'esperienza *quotidiana*.

Sono esaminate in dettaglio nella sezione 2.2.2, nell'ambito dei numeri, e si incontrano anche nella statistica descrittiva e nello studio delle figure simili. Ma intervengono pure dopo il primo biennio, ad esempio nel contesto dei modelli esponenziali.

Ora ci proponiamo di mostrare i materiali realizzati per gli studenti: una dispensa, un'attività e alcuni fogli di attività. Prima però ricordiamo sinteticamente come si inseriscono nel percorso e precisiamo come possono essere impiegati a supporto del lavoro dei ragazzi.

Per iniziare si possono discutere le tre questioni di base contenute nella **dispensa** ***Percentuali*** e chiarire a fondo il significato di percentuale. Poi, come proponiamo nello stesso documento, si possono esaminare modelli di crescita, passando presto dal modello additivo a quello *moltiplicativo*, ossia interpretando un aumento percentuale direttamente come moltiplicazione e non come addizione.

Anche in queste situazioni è opportuno lasciare spazio al confronto tra gli studenti e discutere le loro proposte di risoluzione. La dispensa va consegnata in un secondo momento e costituisce un riferimento per la rielaborazione personale, che integra i tentativi effettuati dai ragazzi e le loro annotazioni, ma non li sostituisce.

Si può in seguito investigare l'andamento del valore di un capitale negli anni, nei due regimi di capitalizzazione semplice e composta, con l'**attività** ***Crescita di capitali***. Ricorrere al foglio di calcolo permette di concentrare l'attenzione sulla formalizzazione, sull'uso delle lettere e sui processi più che sui prodotti; tuttavia l'attività si può svolgere anche più avanti, come approfondimento.

L'*esplorazione* della nozione di percentuale prosegue con due **fogli di attività**: il primo è rivolto soprattutto alla *modellizzazione* di situazioni reali e porta gradualmente ad utilizzare le lettere per generalizzare e per ricavare informazioni; il secondo richiede l'analisi di grafici e l'*interpretazione* di testi e dunque sviluppa abilità complementari. Entrambi fanno riferimento a *contesti* legati alla *realtà* e *ricchi*, ossia descritti in dettaglio, per evitare che gli studenti si convincano che i problemi che si affrontano a scuola seguono regole speciali: hanno sempre soluzione, un'unica soluzione e la strategia risolutiva si riconosce semplicemente da alcune parole chiave presenti nel testo. È detto chiaramente in [Freudenthal, 1994, pag. 99, 103]:

> *[…] Il contesto del problema del macellaio non è la vita di costui, ma il libro di testo […] Nel contesto del libro di testo ogni problema ha una sola soluzione: non vi è posto per la realtà […] Si suppone che lo scolaro*

scopra i pseudo-isomorfismi considerati dall'autore del libro, e risolva i problemi, che si presentano come se fossero collegati con la realtà, per mezzo di questi pseudo-isomorfismi.

"Creare, rinforzare, e mantenere i legami con la realtà". Questo è ciò che i contesti ricchi debbono fare, in quanto domini della realtà proposta ai discenti per essere matematizzata.

Non è tutto: come abbiamo osservato nel capitolo 2, quello delle percentuali è un contesto stimolante in cui introdurre le equazioni e curare il passaggio dall'approccio aritmetico a quello algebrico.

Un esempio significativo è lo scorporo dell'IVA. Altri problemi sono proposti nel **foglio di attività 9** e conducono, volutamente, a modelli della forma $ax + b = c$, che si risolvono presto mediante operazioni inverse oppure con le tecniche sviluppate nella scuola secondaria di primo grado.

È già molto. Al termine del lavoro si può assegnare una prova come **verifica 2**: oltre ai primi due esercizi che riguardano gli allineamenti decimali, il testo offre una sintesi delle richieste che secondo noi ha senso rivolgere agli studenti nell'ambito delle percentuali; sono aspetti dei quali i ragazzi dovrebbero disporre a lungo e pertanto va effettuata la loro manutenzione nell'arco dell'intero quinquennio.

Questo segmento del percorso della classe prima si può collocare nel secondo mese dell'anno scolastico e si dovrebbe riuscire a completare in circa 16 *ore* di lezione.

Percentuali – questioni di base

- ## Concetto di percentuale

Per iniziare ricordiamo l'idea che probabilmente hai già visto nella scuola secondaria di primo grado:

8% significa **8 ogni 100.**

E in modo esattamente analogo si può esprimere il significato di ogni percentuale.

Allora quanto vale l'8% di 500?
Osserva che ogni parte da 100 dà un contributo di 8, e $500 = 5 \cdot 100$. Perciò l'8% di 500 è $8 \cdot 5 = 40$.
Quanto vale l'8% di 300? E di 50?
Ragionando in modo analogo, si ottiene rispettivamente $8 \cdot 3 = 24$ e $8 \cdot 0{,}5 = 4$.

- ## Percentuale di un numero

È utile scrivere l'espressione che fornisce la percentuale di un numero, **in termini** del **numero** stesso.
Ad esempio, l'8% di 500 si può esprimere come $8 \cdot \frac{500}{100}$ e dunque come $\frac{8}{100} \cdot 500$.

In generale

Il c% di P è uguale a: $\frac{c}{100} \cdot P$.

Sulla confezione di una barretta energetica da 30 g leggi "Ingredienti: [...] miele 8%". Quanti grammi di miele ci sono nella barretta?

Si tratta di calcolare l'**8% di 30** g.
Per quanto appena osservato, ciò si **traduce** nella scrittura: $\frac{8}{100} \cdot 30$ g; pertanto la barretta contiene 2,4 g di miele.
Nel seguito privilegeremo la scrittura in forma decimale; nel nostro esempio scriveremo $0{,}08 \cdot 30$.

- ## Percentuale di un numero rispetto ad un altro

Nel 2014 in provincia di Trento sono rimaste ferite oppure sono morte in incidenti stradali 1918 persone; tra esse, 64 sono giovani di età compresa tra i 15 e i 17 anni (fonte ISTAT). Qual è la percentuale di giovani di età compresa tra i 15 e i 17 anni tra i feriti o i morti in incidenti stradali nel 2014 in provincia di Trento?

Per rispondere calcoliamo prima il **rapporto** tra i giovani coinvolti e tutte le persone coinvolte: $\frac{64}{1918} = 0{,}03336$ che arrotondiamo a 0,0334. Ora basta esprimere tale numero **in forma di percentuale**: dato che $0{,}0334 = \frac{3{,}34}{100}$, la percentuale richiesta è 3,34%.

In generale

la percentuale di P rispetto a Q è uguale a $\frac{P}{Q}$ espresso in forma di percentuale.

Osservazione
Nel 2014 in provincia di Venezia sono rimaste ferite oppure sono morte in incidenti stradali 3562 persone; tra esse 113 sono giovani di età compresa tra i 15 e i 17 anni.
Pertanto i giovani feriti o morti sono di più rispetto a quelli della provincia di Trento, ma sono di meno **in percentuale**, dato che $\frac{113}{3562}$ corrisponde al 3,17%.

- **Variazione percentuale**

In provincia di Trento, a settembre 2015 il prezzo medio del pane fresco era 2,79 euro al chilo. A settembre 2016 il prezzo medio è diventato 2,84 euro al chilo (fonte Osservatorio prezzi ISTAT). Qual è stata la variazione percentuale di tale prezzo in provincia di Trento nel periodo indicato?

Nella richiesta compaiono due termini: "**variazione**", "**percentuale**"; è invece sottointesa una terza espressione: variazione "**rispetto al prezzo iniziale**".
Per rispondere traduciamo mediante una formula ciascuna delle tre espressioni:
- la **variazione** (assoluta) del prezzo del pane è 2,84 – 2,79 euro
- la variazione **rispetto al prezzo iniziale** è $\frac{2{,}84 - 2{,}79}{2{,}79} = 0{,}01792...$
- pertanto la variazione **percentuale** richiesta, arrotondata alla seconda cifra decimale, è 1,79%.

In generale

la variazione percentuale di una grandezza P è uguale a $\frac{P_f - P_i}{P_i}$ espresso in forma di percentuale, dove P_i è il valore iniziale e P_f il valore finale della grandezza.

- **Percentuali ripetute: un problema di crescita**

Un capitale di 10.000 euro è investito al tasso annuo del 3%. All'inizio di ogni anno gli interessi sono calcolati sulla somma del capitale iniziale e degli interessi maturati fino all'anno precedente[1]*. A quanto ammonta il capitale dopo 10 anni?*

Un approccio mediante addizione

Il capitale aumenta del 3% ogni anno. Pertanto dopo un anno il capitale diventa, in euro

$$10.000 + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{100}} \cdot 10.000 = 10.000 + 300 = 10.300.$$

Ora, dopo due anni dobbiamo tener conto anche degli interessi maturati nel primo anno, cioè 300 euro. Pertanto l'aumento del 3% va ora calcolato su 10.300 euro. Così dopo due anni il capitale diventa, in euro

[1] Tale modo di calcolare gli interessi è spesso chiamato *regime di capitalizzazione composta*.

$$10.300 + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{100}} \cdot 10.300 = 10.300 + 309 = 10.609.$$

E se ripetiamo questo procedimento per ciascuno degli 8 anni successivi, arriviamo a determinare il capitale dopo 10 anni. C'è però un modo più agevole ed espressivo di risolvere il problema. Vediamolo.

<u>Un approccio più efficace: mediante moltiplicazione</u>

In primo luogo **interpretiamo** in un altro modo l'aumento percentuale del 3%

$$10.000 + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{100}} \cdot 10.000 = \left(1 + \frac{3}{100}\right) 10.000 = 1{,}03 \cdot 10.000.$$

Questa formula ci dice una cosa significativa: **aumentare** 10.000 euro del **3%** equivale a **moltiplicare** per **1,03** i 10.000 euro. Di più: tale affermazione vale non solo per i 10.000 euro del nostro investimento ma per una qualsiasi quantità che cresce del 3%. In altre parole

per aumentare un numero del 3% basta moltiplicarlo per 1,03.

A questo punto non ci resta che applicare più volte il risultato appena trovato alla crescita che stiamo considerando. Il capitale **aumenta** ogni anno del **3%** rispetto al valore che aveva l'**anno precedente**; pertanto, in euro

- dopo 1 anno vale $1{,}03 \cdot 10.000$
- dopo 2 anni vale $1{,}03 \cdot$ capitale all'anno 1, ossia $1{,}03 \cdot (1{,}03 \cdot 10.000) = 1{,}03^2 \cdot 10.000$
- dopo 3 anni vale $1{,}03 \cdot$ capitale all'anno 2, ossia $1{,}03 \cdot (1{,}03^2 \cdot 10.000) = 1{,}03^3 \cdot 10.000$
- …
- dopo 10 anni è $(1{,}03)^{10} \cdot 10.000$

- **Percentuali ripetute: un problema di decrescita**

Nel corso di ogni anno la quantità di individui di una popolazione decresce del 5% rispetto al valore che ha all'inizio dell'anno. Se all'inizio di un certo anno la popolazione è costituita da 70.000 individui, quanti individui ci sono dopo che sono trascorsi 4 anni?

Ragioniamo in modo analogo a quanto discusso relativamente alla crescita del capitale e, per iniziare, approfondiamo cosa significa decrescere del 5%

$$70.000 - \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{100}} \cdot 70.000 = \frac{\mathbf{95}}{\mathbf{100}} \cdot 70.000.$$

Leggiamo a fondo tale uguaglianza: essa ci dice che **diminuire** 70.000 del **5%** equivale a **moltiplicare** 70.000 per **0,95.** Inoltre la sostanza del ragionamento non cambia se al posto di 70.00 consideriamo una qualsiasi altra quantità. Così

per diminuire un numero del 5% basta moltiplicarlo per 0,95.

Ma allora, applicando più volte tale risultato come visto nel problema di crescita, concludiamo che dopo 4 anni la quantità di individui della popolazione è

$$0{,}95^4 \cdot 70.000.$$

Crescite di capitali – con il foglio elettronico

1) Investi un capitale di 10.000 euro al tasso annuale composto del 3%.
   Qual è il valore del capitale dopo 1, 2, 3, ..., 20 anni?
   Per rispondere realizza una tabella: su una colonna riporta gli anni e sull'altra il valore del capitale ad ogni anno.

   Se il valore del capitale ad un dato anno è c, qual è il suo valore l'anno successivo?
   Esprimi tale valore mediante una sola operazione.
   Utilizza tale risultato per calcolare i valori del capitale nei vari anni.

2) Rispondi alle stesse domande nel caso di capitalizzazione semplice.
   Ottieni gli stessi valori del caso precedente? Spiega intuitivamente il motivo.

<u>Osservazione</u>
Regime di **capitalizzazione composta** significa che ogni anno gli interessi vengono calcolati non sul solo capitale iniziale ma sulla somma del capitale iniziale e degli interessi maturati fino all'anno precedente. Ad esempio, per un capitale iniziale di 10.000 euro gli interessi al termine del primo anno sono 300 euro (ossia il 3% dei 10.000 euro iniziali). Pertanto al termine del secondo anno gli interessi vanno calcolati su 10.000 + 300 = 10.300 euro e dunque sono il 3% di 10.300 euro.
Invece nel **regime di capitalizzazione semplice** gli interessi sono calcolati solo sul capitale iniziale, senza tener conto degli altri interessi maturati fino a quel momento.

Per svolgere l'attività puoi far riferimento alle ***indicazioni*** *relative al foglio elettronico Excel che si trovano di seguito.*
Il testo dell'attività e il suo svolgimento completo sono riportati nel file ***Capitalizzazione.xlsx****.*

Tasso annuo	0,03
Capitale iniziale	10.000

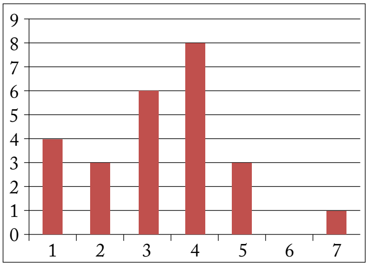
Anno	Capitale (composto)	Capitale (semplice)
0	10.000	10.000
1	10300	10.300
2	10609	10.600
3	10927,27	10.900
4	11255,088	11.200
5	11592,741	11.500
6	11940,523	11.800
7	12298,739	12.100
8	12667,701	12.400
9	13047,732	12.700
10	13439,164	13.000
11	13842,339	13.300
12	14257,609	13.600
13	14685,337	13.900
14	15125,897	14.200
15	15579,674	14.500
16	16047,064	14.800
17	16528,476	15.100
18	17024,331	15.400
19	17535,061	15.700
20	18061,112	16.000

Percentuali – interpretazione di grafici e modellizzazione

Negli esercizi 3, 4 arrotonda le percentuali alla seconda cifra decimale.

1. In un'intervista è stato chiesto a 25 adulti di indicare il numero di componenti del proprio nucleo familiare. I dati raccolti sono rappresentati nell'istogramma in figura. Qual è la percentuale di famiglie composte da almeno quattro persone?

A. 64% B. 52% C. 48% D. 32%



Componenti nucleo familiare

2. Agli studenti di un corso di laurea triennale è stato chiesto di indicare quante lingue straniere sono in grado di comprendere. I risultati dell'indagine sono riportati nella tabella seguente.

	Nessuna	Una	Due o più
Primo anno	45	51	10
Secondo anno	41	47	6
Terzo anno	31	58	11

Quale percentuale degli studenti del primo e secondo anno comprende almeno una lingua straniera?

3. I buoni fruttiferi postali 4x4 emessi l'1/8/2021 prevedono, per capitali impiegati per 16 anni, il tasso di interesse annuale dello 0,75%. Sul foglio informativo leggi:
Gli interessi sono calcolati su base annua in regime di capitalizzazione composta […]

a) Qual è il valore di un capitale di 1.000 euro dopo 16 anni?

b) Qual è l'aumento percentuale di un capitale di 1.000 euro nei 16 anni?

c) Ora generalizza: indica con C il capitale iniziale ed esprimi la variazione percentuale di tale capitale in 16 anni. Mostra che essa non dipende da C

d) Inoltre sul foglio informativo leggi
Gli interessi […] maturati sui buoni sono soggetti al regime dell'imposta sostitutiva delle imposte sui redditi nella misura del 12,50%.
Perciò qual è il guadagno percentuale netto (cioè tenendo conto della tassa) nei 16 anni?

e) Invece per altre offerte di Poste italiane, ad esempio SUPERSMART, leggi
Gli interessi su ogni singolo accantonamento sono calcolati in regime di capitalizzazione semplice.
Cambierebbero le risposte ai punti a), b), c) se l'interesse dello 0,75% fosse in regime di capitalizzazione semplice?

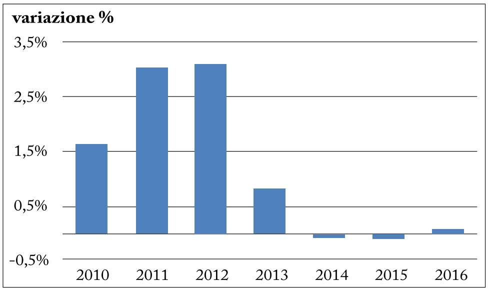
4. Ad una donna viene somministrata una dose di antibiotico in vena; assumiamo che ogni ora la quantità di antibiotico nel plasma si riduca del 40% rispetto alla quantità presente l'ora precedente.

a) La dose è da 250 mg. Quanti milligrammi di farmaco rimangono nel plasma dopo 6 ore? Quale percentuale rappresenta rispetto alla dose iniziale?
b) Tale percentuale dipende dalla quantità di farmaco somministrata? Giustifica la tua affermazione: indica con G_i la quantità di farmaco somministrata e con G_f la quantità di farmaco che resta nel plasma dopo 6 ore.
c) Supponi che, dopo 6 ore dalla prima somministrazione, ne venga fatta un'altra che fa crescere del 240% la quantità di antibiotico nel plasma. È vero che, per effetto di tale aumento, la quantità di antibiotico nel plasma sarebbe di nuovo G_i?

Risultati
1) 48% **2)** 57% **3) a)** 1.126,99 € **b)** 12,70% **d)** 11,11% **e)** l'aumento percentuale sarebbe del 12%
4) a) circa 12 mg; 4,80%

Percentuali – interpretazione di grafici e testi

1. In figura è rappresentata la variazione percentuale dei prezzi al consumo in Italia rispetto all'anno precedente (Indice ISTAT "costo della vita").



Quale delle seguenti affermazioni puoi dedurre dal grafico?

- Nel 2013 il costo della vita era minore rispetto al 2012
- Nel 2015 il costo della vita era uguale al 2014
- Nel 2016 il costo della vita è aumentato rispetto al 2015.

In quale anno tra quelli indicati in tabella il costo della vita è stato il più alto? E il più basso?

2. a) Dal settimanale l'Espresso del 4/12/2003.
Il PIL dichiarato è 6.431.000.000 dollari […]; dal giorno dell'indipendenza la ricchezza del Paese è diminuita del 187%.
Può essere corretta la variazione percentuale indicata? Spiega

b) Da Il Fatto Quotidiano del 1/12/2021.
Il 4% delle classi sono in Dad: il 2,6% del primo ciclo e l'1,4% del secondo.
Possono essere corrette tutte e tre le percentuali indicate? Giustifica.

3. Da un comunicato stampa del Censis (dicembre 2003).
[…] nel corso del 2003, il 18,9% dei giovani ha avuto almeno un incidente con il motorino; il 70,7% degli incidenti in motorino [dei giovani] ha provocato lesioni, di cui il 6,7% lesioni gravi ed invalidanti.
[…] I fattori alla base dell'elevata vulnerabilità dei giovani sulla strada sono: […] le distorsioni nella percezione del rischio. Il 10,7% non valuta correttamente le condizioni esterne avverse (oscurità, ecc.); il 50,1% non valuta correttamente le condizioni soggettive avverse (alterazioni dello stato psico-fisico), di cui il 16,4% guida anche in stato di ebbrezza.

a) Quale percentuale degli incidenti in motorino dei giovani ha provocato lesioni gravi ed invalidanti?
b) Sono di più quelli che non valutano le condizioni esterne o quelli che guidano anche in stato di ebbrezza?

4. In tabella è riportato il *tasso di inflazione* in Italia relativo ad alcuni anni. Precisamente su ogni riga è indicato il tasso di inflazione rispetto all'anno precedente[1].

È vero che il tasso di inflazione complessivo tra il 2008 e il 2013 è del 12,6%?

2008	3,3%
2009	0,8%
2010	1,5%
2011	2,8%
2012	3,0%
2013	1,2%

Risultati
3) a) 4,74% **b)** i primi (sono il 10,7%; gli altri sono l'8,2%) **4)** no, è del 13,25%.

[1] Dire che il tasso di inflazione in un anno è, ad esempio, del 5% significa che il costo medio di un bene o di un servizio è aumentato del 5% nel corso dell'anno.

Percentuali – modellizzare con equazioni

1. Una giacca è esposta in vetrina al prezzo di 148 €. Il prezzo è dato dal ricavo del venditore più una tassa del 22% sul ricavo (IVA). Quanto vale la tassa?

2. Nel 2018 in Italia l'inflazione è stata dell'1,1%. Se un bene all'inizio del 2019 costava 60 €, quanto sarebbe costato, in media, un anno prima?

3. Il progetto di un giardino deve essere modificato per adeguarlo al nuovo regolamento comunale. La superficie del giardino verrà prima ridotta del 24%. Poi verrà ulteriormente ridotta di 2,0 m^2 per far posto ad una griglia per lo scarico dell'acqua piovana, e in questo modo la sua estensione diventerà di 70,2 m^2.
- Qual era la sua estensione secondo il progetto iniziale?
- Cambia la risposta se prima avviene la diminuzione di 2,0 m^2 e poi la riduzione del 24%?

4. In una data soluzione costituita da acqua e glucosio, il glucosio ha una concentrazione dello 0,9% (ossia la quantità di glucosio è lo 0,9% della quantità di soluzione). Se si aggiungono 1,9 g di glucosio si ottiene una soluzione che contiene 10,0 g di glucosio.
Qual è la quantità di soluzione iniziale? Qual è la quantità di acqua presente nella soluzione?

5. In Italia i redditi sono soggetti ad una tassa annuale (IRPEF). L'art. 11, comma 1, del TUIR (Testo Unico delle Imposte sui Redditi) stabilisce che sui redditi percepiti nel 2022 la tassa si calcoli come sintetizzato nella seguente tabella.

REDDITO [imponibile] (per scaglioni)	**ALIQUOTA** (per scaglioni)	**IMPOSTA SUI REDDITI**
fino a euro 15.000	23	23% sull'intero importo
oltre euro 15.000 e fino a euro 28.000	25	3.450 + 25% parte eccedente 15.000
oltre euro 28.000 e fino a euro 50.000	35	6.700 + 35% parte eccedente 28.000
oltre euro 50.000	43	14.400 + 43% parte eccedente 50.000

a) Calcola la tassa da versare per un reddito annuo di 14.000 € e per uno di 20.000 €
b) Qual è il significato del valore 3.450 che compare nella seconda riga?
c) Supponiamo che Mario debba pagare una tassa di T = 4.000 €. Indica con P la parte di reddito che supera i 15.000 €:
- scrivi un'equazione che descriva il legame tra P e T
- quale reddito percepirà Mario nel 2022?

6. In un documento Word ho ridotto la lunghezza di un segmento del 40%. Di quanto devo aumentare in percentuale la lunghezza del segmento per ritornare alle dimensioni iniziali? Le informazioni fornite permettono di determinare la lunghezza iniziale del segmento?

Risultati
1) 26,69 € **2)** 59,35 € **3)** 95,0 m^2 **4)** 900,0 g; 891,9 g **5) a)** 3220 €; 4700 € **c)** 17.200 € **6)** del 66,67%

3.4 I materiali per iniziare la classe seconda: la retta nel piano cartesiano

Cominciare l'anno scolastico con il tradizionale "ripasso" non ci convince. Infatti, da una parte è molto più stimolante discutere un argomento *nuovo*, dall'altra la manutenzione delle conoscenze e delle abilità non va imposta dall'*esterno*: deve partire da *bisogni* concreti degli studenti e non può avvenire se i ragazzi non si assumono la *responsabilità* dell'apprendimento. È meglio organizzare brevi momenti di revisione, quando ne emerge la necessità, e tenere conto dei diversi aspetti legati alle difficoltà in matematica indicati nell'Introduzione, come la gestione delle risorse cognitive.

Un argomento nuovo, che ci sembra adatto per iniziare la classe seconda, è la retta nel piano cartesiano. Le ragioni sono presto dette. È ricco poiché permette di lavorare con l'algebra e la geometria, evidenziando eventuali difficoltà su aspetti fondamentali. Inoltre consente di familiarizzare con un tipo notevole di funzioni, le funzioni lineari; così gli studenti possono disporre di un esempio a cui far riferimento quando, a breve, affronteranno le funzioni.

Come descritto nella prima parte della sezione 2.2.3, la nostra idea è fondare l'esame del tema sulla nozione di *pendenza*. In altre parole, dalla pendenza intendiamo ricavare *ogni* aspetto che riguarda la retta: l'equazione, le condizioni di perpendicolarità…

Non è questo l'approccio seguito dai libri di testo, che spesso suddividono le questioni sulla retta in compartimenti stagni e forniscono una formula diversa per ciascuna di esse. Così *addestrano* lo studente a rispondere a domande specifiche e magari lo preparano a svolgere la verifica sommativa, ma non lo aiutano a comprendere davvero quanto studia e nemmeno a disporne a lungo.

Il primo passo è dunque precisare cosa si intende per pendenza di una retta e il riferimento è la dispensa *Pendenza della retta*. Lo si può fare mediante una *reinvenzione guidata*, ossia attraverso le proposte dei ragazzi che la (ri)scoprono sulla base delle sollecitazioni del docente ([Freudenthal, 1994, pag. 72]). Tuttavia saper calcolare la pendenza non basta, bisogna saperla utilizzare consapevolmente in varie situazioni, come quelle che proponiamo nel primo foglio sul tema.

Invece di passare subito a ricavare l'equazione della retta, pensiamo sia meglio che gli studenti prendano confidenza con il concetto più generale di equazione di una curva. Lo possono fare grazie al foglio di attività 2, che dovrebbe permettere loro di comprendere più a fondo la costruzione descritta nella dispensa *Equazione della retta*; anche qui interviene la *regola di spostamento,* che declina operativamente il significato di pendenza della retta.

La dispensa successiva mostra come risolvere alcune questioni di base, mentre l'attività con GeoGebra consente di esplorare il significato geometrico dei coefficienti che intervengono nell'equazione.

Naturalmente è opportuno dedicare del tempo al consolidamento, e questo si può fare scegliendo alcuni esercizi dal libro di testo. Invece per il riepilogo si può far riferimento al **foglio di attività 3**, che richiede anche di dimostrare un teorema e apre al punto di vista delle funzioni.

Come si vede, non sono pochi gli aspetti discussi in questo percorso e per svolgerlo si dovrebbero prevedere circa *20-22 ore* di lavoro in classe. Una sintesi è la prova **verifica 1**, mostrata nel paragrafo 3.1.

Infine facciamo nostro il pensiero espresso in [Grugnetti e Villani, 1999, pag. 14]:

> *La matematica che si insegna non è la matematica della ricerca […]. È la matematica elementare […]. Queste teorie ben costruite vengono imposte nella loro forma già compiuta agli allievi.*
> *[…] l'insegnamento della matematica assume spesso un'altra forma, che consiste nell'inculcare procedimenti di calcolo che obbediscono a regole in apparenza arbitrarie. Gli allievi imparano a combinare simboli, da un lato senza vedere il legame con le grandi teorie […], dall'altro senza utilizzarli nella risoluzione dei problemi […]. Se la disciplina chiamata "matematica" fosse questa allora ci sarebbero buoni motivi per prenderne le distanze.*
> *Fortunatamente, esiste un terzo modo di insegnare, nel quale professori e allievi lavorano insieme alla matematica, nel quale ognuno si pone domande e impara a pensare. In quest'ottica, le grandi teorie non vengono abbandonate: esse vengono ricostruite per rispondere a certe domande.*

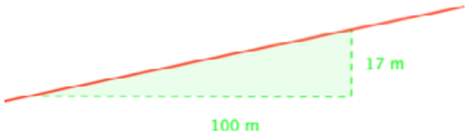
Proprio per lavorare con gli studenti alla matematica, per porsi domande (anche come docenti) e imparare a pensare… sono ideati questi materiali.

Pendenza della retta

• La pendenza della strada

Cosa significa che un tratto di strada sale con **pendenza** del 17%?

Informalmente vuol dire che **per ogni spostamento di 100 m in "orizzontale" la strada sale in "verticale" di 17 m.**
Stiamo schematizzando la strada come una retta e, per ora, facciamo riferimento all'idea intuitiva di orizzontale e verticale.

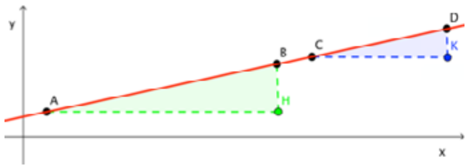


Inoltre, visto che la percentuale del 17% si può interpretare come $\frac{17}{100}$, possiamo dire che la pendenza costituisce il **rapporto** tra il dislivello e la distanza orizzontale considerati.

• Dalla pendenza della strada alla pendenza della retta

Lo schema adottato per precisare cosa si intende per pendenza della strada è proprio quello che seguiremo per definire la pendenza della retta. Arriveremo alla definizione in due passi: prima utilizzeremo opportuni triangoli e poi introdurremo le coordinate.

Pertanto, fissiamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e, scelti due punti A e B sulla retta in figura, consideriamo il triangolo rettangolo AHB che ha i cateti paralleli agli assi.



Allora, analogamente alla pendenza della strada, la pendenza della retta è data da

$$m = \frac{\boldsymbol{BH}}{\boldsymbol{AH}}.$$

<u>Osservazioni</u>

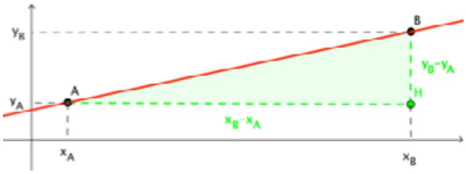
- E se per calcolare la pendenza consideriamo un'altra coppia di punti C, D della retta? In questo caso interviene il rapporto $\frac{DK}{CK}$, ma esso è ancora uguale a m, dato che i due triangoli rettangoli ABH e CKD sono simili[1]. Pertanto possiamo parlare di pendenza *di una retta*.
- Se la lunghezza di AH è zero, il rapporto m non è definito. Perciò per le rette parallele all'asse y non è definita la pendenza.

[1] Per il momento facciamo riferimento all'idea intuitiva di similitudine, che probabilmente avrai visto nella scuola secondaria di primo grado.

- ## La definizione di pendenza della retta

È utile esprimere la pendenza di una retta in termini delle coordinate di due suoi punti A e B.

Per farlo esaminiamo la figura a lato. Otteniamo le uguaglianze, $AH = x_B - x_A$, $BH = y_B - y_A$ e disponiamo così di tutti gli elementi che servono per costruire la definizione di pendenza.



<u>Definizione</u>

Data una retta non parallela all'asse y, siano $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ due sui punti. Si definisce **pendenza** (o coefficiente angolare) della retta, il numero m dato da

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

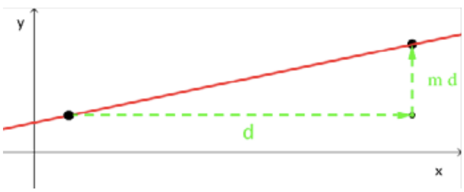
<u>Osservazioni</u>

- La pendenza di una retta nel piano cartesiano non è sempre positiva. Ad esempio, la retta che passa per i punti $A(0,1)$ e $B(1,0)$ ha pendenza negativa, come puoi verificare immediatamente applicando la definizione. Più in generale hanno pendenza negativa tutte (e sole) le rette che formano un angolo[2] ottuso con il semiasse positivo delle x.
- La pendenza di ogni retta parallela all'asse x è uguale a zero: infatti due suoi punti qualsiasi hanno ordinata uguale; pertanto il numeratore nella formula che definisce la pendenza è zero.

- ## Una regola di spostamento sulla retta

Infine discutiamo un'importante applicazione della definizione di pendenza, o meglio ancora, del significato di pendenza illustrato nel caso della strada: si tratta di un modo per ottenere un punto della retta a partire da un altro suo punto.

Precisamente, data una retta di pendenza m, a partire da un suo punto si considera un qualsiasi **spostamento "orizzontale"** (ossia parallelo all'asse x) **di ampiezza *d* e poi uno spostamento "verticale" di ampiezza *md*** (ossia parallelo all'asse y). Resta così individuato un punto della retta.



[2] Precisamente chiamiamo *angolo tra una retta e il semiasse positivo delle ascisse* l'angolo (convesso) che ha come vertice il punto di intersezione O della retta con l'asse x e come lati la semiretta di origine O e costituita dai punti dell'asse x che hanno ascissa maggiore o uguale a quella di O e la semiretta costituita dai punti della retta che hanno ordinata positiva.

Pendenza della retta

1. Il Decreto Ministeriale n. 236 del 14 giugno 1989 afferma che negli spazi esterni degli edifici *la pendenza* [del percorso per i disabili] *non deve superare di norma il 5%.* Pertanto se si vuole superare un dislivello di 50 cm, quale deve essere di norma la lunghezza minima del percorso? E se il dislivello è *a*?

2. La salita del Menador, che parte da Caldonazzo (TN) a quota 485 m, ha una pendenza media di circa l'8% e una lunghezza di 9,50 km. Determina a quale altitudine si trova l'arrivo.
Suggerimento. Schematizza la salita mediante un triangolo rettangolo la cui ipotenusa ha lunghezza 9,5 km. Se indichi con x la misura del cateto orizzontale allora, per definizione di pendenza, quella del cateto verticale è… Poi utilizza il teorema di Pitagora.

Se invece la pendenza media fosse del 12% (ossia quella del tratto finale) quanti kilometri di strada servirebbero per compiere lo stesso dislivello complessivo?

3. Determina la pendenza delle seguenti rette *(ogni quadretto corrisponde ad una unità)*:

4. Determina la pendenza delle rette passanti per le seguenti coppie di punti:

$A(1,-2), B(3,-5)$ $\qquad$ $A(\frac{2}{3},-3), B(3,-\frac{1}{3})$ $\qquad$ $A(\frac{1}{3},\frac{3}{2}), B(2,-\frac{5}{6})$

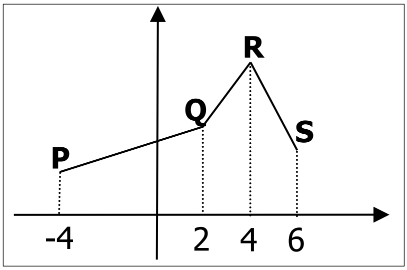
5. Traccia le rette passanti per il punto P(2; –3) che hanno pendenza: $\frac{3}{4}; -\frac{2}{5}; \frac{11}{3}; -2; 0.$

6. Considera il segmento di estremi P(82,93) e Q(77,–85):
- determina la pendenza di alcune rette che passano per O(0,0) e intersecano il segmento PQ
- in generale, quali valori può assumere la pendenza delle rette per O che intersecano PQ?

7. Secondo vari manuali di scialpinismo, quando l'inclinazione del pendio supera i 27° c'è pericolo di valanghe (ma ci possono essere valanghe anche a pendenze inferiori).
- Disegna una retta inclinata di 27° rispetto all'orizzontale, utilizzando un goniometro, e determina approssimativamente la sua pendenza
- Perciò come puoi utilizzare i bastoncini da sci per stimare se l'inclinazione è maggiore di 27°? Spiega.

8. I segmenti PQ, QR, RS in figura hanno pendenza rispettivamente $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{3}$, -2.

Determina la pendenza del segmento PS.



9. È vero che se si raddoppia l'angolo che una retta forma con il semiasse positivo delle ascisse, allora raddoppia anche la sua pendenza? Giustifica.

10. Un tratto di strada PQ ha pendenza del 10%, mentre un tratto QR ha pendenza del 20%. È vero che il segmento PR ha certamente pendenza del 15%?

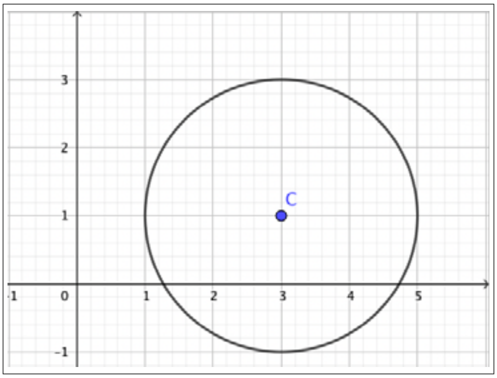
Risultati

1) $\sqrt{401}$ a **2)** circa 1243 m, circa 6,36 km **4)** $-\frac{3}{2}, \frac{8}{7}, -\frac{7}{5}$ **8)** $\frac{7}{30}$

Equazione di una curva nel piano

1. La circonferenza in figura ha centro C(3, 1) e raggio di lunghezza 2.

- Verifica che il punto $Q(\frac{9}{2}, \frac{7}{3})$ non appartiene alla circonferenza (calcola la distanza di Q dal centro...)
- Considera ora un punto $P(x, y)$ della circonferenza; sappiamo che la distanza di P dal centro è 2: esprimi questa condizione con un'equazione nelle due incognite x e y.
- Mostra che una soluzione dell'equazione appena trovata è la coppia $(3 - \sqrt{3}, 2)$: questo significa che il punto di coordinate $(3 - \sqrt{3}, 2)$ è sulla circonferenza.



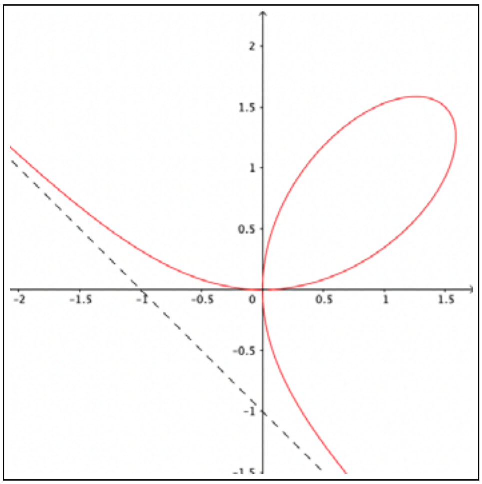
2. Nel piano cartesiano disegna l'asse del segmento di estremi $A(-2, 2)$ e $B(4, 0)$.

- Verifica che il punto $R(2, 4)$ appartiene all'asse (R è equidistante dagli estremi del segmento...)
- Considera ora un punto $P(x, y)$ dell'asse di AB; poiché P ha la stessa distanza da A e B, vale anche $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$: da questa condizione deduci un'equazione nelle incognite x e y
- Le coordinate dei punti dell'asse di AB sono soluzioni dell'equazione appena trovata: trova le coordinate di alcuni di questi punti
- Quale punto dell'asse ha ascissa 100? Quale punto dell'asse ha le coordinate una opposta dell'altra?

3. In figura è rappresentata la curva Φ detta *Folium di Cartesio*, che ha equazione

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

- Il punto $(1, \frac{1}{3})$ non appartiene a Φ, mentre il punto $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ vi appartiene; il disegno non permette di verificare queste affermazioni, dimostrale algebricamente
- Mediante il software GeoGebra rappresenta graficamente Φ e $P(1, 0.3473)$. Poi verifica se il punto P appartiene a Φ
- Mostra che Φ ha un solo punto sull'asse delle x.



4. Trova alcuni punti le cui coordinate verificano l'equazione

$$x^2 - y^2 = 0.$$

Rappresenta tali punti nel piano cartesiano; quale potrebbe essere la figura geometrica costituita da tutti i punti che sono soluzione dell'equazione?

Risultati

1b) $\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = 2$ ovvero $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$ **2b)** $3x - y - 2 = 0$ **d)** $(100, 298)$; $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Equazione della retta – costruzione

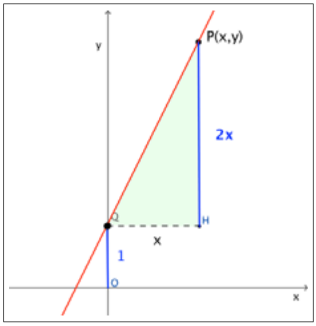
È data una retta in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Se $P(x,y)$ è un qualsiasi punto della retta, quale **condizione** verificano le sue coordinate x e y? Più precisamente, la questione si può formulare nel modo che segue.

Ricavare un'**equazione** nelle variabili x, y che sia soddisfatta da tutte e sole le coordinate $\boldsymbol{(x,y)}$ dei **punti** appartenenti alla retta.

Un modo espressivo per costruire l'equazione è utilizzare il **significato** di **pendenza** della retta e seguire un approccio grafico[1]. Prima discuteremo tale procedimento su due esempi e poi lo estenderemo al caso generale.

- **Retta che passa per $Q(0, 1)$ e ha pendenza $m = 2$**

  Sia $P(x,y)$ il generico punto della retta. L'idea è di **esprimere** $\boldsymbol{y}$ in funzione di $\boldsymbol{x}$.
  Per sfruttare il significato di pendenza, come illustrato in figura, consideriamo il triangolo rettangolo QHP che ha i cateti paralleli agli assi. Osserviamo che y si può esprimere come somma di due contributi



$$y = \overline{HP} + \overline{OQ}.$$

Ora, per il significato di pendenza della retta[2], $\overline{HP} = 2x$; mentre, per costruzione, $\overline{OQ} = 1$.
Perciò in definitiva

$$y = 2x + 1.$$

E questa è l'equazione cercata.

<u>Osservazioni</u>

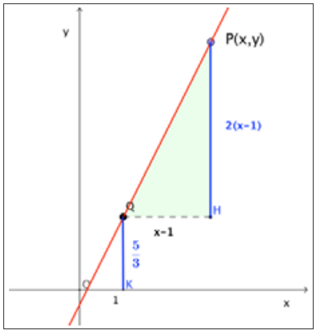
- L'uguaglianza $y = \overline{HP} + \overline{OQ}$ non è sempre vera; ad esempio, se entrambe le coordinate di P sono negative. In ogni caso, si può dimostrare che l'uguaglianza a cui siamo giunti, $y = 2x + 1$, è vera comunque sia disposto il punto P sulla retta.
- Abbiamo provato che se $P(x, y)$ appartiene alla retta allora (x, y) è soluzione dell'equazione $y = 2x + 1$. Si può dimostrare che vale anche l'implicazione inversa, ossia:

[1] In realtà l'equazione si può ricavare utilizzando semplicemente la definizione di pendenza della retta. Ad esempio, osservato che la retta passante per $P(x,y)$ e $Q(0,1)$ ha pendenza $\frac{y-1}{x-0}$, basta esplicitare y in funzione di x per ottenere $y = 2x + 1$. Tuttavia tale approccio, di tipo essenzialmente algebrico, ci sembra meno espressivo rispetto a quello che descriviamo in queste note.

[2] Ne abbiamo discusso nella dispensa *Pendenza della retta* e l'abbiamo indicata come *regola di spostamento sulla retta*.

ogni soluzione (x, y) dell'equazione $y = 2x + 1$ rappresenta le coordinate di un punto della retta.

- **Retta che passa per $Q(1, \frac{5}{3})$ e ha pendenza $m = 2$**



Analogamente all'esempio precedente, esprimiamo y come somma di due contributi

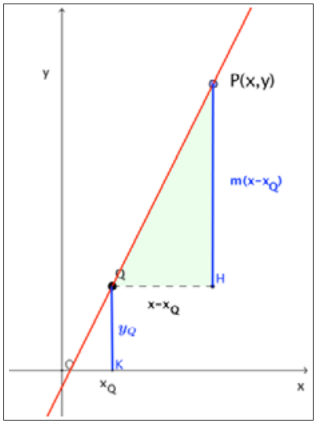
$$y = \overline{HP} + \overline{KQ}.$$

Ora però per determinare la lunghezza di HP si deve prestare attenzione al fatto che lo spostamento orizzontale QH non vale x, ma $x - 1$. Pertanto

$$y = 2(x - 1) + \frac{5}{3}$$

e così l'equazione della retta è $y = 2x - \frac{1}{3}$.

- **Retta che passa per $Q(x_Q, y_Q)$ e ha pendenza m**



Ora si tratta semplicemente di generalizzare il procedimento discusso nell'esempio precedente.
Si conclude così che l'equazione della retta è

$$y = y_Q + m(x - x_Q).$$

E, svolgendo la moltiplicazione, la si può scrivere nella forma

$$y = mx + q$$

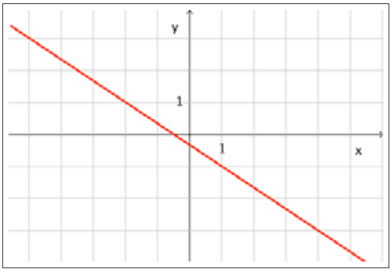
dove q è una costante opportuna.

<u>Osservazione</u>
Se per la retta non è definita la pendenza, non si può seguire il procedimento descritto. Ciò avviene solo quando la retta è parallela all'asse y, pertanto l'ordinata di ogni suo punto può assumere qualsiasi valore reale mentre l'ascissa è uguale a quella di ogni altro punto della retta. Perciò la retta ha equazione della forma $x = k$, dove k è l'ascissa di ciascuno dei suoi punti.

Equazione della retta – questioni di base

• Equazione della retta dal disegno

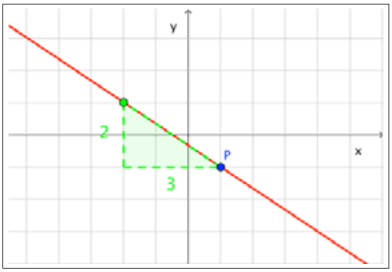
Determina l'equazione della retta rappresentata in figura.



Come abbiamo discusso nella dispensa "Dalla pendenza all'equazione della retta", per determinare l'equazione della retta è sufficiente conoscere la sua ***pendenza*** *m e le coordinate (x_P, y_P) di un suo* ***punto*** *P.*

Precisamente l'equazione è

$$y = y_P + m(x - x_P).$$



Pertanto cominciamo col determinare la pendenza. Per farlo, consideriamo il triangolo rettangolo evidenziato in figura[1] *e, direttamente* **dalla quadrettatura**, *leggiamo il valore di m: $m = -\frac{2}{3}$. Il segno negativo deriva dal fatto che la retta è "decrescente"*[2].

Ora basta determinare le coordinate di un punto della retta: dal disegno individuiamo, ad esempio, il punto $P(1, -1)$.

Così, per quanto prima osservato, l'equazione della retta è

$$y = -1 - \frac{2}{3}(x - 1) = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}.$$

<u>Osservazione</u>

Per ricavare l'equazione della retta abbiamo imposto il passaggio per il punto $P(1, -1)$; ma se avessimo considerato un altro punto della retta, avremmo ottenuto un'equazione diversa? Per rispondere prova ad imporre il passaggio, ad esempio, per il punto $(4, -3)$.

1 Avremmo ottenuto lo stesso valore della pendenza considerando un qualsiasi altro triangolo rettangolo che ha due vertici sulla retta e i cateti, come abbiamo discusso nella dispensa "*Pendenza della retta*".

2 Ossia la retta forma un angolo di ampiezza compresa tra 90° e 180° con il semiasse positivo delle x.

- ## Equazione della retta date due condizioni

Determina l'equazione della retta che passa per i punti $A(-5, 7)$ e $B(2, -3)$.

Come abbiamo osservato a proposito dell'esercizio precedente, per determinare l'equazione della retta basta conoscere la sua ***pendenza*** *m e le coordinate di un suo* ***punto****.*

Se decidiamo di considerare il suo punto A[3]*, l'equazione della retta AB assume la forma*

$$y = y_A + m(x - x_A).$$

Pertanto resta solamente da determinarne la pendenza. Dato che conosciamo le coordinate di due suoi punti, basta applicare la definizione di pendenza per ottenere

$$m = \frac{-3-7}{2-(-5)} = -\frac{10}{7}.$$

Concludiamo così che l'equazione richiesta è

$$y = 7 - \frac{10}{7}(x+5)$$

ossia

$$y = -\frac{10}{7}x - \frac{1}{7}.$$

Determina l'equazione della retta che passa per il punto $P(2, -1)$ ed è parallela alla retta di equazione $2x + 3y - 3 = 0$.

Per cominciare conviene esplicitare la variabile y nell'equazione $2x + 3y - 3 = 0$: si ottiene $y = -\frac{2}{3}x + 1$.

Perciò tale retta ha pendenza $m = -\frac{2}{3}$; e questa è anche la pendenza della retta richiesta, dato che le due rette sono parallele.

Disponiamo così degli elementi che servono per scrivere l'equazione. Essa è

$$y = y_P + m(x - x_P)$$

ossia

$$y = -1 - \frac{2}{3}(x-2) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}.$$

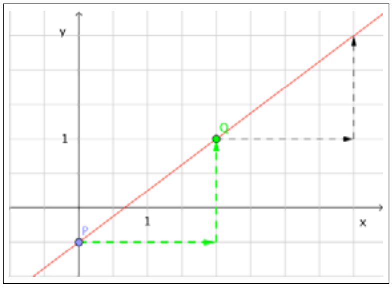
[3] Avremmo potuto considerare invece il punto B. In tal caso, come osservato a proposito dell'esercizio precedente, avremmo comunque ottenuto la stessa equazione per la retta.

- **Disegnare una retta data l'equazione**

Disegna la retta di equazione $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.

*Osserviamo innanzitutto che per tracciare una retta è sufficiente (e necessario) individuare **due** suoi punti.*

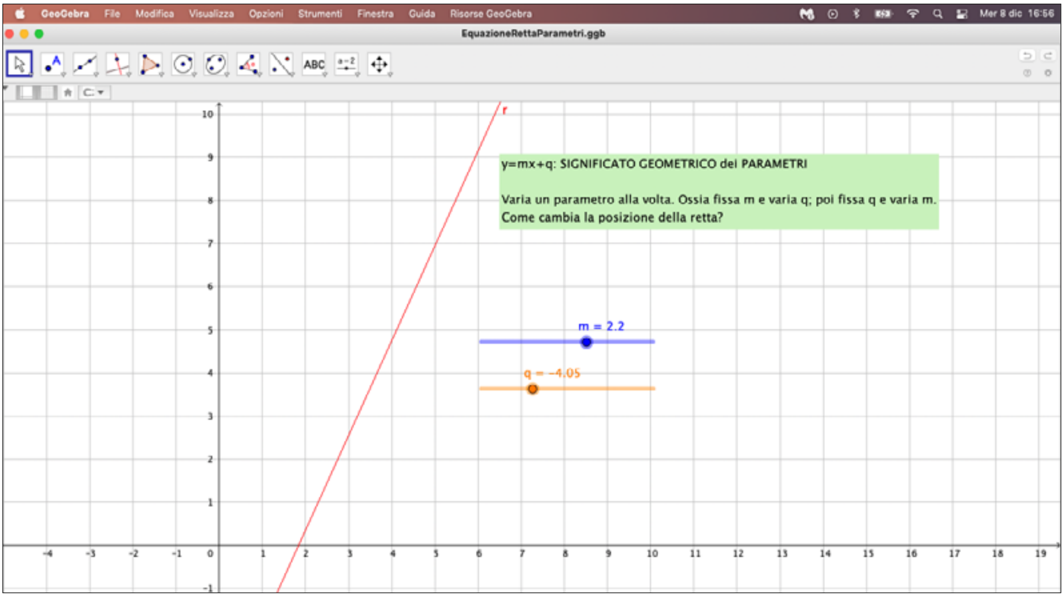
Per semplicità consideriamo il punto in cui la retta interseca l'asse y: $P(0, -\frac{1}{2})$.



*A **partire da P**, possiamo individuare un nuovo punto Q della retta ricorrendo, ancora una volta, al **significato di pendenza**. Precisamente, visto che la retta ha pendenza* $\frac{3}{4}$, *per ogni spostamento "orizzontale" di 4 quadretti (oppure di 8…) nel verso dell'asse x, ci si sposta in "verticale" di 3 (oppure di 6...) nel verso dell'asse y.*

Osservazione

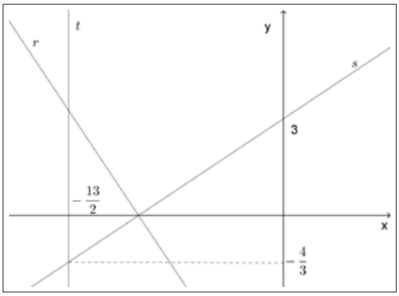
Se invece la pendenza fosse negativa, uno (e uno solo) dei due spostamenti avverrebbe nel verso negativo dell'asse.


GeoGebra File Modifica Visualizza Opzioni Strumenti Finestra Guida Risorse GeoGebra
Mer 8 dic 16:56
EquazioneRettaParametri.ggb
y=mx+q: SIGNIFICATO GEOMETRICO dei PARAMETRI
Varia un parametro alla volta. Ossia fissa m e varia q; poi fissa q e varia m.
Come cambia la posizione della retta?
m = 2.2
q = -4.05
r

Equazione della retta

1. Disegna le tre rette che hanno equazione $y = 3x + 8$, $y = \frac{2}{3}x$, $y = 2$.
I punti di intersezione delle rette sono i vertici di un triangolo. Calcolane l'area.

2. Le rette r ed s in figura sono perpendicolari e si incontrano in un punto dell'asse x.
Inoltre t è parallela all'asse y.
Utilizza le coordinate indicate per scrivere le equazioni delle tre rette.



3. Un triangolo isoscele ABC ha base di estremi $A(-4, 3)$, $B(-2, -1)$; determina le coordinate del vertice C, sapendo che si trova sulla retta per $P(-3, 4)$ e $Q(6, -2)$.

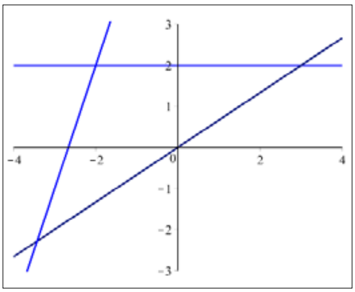
4. Determina le coordinate dell'ortocentro K del triangolo di vertici $A(2, -\frac{1}{2})$, $B(-3, 2)$ e $C(-3, -2)$. Calcola poi l'area del triangolo KAB.

5. Trova le coordinate del baricentro del triangolo di vertici $P(-3, 1)$, $Q(3, -2)$ e $R(3, 7)$; verifica che esse sono uguali alla media aritmetica delle coordinate dei vertici.

6. Calcola la distanza tra le due rette di equazione $2x + y - 1 = 0$ e $2x + y + 2 = 0$.

7. Dimostra il teorema:
In ogni triangolo le sue tre altezze hanno un punto in comune (detto ortocentro).
Per farlo considera un generico triangolo ABC nel piano. Fissa un opportuno sistema di coordinate cartesiane (suggerimento: è conveniente che le coordinate dei vertici siano tali da rendere "semplice" il calcolo[1] …) ed esprimi le coordinate dei vertici mediante lettere. Ora puoi applicare gli strumenti della geometria analitica per provare la tesi.

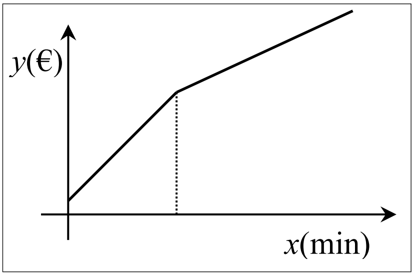
8. I lati del triangolo in figura appartengono alle rette di equazioni $y = 3x + 8$, $y = \frac{2}{3}x$, $y = 2$.
Per quali valori di h una retta di equazione $x = h$ incontra due lati del triangolo in due punti A e B tali che $\overline{AB} > 2$?



[1] Ad esempio, un riferimento conveniente è quello in cui le coordinate dei tre vertici sono A(a, 0), B(b, 0), C(0, c).

9. In figura è rappresentato il costo y (in euro) di una telefonata in funzione della durata x in minuti. La tariffa è di 10 cent al minuto per i primi 15 minuti e poi diventa di 8 cent al minuto. C'è inoltre uno scatto alla risposta di 0,30 €.

- Quanto costa una telefonata di 12 minuti? E di 35 minuti?
- Scrivi le equazioni dei due tratti di retta in figura e utilizzale per verificare i risultati ottenuti nel punto precedente.



Risultati

1) $\frac{75}{7}$ **2)** r: $y = -\frac{3}{2}x - \frac{27}{4}$; s: $y = \frac{2}{3}x + 3$; t: $x = -\frac{13}{5}$ **3)** $C(-\frac{3}{7}, \frac{16}{7})$; **4)** $K(-\frac{9}{4}, -\frac{1}{2})$; Area(KAB) $= \frac{85}{16}$

5) $(1, 2)$ **6)** $\frac{\sqrt{45}}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ **8)** $-\frac{18}{7} < h < 0$ **9)** 1,50€, 3,40€; $y = 0{,}10x + 0{,}30$, $y = 0{,}08x + 0{,}60$

Bibliografia e sitografia del capitolo 3

[Freudenthal, 1994] Freudenthal, H. (1994). *Ripensando l'educazione matematica.* Brescia: La Scuola.

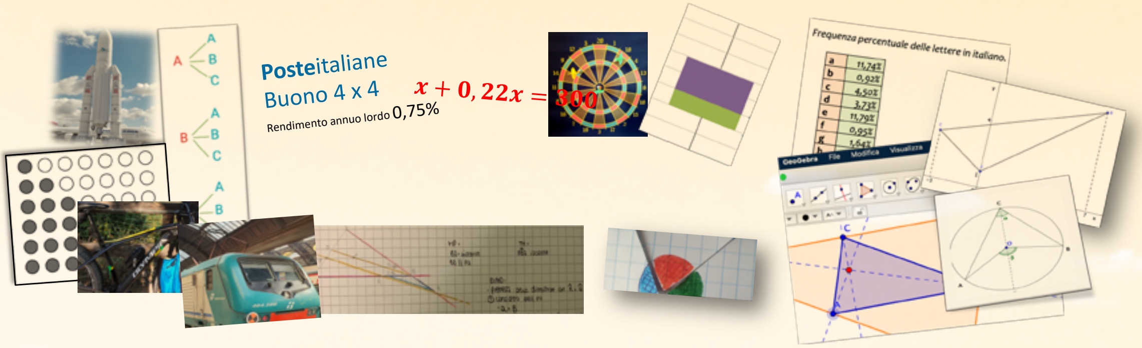
[Grugnetti e Villani, 1999] Grugnetti, L., Villani, V. (a cura di) (1999). *La matematica dalla scuola materna alla maturità. Proposta di un percorso globale per l'insegnamento della matematica.* Bologna: Pitagora.

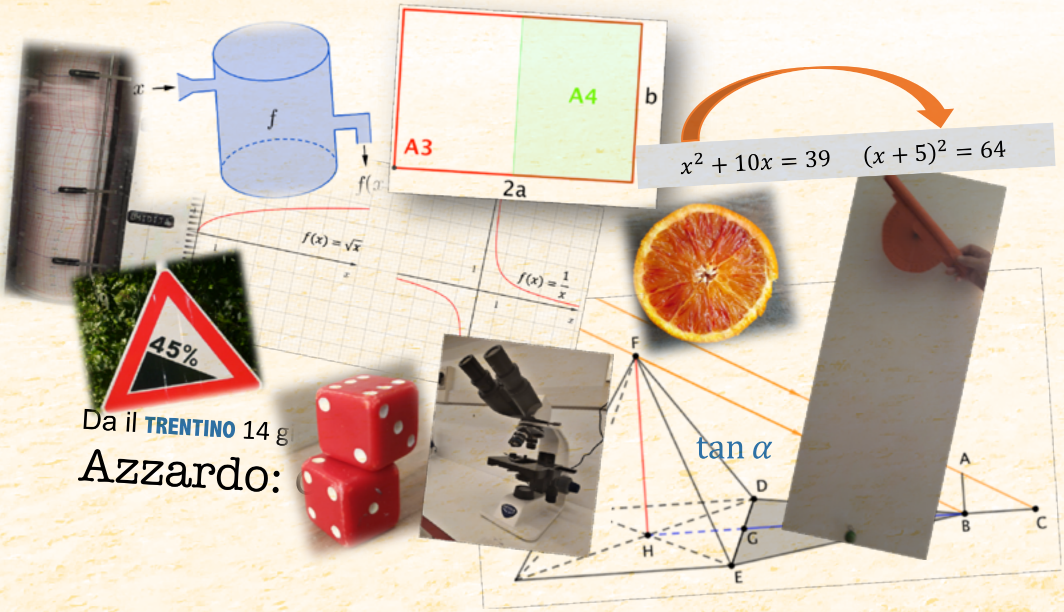
[MIUR, 2012] MIUR (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione.*

http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf

[Zan, 2001] Zan, R. (2001). I danni del 'bravo' insegnante. In Livorni L., Meloni G., Pesci A. (a cura di) *Le difficoltà in matematica: da problema di pochi a risorsa per tutti*. Bologna: Pitagora, 133-141.

iprase
apprendimento ricerca innovazione





ISBN 978 887 702 510 5